

Casamento Multinível Generalizado de Constelações de Sinais a Grupos

Jorge Pedraza Arpasi, e Reginaldo Palazzo Jr.

Abstract—A definição padrão de casamento entre constelações de sinais S e grupos algébricos abstratos G é dado em [1]. Até agora são conhecidos diferentes métodos de casamento, sendo que na sua maioria são para grupos abelianos (comutativos). Neste trabalho apresentamos um método baseado na análise dos subgrupos normais do grupo para o qual se pretende encontrar constelações casadas. Podemos considerar este método como sendo multinível pois o número de camadas das diferentes constelações resultantes depende do número de subgrupos normais de G . Consideramos este método generalizado porque funciona para grupos abelianos e não abelianos.

Keywords—Casamento de constelações de sinais e grupos, códigos de treliça, modulação codificada, códigos de grupo, subgrupos normais.

I. INTRODUÇÃO

OS códigos de treliça, resultantes do casamento entre códigos lineares e constelações de sinais, são amplamente usados nos padrões ITU para modems V34 (33,6 Kbs/s) e V90 (56 Kbs/s). Esta combinação de codificação e modulação, chamada modulação codificada, permite a realização da proteção de erros sem afetar a faixa do canal. O casamento entre o alfabeto, a ser utilizado em um codificador convolucional, e a constelação de sinais foi introduzido por Ungerboeck, [8], através do conceito de *mapeamento por partições de conjuntos*. Forney, [3], notou que boa parte dos codificadores (códigos) convolucionais binários apresentam a estrutura de grupo, assim foi proposto um casamento entre uma certa classe de grupos e constelações de sinais. Seguiram-se outras definições de casamento como os códigos superlineares apresentados em [5] ou os códigos geometricamente uniformes apresentados em [2]. Loeliger, [1], propõe a definição padrão de casamento entre constelações de sinais e grupos que sintetiza as definições até então conhecidas.

Definição 1: [1] Seja S uma constelação Euclidiana de sinais com a métrica d . Então dizemos que S está casada a um grupo G , com elemento identidade e , se existir um mapeamento $\mu : G \rightarrow S$ tal que

$$d(\mu(g), \mu(h)) = d(\mu(g^{-1} \cdot h), \mu(e)). \quad (1)$$

J. P. Arpasi, Pós Doutorando do Departamento de Telemática, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP. Este trabalho foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo FAPESP, processos 97/00282-1 e 95/4720-8, email arpasi@dt.fee.unicamp.br

R. Palazzo, Professor do Departamento de Telemática, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP. Caixa Postal 6101, 13081-970, Campinas, SP, Brasil. Este trabalho foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo FAPESP, Processo No. 95/4720-8, e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, Processo No. 301416-85/0. email palazzo@dt.fee.unicamp.br

Considere os grupos G_1 e G_2 casados com as constelações de sinais S_1 e S_2 via os mapeamentos $\mu_1 : G_1 \rightarrow S_1$ e $\mu_2 : G_2 \rightarrow S_2$, respectivamente. Então considerando o produto direto $G_1 \oplus G_2$ e a constelação produto cartesiano $S_1 \times S_2$ pode-se fazer o casamento considerando os casamentos das componentes. Isto é, o mapeamento $\mu : G_1 \oplus G_2 \rightarrow S_1 \times S_2$ definido por $\mu(g_1, g_2) = (\mu_1(g_1), \mu_2(g_2))$ satisfaz a condição (1). O *casamento multinível* ocorre quando podemos estende-lo a famílias finitas de grupos $\{G_i\}_{i=1}^n$, $n \geq 2$, e constelações $\{S_i\}_{i=1}^n$ desde que existam os respectivos mapeamentos μ_i . Um caso particular de casamento multinível é quando $G_i = G$ e $S_i = S$ para todo i . Os exemplos mais conhecidos de constelações multiníveis são as que utilizam a modulação M -PSK, com multiplicidade M .

