Partições Geometricamente Uniformes das Constelações de Sinais Hiperbólicas $\{8,8\}$ e $\{p,3\}$

Henrique Lazari, e Reginaldo Palazzo Jr.

Abstract— **Neste trabalho generalizamos o conceito de partições geometricamente uniformes de conjunto de sinais pertencentes ao plano hiperbólico. Esta generalização é possível através do uso do algoritmo de Reidemeister-Schreier. É também apresentada a caracterização dos códigos de classes laterais generalizados via o conceito dos códigos G-lineares. Finalmente, apresentamos algumas partições dos grupos fundamentais das constelações de sinais {8,8} e {p,3} através do algoritmo de Reidemeister-Schreier.**

I. Introdução

O conceito de conjuntos de sinais geometricamente uniformes foi introduzido por Forney [5]. Este conceito tem-se mostrado o mais adequado no contexto de conjuntos de sinais e de espaços euclidianos no sentido de unificar processos tais como as partições do tipo proposta por Ungerboeck [14] e concatenação generalizada [2].

Um dos principais objetivos dos códigos geometricamente uniformes está relacionado com as construções de partições geometricamente uniformes e de códigos de espaço de sinais também geometricamente uniformes, em particular dos códigos de classes laterais generalizados.

O objetivo deste trabalho é de estender os conceitos de conjuntos de sinais, de reticulados e de particionamentos ao plano hiperbólico, em particular o de uniformidade geométrica em modulação/codificação bem como estabelecer uma técnica para realizar a presentação de grupos que serão importantes no processo de particionamento a ser apresentado.

Embora os grupos de isometrias hiperbólicos apresentem uma maior complexidade do que aquela apresentada pelos grupos de isometrias euclidianos, os procedimentos e os conceitos relacionados às partições geometricamente uniformes podem ser estendidos aos grupos de isometrias hiperbólicos. Entretanto, as regiões fundamentais das tesselações, no caso euclidiano, sempre apresentam um subgrupo abeliano de ordem 4 pertencente ao grupo das simetrias mesmo que o grupo de isometrias seja não abeliano, enquanto que no caso hiperbólico grupos mais gerais terão que ser considerados. Em outras palavras, a existência de tesselações regulares no plano hiperbólico da forma $\{p,q\}$ gerando conjuntos de sinais justifica a busca por subgrupos e quocientes de grupos associados ao grupo completo de simetrias $[p,q]$ de $\{p,q\}$ os quais fornecerão informações relevantes sobre as estruturas desses grupos.

O autor está no Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista, UNESP-Rio Claro, SP, Brasil. e-mail: hlazari@ms.rc.unesp.br.

O autor está no Departamento de Telemática, FEEC-UNICAMP.
Este trabalho é financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, Processo No. 95/4720-8, e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, Processo No. 301416/85-0, Brasil. email:palazzo@dt.fee.unicamp.br

II. Conjuntos de Sinais Hiperbólicos

Uma das estruturas algébricas mais importantes em teoria de comunicações é a estrutura de espaço vetorial. É através dela que foi e continua sendo possível modelar e analisar novas propostas de sistemas de comunicações, esquemas de modulação, processamento de sinais, representação de constelações de sinais, etc, como pontos de um espaço euclidiano. Por outro lado, o espaço hiperbólico por não ser um espaço normado globalmente e sim localmente, apresenta dificuldades na utilização da estrutura de espaço vetorial. Todavia, por ser um espaço métrico possibilita que um sistema de coordenadas seja estabelecido. É com base neste contexto que os resultados a serem apresentados se inserem.

Nesta seção iremos considerar o plano hiperbólico $\mathbb{H}$ como sendo o espaço onde poderemos obter conjuntos de sinais a partir das assim chamadas *tesselações regulares*, tesselações essas que apresentam a vantagem de poder ser estudadas a partir dos grupos associados às mesmas, [4] e [3].