Neste trabalho propomos um método de casamento multinível que consiste em encontrar uma constelação multicamada $S \subset S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ para um dado grupo G usando unicamente a análise dos subgrupos normais N_1, N_2, \dots, N_n de G e os seus respectivos grupos quociente $\frac{G}{N_1}, \frac{G}{N_2}, \dots, \frac{G}{N_n}$. Para isso, na Seção II, fazemos uma breve introdução dos conceitos envolvendo subgrupos normais e grupos quocientes de um grupo. Na Seção III, o Teorema 1, que é o resultado central deste trabalho, é estabelecido. A seguir é analisada a aplicação desse teorema usando como exemplo o grupo diedral D_{12} , o grupo das simetrias do hexágono. As tarefas computacionais, tais como encontrar todos os subgrupos normais de D_{12} , testes dos casamentos, etc., foram feitos usando o software GAP [7].

II. SUBGRUPOS NORMAIS E GRUPOS QUOCIENTES

Esta é uma introdução muito abreviada, maiores detalhes a respeito da teoria de grupos podem ser encontrados em [10] ou tópicos mais abrangentes em [11].

Definição 2: Dado um grupo G , suponha que N é um subgrupo de G tal que $g \cdot n \cdot g^{-1} \in N$, para cada $g \in G$ e para cada $n \in N$. Então N é denominado subgrupo normal de G .

A notação usual de “ N subgrupo normal de G ” é $N \triangleleft G$. Note que se e é a identidade de G , então os subgrupos $\{e\}$ e G são sempre subgrupos normais de qualquer grupo G . Estes subgrupos são ditos *triviais* e não serão considerados. Uma outra situação interessante de normalidade é quando G é abeliano. Nesse caso $g \cdot n \cdot g^{-1} = n$, disso segue que qualquer subgrupo de um grupo comutativo é normal.

Um subgrupo normal $N = \{e = n_0, n_1, \dots, n_{s-1}\} \triangleleft G$ determina as classes laterais da forma $g * N = \{g \cdot e, g \cdot n_1, \dots, g \cdot n_{s-1}\} \subset G$. O conjunto das classes laterais $\{g * N ; g \in G\}$ sob a operação $(g * N) * (h * N) = (g * h) * N$ constitui um novo grupo chamado de *grupo quociente*, de-

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 1 | 2 | 0 | 4 | 5 | 3 | 8 | 6 | 7 | 11 | 9 | 10 |
| 2 | 0 | 1 | 5 | 3 | 4 | 7 | 8 | 6 | 10 | 11 | 9 |
| 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 9 | 10 | 11 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 3 | 1 | 2 | 0 | 11 | 9 | 10 | 8 | 6 | 7 |
| 5 | 3 | 4 | 2 | 0 | 1 | 10 | 11 | 9 | 7 | 8 | 6 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7 | 8 | 6 | 10 | 11 | 9 | 2 | 0 | 1 | 5 | 3 | 4 |
| 8 | 6 | 7 | 11 | 9 | 10 | 1 | 2 | 0 | 4 | 5 | 3 |
| 9 | 10 | 11 | 6 | 7 | 8 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 10 | 11 | 9 | 7 | 8 | 6 | 5 | 3 | 4 | 2 | 0 | 1 |
| 11 | 9 | 10 | 8 | 6 | 7 | 4 | 5 | 3 | 1 | 2 | 0 |

TABLE I

TABELA DE CAYLEY DO GRUPO D_{12}

notado por $\frac{G}{N}$.

Exemplo 1: Considere o grupo diedral D_{12} , cuja tabela de Cayley é mostrada na Tabela I.

Observe que $N_1 = \{0, 3\}$ é um subgrupo normal de D_{12} pois usando a Tabela I podemos verificar que $gng^{-1} \in N_1$, para todo $g \in D_{12}$ e para todo $n \in N_1$. Portanto, $N_1 \triangleleft D_{12}$. As classes laterais de N_1 são $N_1 = 0 * N_1 = \{0, 3\}$, $1 * N_1 = \{1, 4\}$, $2 * N_1 = \{2, 5\}$, $6 * N_1 = \{6, 9\}$, $8 * N_1 = \{8, 11\}$ e $7 * N_1 = \{7, 10\}$. Usando, novamente, a Tabela I podemos operar estas classes laterais. Por exemplo, $(2 * N_1) * (7 * N_1) = (2 * 7) * N_1 = 8 * N_1$. Após realizar todos os cálculos sobre este conjunto de classes laterais concluímos que o grupo quociente $\frac{D_{12}}{N_1}$ é isomorfo a D_6 , grupo das simetrias do triângulo. Simbolicamente, $\frac{D_{12}}{N_1} \cong D_6$.

Por outro lado, se considerarmos $N_2 = \{0, 1, 2\}$ obtemos que $N_2 \triangleleft D_{12}$. As classes laterais de $\frac{D_{12}}{N_2}$ são $N_2 = 0 * N_2 = \{0, 1, 2\}$, $3 * N_2 = \{3, 4, 5\}$, $6 * N_2 = \{6, 7, 8\}$, e $9 * N_2 = \{9, 10, 11\}$. Finalmente, denotando por \mathbf{Z}_n ao grupo cíclico de ordem n , temos $\frac{D_{12}}{N_2} \cong \mathbf{Z}_2^2$. \square

III. TEOREMA DO CASAMENTO MULTINÍVEL

Suponha que os bytes na saída de um codificador tenham a estrutura de um grupo $G \cong G_1 \oplus G_2$. Queremos encontrar uma constelação de sinais S casada a G . Se soubermos que existem constelações de sinais S_1 e S_2 casadas a G_1 e a G_2 , respectivamente, então podemos realizar o casamento de $S_1 \times S_2$ a G . Esta maneira de combinar os casamentos das componentes é *natural* e sem dificuldades quando G é abeliano ou ainda decomponível como um produto direto de grupos. Mas a grande maioria dos grupos não admite esta decomposição direta, salvo os subgrupos triviais. Por exemplo considere o caso do grupo D_6 . Este grupo não abeliano de 6 elementos não admite nenhuma decomposição do tipo $D_6 \cong G_1 \oplus G_2$, onde $G_1 \cong \mathbf{Z}_2$ e $G_2 \cong \mathbf{Z}_3$. No entanto o grupo D_6 admite uma decomposição *produto semidireto* de \mathbf{Z}_3 por \mathbf{Z}_2 .

Em geral, dado um grupo G este sempre será decomponível via o conceito de *extensão de grupos*, onde o produto direto e semidireto de grupos são casos particulares. Quando desejamos realizar o casamento entre os grupos

provenientes de um destes produtos generalizados e as constelações de sinais, imitando o procedimento utilizado no caso do produto direto, nem sempre é possível satisfazer a condição (1) da Definição 1. Diante desses fatos, é que propomos o *método de casamento multinível*.

Teorema 1: Dado um grupo G suponha que $\{N_i\}_{i=1}^n$ é uma família de subgrupos normais não triviais tal que para cada $N_i \triangleleft G$ existe uma constelação de sinais S_i casada ao grupo quociente $\frac{G}{N_i}$. Então,

1. Existe um subconjunto S do produto cartesiano $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ tal que S está casado a G ;
2. Se cada S_i está casado injetivamente a $\frac{G}{N_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, e se $\bigcap_{i=1}^n N_i = \{e\}$, então S está injetivamente casado a G .