Definição 1: Uma **tesselação regular** do plano hiperbólico $\mathbb{H}$ é uma partição de $\mathbb{H}$ por polígonos regulares não sobrepostos todos com o mesmo número de lados sujeitos à restrição de que se sobreponham somente em seus lados ou em seus vértices, onde se encontram sempre o mesmo número de polígonos. Uma tesselação regular em que q p-ágonos regulares se encontram em cada vértice é denotada por $\{p,q\}$.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é sempre estritamente menor do que π, então existe uma tesselação hiperbólica $\{p,q\}$ se, e somente se,

$$(p-2)(q-2) > 4.$$

Associado a cada tesselação $\{p,q\}$ existe um grupo $[p,q]$, o **grupo completo de simetrias** de $\{p,q\}$. Esse grupo é o subgrupo das isometrias de $\mathbb{H}$, denotado por $Isom(\mathbb{H})$, gerado pelas reflexões em torno de todas as retas hiperbólicas nas quais a tesselação $\{p,q\}$ se reflete nela mesma [3], ou seja $[p,q]$ consiste das isometrias de $\mathbb{H}$ que deixam $\{p,q\}$ invariante [4]. Por [3], pag. 53, o grupo $[p,q]$ é gerado pelas reflexões r_1, r_2 e r_3 nos lados do triângulo hiperbólico com ângulos $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{p}, \dfrac{\pi}{q}$.

Como consequência, a presentação do grupo $[p,q]$ associado à tesselação $\{p,q\}$ é dada por

$$\left\langle r_1,r_2,r_3 : r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = (r_2r_1)^p = (r_3r_2)^q = (r_1r_3)^2 = e\right\rangle . \quad (1)$$

Dada uma tesselação $\{p,q\}$ com grupo $[p,q]$ então a tesselação dual é $\{q,p\}$ com grupo $[q,p]$. É imediato que $[p,q]$ e $[q,p]$ são isomorfos, mas as tesselações $[p,q]$ e $[q,p]$ coincidem se, e somente se, $p = q$. O caso $p = q$ é chamado de **auto-dual** e se $p = q = 4g$ para algum inteiro $g \geq 2$, então a tesselação $\{4g,4g\}$ é tal que a identificação dos lados dos polígonos torna $\mathbb{H}$ um recobrimento universal da superfície compacta orientável de gênero g e o seu grupo $[4g,4g]$ tem como subgrupo normal o grupo fundamental desta superfície, definido por

$$\pi_g = \left\langle a_1,...,a_g,b_1,...,b_g : \prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i] = 1\right\rangle .$$

Disto resulta que $\pi_g \lhd [4g,4g]$ e

$$[4g,4g] = \pi_g \ltimes \mathbb{D}_{4g} ,$$

onde $\ltimes$ denota o produto semidireto, e $\mathbb{D}_{4g}$ denota o grupo diedral com $8g$ elementos. O grupo $[p,q]$ pode ser obtido como um subgrupo de índice $2p$ do grupo $\Gamma^*(2,p,q)$, chamado de **grupo de triângulo** que tem um triângulo Δ^* de ângulos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$ como região fundamental. Associado ao grupo de triângulo temos o grupo fuchsiano

$$\Gamma(2,p,q) = \Gamma^*(2,p,q) \cap PSL(2,\mathbb{R}),$$

cuja assinatura é $(0;2,p,q)$ e região fundamental $\Delta^* \cup r_1(\Delta^*)$.

Observação 2: Tesselações regulares da forma $\{4g,4g\}$ podem ser obtidas como subtesselações da tesselação associada a um grupo de triângulo Γ^* ou a sua parte fuchsiana Γ, com região fundamental Δ ou $(\Delta = \Delta^* \cup r_1(\Delta^*))$ a partir da determinação de $4g$-ágonos formados por reuniões de cópias de Δ ou Δ^* e que tenham identificação de lados de forma a gerar uma superfície orientável de gênero g. Esse procedimento é equivalente a determinar um subgrupo de Γ isomorfo a π_g, o grupo fundamental da superfície compacta orientável de gênero g. Assim, os grupos de triângulo se tornam o ambiente adequado para busca de tesselações relevantes no contexto de projetar constelações de sinais.

III. Partições Geometricamente Uniformes Hiperbólicas

O conceito de partições geometricamente uniformes foi introduzido por Forney [5], no contexto de conjuntos de sinais euclidianos. Apesar da maior complexidade dos grupos de isometrias hiperbólicos quando comparados com os euclidianos, a teoria de partições geometricamente uniformes se estende a conjuntos de sinais no plano hiperbólico, como veremos nesta e nas próximas seções.

Definição 3: Seja U' um subgrupo normal de $U(S)$, grupo gerador do conjunto de sinais S. Denotando a órbita de U' por S', onde $S' = \{u(s) : u \in U'\}$, se $U = U' \cup U'a \cup U'b \cup ....$ é a decomposição de U em classes laterais de U', então a partição de S é dada por

$$S = U's_0 \cup U'as_0 \cup U'bs_0....,$$

a qual denotaremos por $S/S^{'}$ é chamada uma *partição geometricamente uniforme*. Denotaremos $U(S')$ por U'.

Definição 4: Chamamos de partição geometricamente uniforme de um conjunto de sinais S geometricamente uniforme com um grupo gerador $U(S)$ a qualquer partição $S/S^{'}$ induzida por um subgrupo normal $U^{'}$ de $U(S)$.

O conceito de partição geometricamente uniforme é importante tendo em vista o seguinte resultado fundamental.

Teorema 5: [5] Se S/S' é uma partição geometricamente uniforme, então os elementos de S/S' são geometricamente uniformes, mutuamente congruentes e tem U' como grupo gerador comum.

Exemplo 6: No caso euclidiano, se Λ é um reticulado e $\Lambda^{'}$ é um subreticulado de Λ de índice finito, então qualquer conjunto de sinais $S = \Lambda + a$ é particionado em $|\Lambda/\Lambda^{'}|$ subconjuntos de sinais geometricamente uniformes $\Lambda^{'}a + v$ com $v \in [\Lambda/\Lambda^{'}]$ para algum conjunto completo de representantes $[\Lambda/\Lambda^{'}]$ de Λ modulo $\Lambda^{'}$.

Observação 7: No caso hiperbólico, temos alguns pontos a considerar: Como a tesselação dual é gerada pelas translações, então a condição equivalente a $T(\Lambda) = \Lambda$ é exatamente o fato de a tesselação ser auto-dual o que equivale a ser do tipo $\{p,p\}$. Em geral, o grupo gerado pelas translações pode ter elementos de ordem finita distintos do elemento neutro. No caso auto-dual, como o grupo π_g tem uma única relação ($\prod[a_i,b_i] = 1$), então π_g só tem o elemento neutro de ordem finita.

Definição 8: Seja S/S' uma partição geometricamente uniforme, dizemos que um grupo $\mathcal{A}$ é um **grupo de rótulos** para S/S' se existe um isomorfismo $m : \mathcal{A} \to \frac{\mathcal{U}(\mathcal{S})}{\mathcal{U}(\mathcal{S}')}$, m é chamado de **isomorfismo de rotulamento**. A aplicação (bijetora) $m : \mathcal{A} \to \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}'}$ definida pela composição do isomorfismo de rotulamento com a bijeção $\frac{U(S)}{U(S')} \to \frac{S}{S'}$ é chamada de **rotulamento isométrico** dos subconjuntos de S pertencentes à partição S/S'.

Podemos visualizar a definição acima pelo diagrama:

$$\begin{array}{ccccl} \mathcal{A} & \longrightarrow & \dfrac{U(S)}{U(S')} & \longrightarrow & \dfrac{S}{S'} \\ a & \longmapsto & u_aU' & \longmapsto & m(a) = u_a(S') \\ & & & & = \{u_au(s_0) : u \in U'\}. \end{array}$$

O fato de m ser uma função bem definida é consequência de que se $u_aU' = vU'$ então $u_a'v^{-1} \in U' = U(S')$. Logo, $u_av^{-1}(S') = S'$ e, portanto $u_a(S') = v(S')$.