Prova:

1. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, seja $\mu_i : S_i \rightarrow \frac{G}{N_i}$ o mapeamento casado entre S_i e $\frac{G}{N_i}$. Se d_i é a métrica sobre S_i , então $d_i(\mu_i(g * N_i), \mu_i(h * N_i)) = d_i(\mu_i((g^{-1} * h) * N_i), \mu_i(N_i))$. Em $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ considere os pontos $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ e $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ e a métrica definida por

$$d(p, q) = d((p_1, p_2, \dots, p_n), (q_1, q_2, \dots, q_n)) = \sum_{i=1}^n d_i(p_i, q_i).$$

Defina $\mu : G \rightarrow S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ como sendo

$$\mu(g) = (\mu_1(g * N_1), \mu_2(g * N_2), \dots, \mu_n(g * N_n)). \quad (2)$$

Para cada $g, h \in G$ temos $d(\mu(g^{-1} * h), \mu(e)) =$

$$\begin{aligned} &= d((\mu_1(g^{-1} * h * N_1), \mu_2(g^{-1} * h * N_2), \dots, \mu_n(g^{-1} * h * N_n)), \\ &\quad (\mu_1(e * N_1), \mu_2(e * N_2), \dots, \mu_n(e * N_n))) \\ &= \sum_{i=1}^n d_i(\mu_i(g^{-1} * h * N_i), \mu_i(N_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n d_i(\mu_i(g * N_i), \mu_i(h * N_i)) \\ &= d((\mu_1(g * N_1), \mu_2(g * N_2), \dots, \mu_n(g * N_n)), \\ &\quad (\mu_1(h * N_1), \mu_2(h * N_2), \dots, \mu_n(h * N_n))) \\ &= d(\mu(g), \mu(h)). \end{aligned}$$

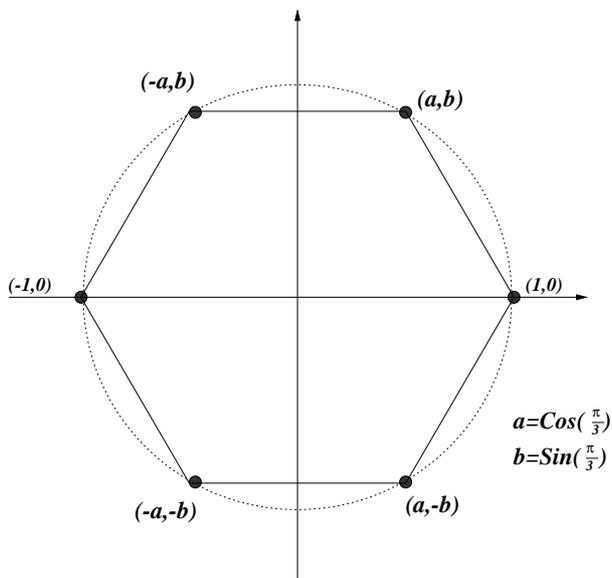
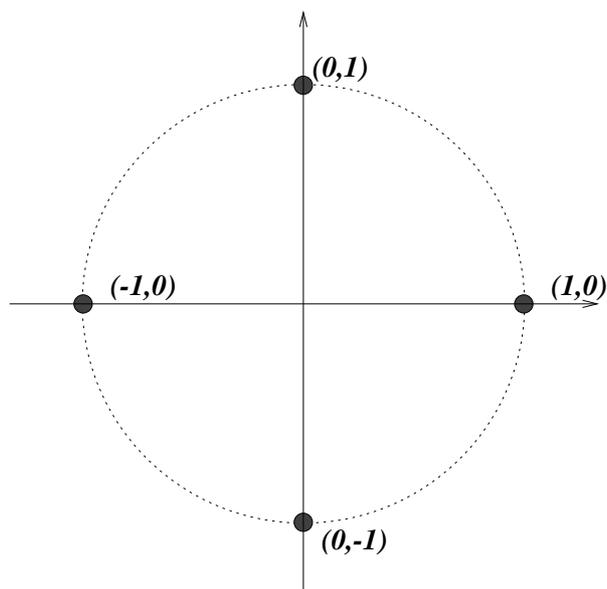
Logo, $S = \mu(G) \subset S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ está casado a G .