As seguintes propriedades são imediatas:(i)$m(e_A) = S'$; (ii)$\left|\frac{S}{S'}\right| = \left|\frac{U(S)}{U(S')}\right| = |\mathcal{A}|$.

Teorema 9: Uma aplicação de rotulamento (ou seja, uma bijeção) $m : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S}/\mathcal{S}'$ é um rotulamento isométrico se, e somente se, para todo $a \in A$ existe uma isometria u_a tal que para todo $b \in \mathcal{A}$

$$m(ab) = u_a(m(b))$$

A próxima definição estabelece o que queremos dizer por um código de espaço de sinais geometricamente uniformes.

Definição 10: Sejam $(\mathcal{A}, *)$ um grupo e $I \subseteq \mathbb{Z}$ (eventualmente finito). Consideraremos o **espaço de sequências** $\mathcal{A}^I = \{\{a_k\}_{k\in I} : a_k \in \mathcal{A}, \forall k \in I\}$, onde $\mathcal{A}$ denota o **alfabeto** e I o **conjunto de índices**. Consideraremos a estrutura natural de grupo em $\mathcal{A}^I$. Dados um conjunto de sinais S e uma partição geometricamente uniforme S/S', estendemos o mapa do rotulamento isométrico a $\underline{m} : \mathcal{A}^I \to (S/S')^I$ de maneira natural. Chamamos de **código de rótulos** a qualquer subconjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}^I$. Com estas notações, o **código de classes laterais generalizado** (código de espaço de sinais) é estabelecido como $C(S/S', \mathcal{D}) = \bigcup_{c\in\mathcal{D}} \underline{m}(c)$.

Observação 11: Como $C(S/S', \mathcal{D}) = \bigcup_{c\in\mathcal{D}} \underline{m}(c) = \bigcup_{c\in\mathcal{D}, k\in I} m(c_k)$ temos que $C(S/S', \mathcal{D}) \subseteq S^I$, e uma sequência de sinais $s \in S^I$ é uma **sequência código** ou um elemento de $C(S/S', \mathcal{D})$ se existe algum $c \in \mathcal{D}$ tal que $s_k \in m(c_k)$ para todo $k \in I$. Se $S \subseteq \mathbb{R}^n$, então $C(S/S', \mathcal{D}) \subseteq (\mathbb{R}^n)^I$. Devemos notar que como $\mathbb{H}$ não é um espaço vetorial, não há uma forma padrão para produtos.

Os resultados a seguir descrevem como deve ser um codificador para os códigos de espaço de sinais no caso hiperbólico.

Teorema 12: [6] Com as notações anteriores, um **código de classes laterais generalizado** é um código $U(S)$-linear.

Lema 13: [6] Se $C(S/S', \mathcal{D})$ é um código de classes laterais generalizado, então $\left(\frac{S^I}{S'^I}\right) \simeq \left(\frac{S}{S'}\right)$ é uma partição geometricamente uniforme e $\underline{m} : \mathcal{A}^I \to \left(\frac{S}{S'}\right)^I$ é um rotulamento isométrico para esta partição.

Lema 14: [6] Com as notações anteriores, se $\mathcal{D} \lhd \mathcal{A}^I$ então com as estruturas induzidas,

$$(S')^I \leq C(S/S', \mathcal{D}) \leq S^I,$$

temos os isomorfismos: $\frac{S^I}{C(S/S', \mathcal{D})} \simeq \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{D}}$; $\frac{C(S/S', \mathcal{D})}{(S')^I} \simeq \frac{\mathcal{D}}{e_{\mathcal{A}^I}} \simeq \mathcal{D}$; $\frac{S^I}{(S')^I} \simeq \frac{\mathcal{A}^I}{e_{\mathcal{A}^I}} \simeq \mathcal{A}^I$, ou seja, as cadeias de partições de grupos $S^i/C(S/S', \mathcal{D})/(S')^I$ e $\mathcal{A}^I/\mathcal{D}/e_{\mathcal{A}}$ são isomorfas.