2. Suponha $\mu(g) = \mu(h)$, então $\mu_i(g * N_i) = \mu_i(h * N_i)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Como cada μ_i é um mapeamento injetivo, $g * N_i = h * N_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, decorre que $g^{-1} * h \in \bigcap_{i=1}^n N_i = \{e\}$. Portanto, $g = h$. \square

Exemplo 2: Vamos aplicar o Teorema 1 ao grupo diedral D_{12} usando os subgrupos normais $N_1 = \{0, 3\}$ e $N_2 = \{0, 1, 2\}$ e os grupos quocientes $\frac{D_{12}}{N_1}$ e $\frac{D_{12}}{N_2}$ considerados no Exemplo 1.

Considere a constelação $S_1 = \{(1, 0), (a, b), (-a, b), (-1, 0), (-a, -b), (a, -b)\} \subset \mathbf{R}^2$, onde $a = \cos \frac{\pi}{3}$, $b = \sin \frac{\pi}{3}$, mostrada na Figura 1. Considere o mapeamento $\mu_1 : \frac{D_{12}}{N_1} \rightarrow S_1$ definido por

$$\begin{aligned} N_1 &\mapsto (1, 0) & 1 * N_1 &\mapsto (-a, b) \\ 2 * N_1 &\mapsto (-a, -b) & 6 * N_1 &\mapsto (a, b) \\ 8 * N_1 &\mapsto (a, -b) & 7 * N_1 &\mapsto (-1, 0). \end{aligned}$$

Fig. 1. A constelação $S_1 \subset \mathbf{R}^2$ Fig. 2. A constelação $S_2 \subset \mathbf{R}^2$

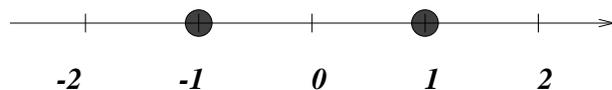
O mapeamento μ_1 satisfaz a condição (1) da Definição 1. Portanto, S_1 está casada a $\frac{D_{12}}{N_1} \cong D_6$. Por outro lado, a constelação $S_2 = \{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}$; mostrada na Figura 2; está casada ao grupo $\frac{D_{12}}{N_2} \cong \mathbf{Z}_2^2$ via o mapeamento μ_2 , entre as classes laterais e a constelação de sinais, dado por

$$\begin{aligned} N_2 &\mapsto (1, 0) & 3 * N_2 &\mapsto (0, 1) \\ 6 * N_2 &\mapsto (-1, 0) & 9 * N_2 &\mapsto (0, -1). \end{aligned}$$

Então, definindo μ como sendo $\mu : D_{12} \rightarrow S_1 \times S_2 \subset \mathbf{R}^4$, e usando a equação (2) da demonstração de Teorema 1, temos $\mu(g) = (\mu_1(g * N_1), \mu_2(g * N_2))$. Como $N_1 \cap N_2 = \{e\}$ e os casamentos μ_1, μ_2 são injetivos, então o casamento é injetivo. Note que $S_1 \times S_2$ possui 24 sinais enquanto que

| $\mu(g)$ | $v \in \mathbf{R}$ | SSED |
|-----------|--------------------|------|
| $\mu(0)$ | $= (1, 0, 1, 0)$ | 0,0 |
| $\mu(1)$ | $= (-a, b, 1, 0)$ | 1,5 |
| $\mu(2)$ | $= (-a, -b, 1, 0)$ | 1,5 |
| $\mu(3)$ | $= (1, 0, 0, 1)$ | 1,0 |
| $\mu(4)$ | $= (-a, b, 0, 1)$ | 2,5 |
| $\mu(5)$ | $= (-a, -b, 0, 1)$ | 2,5 |
| $\mu(6)$ | $= (a, b, -1, 0)$ | 2,5 |
| $\mu(7)$ | $= (a, -b, -1, 0)$ | 2,5 |
| $\mu(8)$ | $= (-1, 0, -1, 0)$ | 4,0 |
| $\mu(9)$ | $= (a, b, 0, -1)$ | 1,5 |
| $\mu(10)$ | $= (a, -b, 0, -1)$ | 3,0 |
| $\mu(11)$ | $= (-1, 0, 0, -1)$ | 1,5 |

TABLE II

O CASAMENTO $\mu : D_{12} \rightarrow S \subset S_1 \times S_2$ Fig. 3. A constelação $S_3 \subset \mathbf{R}$

D_{12} possui 12 elementos. Consequentemente, o casamento desse grupo ocorre com um subconjunto próprio $S \subset S_1 \times S_2$. Por exemplo, $\mu(5) = (\mu_1(5 * N_1), \mu_2(5 * N_2)) = (\mu_1(2 * N_1), \mu_2(3 * N_2)) = (-a, -b, 0, 1)$.

A Tabela II ilustra o rotulamento casado $\mu : G \rightarrow S$. A última coluna desta Tabela mostra o espectro das distâncias Euclidianas ao quadrado, SSED, em relação ao sinal $\mu(0) = (1, 0, 1, 0)$. Em geral, a SSED é obtida através de $\|\frac{v}{\|v\|} - \frac{u_0}{\|u_0\|}\|$, onde $u_0 = \mu(0)$. Denotando por dS_{min} a SSED mínima, temos que para este casamento $dS_{min} = 1$. \square

Várias são as aplicações do Teorema 1 com relação ao grupo D_{12} usando os demais subgrupos normais. Através da Tabela I, verificamos que o grupo D_{12} possui 3 subgrupos normais não triviais além de N_1 e N_2 . Os demais subgrupos normais não triviais são; $N_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $N_4 = \{0, 1, 2, 6, 7, 8\}$, e $N_5 = \{0, 1, 2, 9, 10, 11\}$. Considerando as constelações S_1 e S_2 e a constelação unidimensional $S_3 = \{1, -1\} \subset \mathbf{R}$; mostrada na Figura 3; a totalidade dos casamentos entre estas constelações e os grupos quocientes $\frac{D_{12}}{N_1}, \frac{D_{12}}{N_2}, \frac{D_{12}}{N_3}, \frac{D_{12}}{N_4}, \frac{D_{12}}{N_5}$ é mostrada na Tabela III.

Existe uma grande quantidade de combinações dos N_i 's para as quais o item 1 do Teorema 1, é satisfeito. Entre-

| | $K \cong \frac{D_{12}}{N_i}$ | Constelação |
|-------|------------------------------|----------------------------|
| N_1 | D_6 | $S_1 \subset \mathbf{R}^2$ |
| N_2 | \mathbf{Z}_2^2 | $S_2 \subset \mathbf{R}^2$ |
| N_3 | \mathbf{Z}_2 | $S_3 \subset \mathbf{R}$ |
| N_4 | \mathbf{Z}_2 | $S_3 \subset \mathbf{R}$ |
| N_5 | \mathbf{Z}_2 | $S_3 \subset \mathbf{R}$ |

TABLE III

GRUPOS ISOMORFOS A N_i E $\frac{D_{12}}{N_i}$

| Combinações | dim | dS_{min} |
|---------------------------|-----|------------|
| N_1, N_2 | 4 | 1,00 |
| N_1, N_4 | 3 | 0,50 |
| N_1, N_5 | 3 | 0,50 |
| N_1, N_2, N_3 | 5 | 0,67 |
| N_1, N_2, N_4 | 5 | 1,00 |
| N_1, N_2, N_5 | 5 | 1,00 |
| N_1, N_3, N_4 | 4 | 1,00 |
| N_1, N_3, N_5 | 4 | 1,00 |
| N_1, N_4, N_5 | 4 | 1,00 |
| N_1, N_2, N_3, N_4 | 6 | 0,75 |
| N_1, N_2, N_3, N_5 | 6 | 0,75 |
| N_1, N_2, N_4, N_5 | 6 | 0,75 |
| N_1, N_3, N_4, N_5 | 5 | 0,75 |
| N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 | 7 | 0,60 |