Lema 15: [6] Os rótulos transladados de $C(S/S', \mathcal{D})$ são as classes laterais à direita de $C(S/S', \mathcal{D})$ em S^I sob a estrutura de grupo induzida.

Os resultados anteriores vem assegurar a validade da seguinte versão para o Teorema de Forney sobre os códigos de classes laterais generalizados.

Teorema 16: [6] Se $C(S/S', \mathcal{D})$ é um código de classes laterais generalizado, então $S^I/C(S/S', \mathcal{D})/(S')^I$ é uma cadeia de partições geometricamente uniformes e os rótulos transladados $C(S/S', \mathcal{D} \cdot a)$ de $C(S/S', \mathcal{D})$ são geometricamente uniformes, mutuamente congruentes e tem grupo de simetrias comum $U(C(S/S', \mathcal{D})) = V$.

Corolário 17: [6] Se $C(S/S', \mathcal{D})$ é um (transladado de um) código de classes laterais generalizado, então: (a) As regiões de Voronoi associadas com duas sequências-código $s, s' \in C(S/S', \mathcal{D})$ são congruentes; (b) O perfil de distâncias $DP(s) = \{\|s - s'\| : s' \in C(S/S', \mathcal{D})\}$ de um ponto de sinal fixo $s \in C(S/S', \mathcal{D})$ a todos os pontos $s' \in C(S/S', \mathcal{D})$ independe de s.

IV. Presentação de Subgrupos

Seja $(G, \cdot)$ um grupo, dizemos que a família $\{g_i\}_{i\in I}$ de elementos de G *gera* G se todo elemento g de G é da forma $g = \prod_{k=1}^{n} g_{i_k}^{e_{i_k}}$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $e_{i_k} \in \{\pm 1\}$. Dizemos então que $\{g_i\}_{i\in I}$ é uma *família de geradores* de G, onde as expressões do tipo $U = \prod_{k=1}^{n} g_{i_k}^{e_{i_k}}$ são chamadas de *palavras* nos g_i.

Dadas as palavras U e V, definimos $U^{-1} = \prod_{k=1}^{n} g_{i_k}^{1-e_{i_k}}$ e $U \cdot V$ por simples justaposição. Como consequência, $U \cdot U^{-1} = 1$, o elemento neutro de G. Chamaremos de *relator* a qualquer palavra W que represente o elemento neutro 1. Assim, dadas duas palavras V e W dizemos que $V = W$ é uma *relação* em G se $V \cdot W^{-1}$é um relator.

Se $\{R_j\}_{j\in J}$ é uma família de relatores de G, dizemos que um relator W é *derivável dos* R_j se W puder ser transformado na *palavra trivial* 1 por aplicações repetidas das operações:
(i) Inserção de um dos R_j ou R_j^{-1} ou relatores da forma $g \cdot g^{-1}$ entre símbolos de W, no seu início ou no fim;
(ii) Eliminação dos relatores citados em (i) se ocorrerem como blocos de símbolos consecutivos em W.

Definição 18: Seja G um grupo gerado pela família $\{g_i\}_{i\in I}$ e $\{R_j\}_{j\in J}$ uma família de relatores tal que todo outro relator de G é derivável dos $\{R_j\}_{j\in J}$, então os $\{R_j\}_{j\in J}$ são chamados de **relatores definidores** de G, e a sequência $\langle\{g_i\}_{i\in I}; \{R_j = 1\}_{j\in J}\rangle$ é dita uma **presentação** de G. Denotaremos esta presentação por

$$G = \langle\{g_i\}_{i\in I}; \{R_j = 1\}_{j\in J}\rangle .$$

Dizemos que G é *finitamante gerado*, *finitamente relacionado* ou *tem presentação finita* se, respectivamente, I é finito, J é finito ou ambos são finitos. Um grupo de isometrias importante do plano complexo é o grupo linear especial projetivo, $PSL(2, \mathbb{Z})$ definido como

$$PSL(2, \mathbb{Z}) = \left\{T(z) = \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ e } ad - bc = 1\right\}.$$

Se representarmos x por $\left(z \to -\frac{1}{z}\right)$ e y por $\left(z \to \frac{1}{-z + 1}\right)$, então $PSL(2, \mathbb{Z}) = \langle x, y : x^2 = y^3 = 1\rangle$.