TABLE IV

DIFERENTES CASAMENTOS INJETIVOS DE D_{12} USANDO O TEOREMA 1

tanto, as melhores combinações são aquelas satisfazendo os itens 1 e 2 do Teorema 1, isto é, a condição necessária para o casamento injetivo. Neste caso existem até 14 combinações possíveis. Todas as combinações de casamento injetivos são mostradas na Tabela IV. A segunda coluna desta tabela mostra a dimensão do espaço na qual a constelação S está contida e com a qual o grupo D_{12} está casado à correspondente combinação. A última coluna à direita desta tabela, denotada por dS_{min} , é a distância mínima associada ao correspondente casamento.

IV. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposto um método de casamento que chamamos de generalizado pois é válido tanto para grupos abelianos como para grupos não abelianos. Chamamos de multinível pois o número de camadas depende do número de subgrupos normais do grupo G . Este método abre muitas possibilidades de otimização do casamento a ser escolhido. No exemplo analisado foi visto que existem até 14 possibilidades, de casamento injetivo, dentre os quais se poderia escolher um, dependendo de critérios como dimensão, complexidade e distância mínima. Por outro lado, uma limitação desta proposta de casamento é que se o grupo G tiver menos de dois subgrupos normais não triviais, ou que se a cardinalidade do conjunto interseção é maior do que 1, então o casamento não será injetivo sob essas condições. Por outro lado, existem outros métodos para a realização do casamento de constelações de sinais S a um dado grupo G , tais como os métodos propostos em [9] e [6].

Dessa forma, a proposta apresentada vem preencher uma lacuna existente até então. Como consequência, e dependendo do problema em consideração, uma combinação destas técnicas de casamento conduzirá a determinação de códigos de treliça apresentando excelentes desempenhos.

REFERENCES

[1] H.A. Loeliger; "Signal sets matched to groups", *IEEE Transactions on Information Theory* Vol 37, No 6, pp 1675-1682, November 1991.

[2] G.D.Forney, "Geometrically uniform codes" *IEEE Trans. Inform. Theory*; vol. IT-37 No 5, pp. 1241-1260, 1991.

[3] G.D.Forney, "Coset codes - part II: binary lattices and related codes" *IEEE Trans. Inform. Theory*; vol. IT-34, pp. 1152-1187, Sept 1988.

[4] R. Garello, S. Benedetto, "Multilevel construction of block codes with expanded signal space" *IEEE Trans. Inform. Theory*; vol. IT-41, pp. 1257-1264, Sept 1995.

[5] S. Benedetto, M. A. Marsan, G. Albertengo, E. Giachin, "Combined coding and modulation: theory and applications" *IEEE Trans. Inform. Theory*; vol. IT-34, pp. 223-236, March 1988.

[6] J.P. Arpasi, R. Palazzo Jr.; "Finding signal sets injectively matched to two families of groups", submetido a *Applied Mathematics* da Elsevier Publishing.

[7] Martin Schönert et. al., *GAP - Groups, Algorithms, and Programming*, Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, fifth edition, 1995.

[8] G. Ungerboeck; "Channel coding with multilevel phase signal", *IEEE Transactions on Information Theory* Vol IT 25, pp 55-67, Jan 1982.

[9] J. Bali, Rajan, S; "Block-Coded modulation using two-level group-codes over dihedral groups", *IEEE Transactions on Information Theory* Vol IT 44, pp 1620-1631, July 1998.

[10] A. Garcia, Y Lequain, *Álgebra, um Curso de Introdução*; Projeto Euclides 18, IMPA Rio de Janeiro, 1988.

[11] J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*; Springer-Verlag New York, Fourth ed. 1995.