Exemplo 19: Dizemos que um grupo F com uma família de geradores $\{g_i\}_{i\in I}$ é um **grupo livre** nos $\{g_i\}_{i\in I}$ se $F = \langle\{g_i\}_{i\in I}; \emptyset\rangle$ ou seja, F não tem nenhum relator definidor.

Um fato importante da teoria dos grupos é que todo grupo é quociente de algum grupo livre. Este resultado é consequência do seguinte teorema mais geral:

Teorema 20: (Teorema de Presentação de Quocientes) Sejam G um grupo com a presentação

$$G = \langle \{g_i\}_{i\in I}; \{R_j = 1\}_{j\in J} \rangle ,$$

e N o subgrupo normal de G gerado pelas palavras $\{s_k\}_{k\in K}$, então:

$$\frac{G}{N} = \langle \{g_i\}_{i\in I}; \{R_j = 1\}_{j\in J} \{s_k = 1\}_{k\in K} \rangle .$$

A. Algoritmo de Reidemeister-Schreier

Sejam $G = \left\langle a_1, ..., a_n; \{R_\mu (a_1, ..., a_n) = 1\}_{\mu\in M} \right\rangle$ um grupo e H um subgrupo de G. Se $W(a_\nu) \to \overline{W(a_\nu)}$ é uma função entre palavras tal que:

(i) $\left\{\overline{W(a_\nu)}\right\}$ é um conjunto completo de representantes das classes laterais à direita de G modulo H e:

(ii) Se $K = \prod_{j=1}^{n} a_j^{e_j}$ é um representante, então para cada $m < n$, $\prod_{j=1}^{m} a_j^{e_j}$ também é um representante.

Nestas condições mostra-se que H é gerado pelos elementos da forma $s_{K,a_\nu} = K a_\nu \overline{K a_\nu}^{-1}$. Se denotarmos $\tau\left(a_{\nu_1}^{e_1}, ... a_{\nu_r}^{e_r}\right)$ por $\tau\left(a_{\nu_1}^{e_1}, ... a_{\nu_r}^{e_r}\right) = s_{K_1,a_{\nu_1}}^{e_1} \cdot ... \cdot s_{K_r,a_{\nu_r}}^{e_r}$ temos o seguinte resultado.

Teorema 21: **(Schreier)** Com as notações acima,

$$H = \left\langle \{s_{K,a_\nu}\}; \{s_{M,a_\lambda} = 1\}, \left\{\tau\left(K R_\mu K^{-1}\right) = 1\right\} \right\rangle ,$$

onde os pares M, a_λ são tais que $M a_\lambda$ e $\overline{M a_\lambda}$ determinam o mesmo elemento no grupo livre gerado pelos $\{a_1, ..., a_n\}$.

O próximo teorema fornece uma caracterização de uma classe de grupos cujo único elemento de ordem finita é a identidade.

Teorema 22: [11] Seja $G = \langle a_1, ..., a_n; R(a_1, ..., a_n) = 1\rangle$, então G tem um elemento de ordem finita, diferente da identidade, se $R(a_1, ..., a_n)$ é a k-ésima potência de alguma palavra no grupo livre nos $\{a_1, ..., a_n\}$

Definição 23: Dizemos que um grupo G atua sobre um conjunto A não vazio, se existe um homomorfismo $\varphi : G \to S_A$. Dado o elemento $x \in A$, a **órbita** de x é o conjunto $G_x = \{\sigma(x) : \sigma \in G\}$ e o **estabilizador** de x é o conjunto $E_x = \{\sigma \in G : \sigma(x) = x\}$. Decorre imediatamente que $G_x \subseteq A$ e $E_x \leq G$.

Definição 24: Sejam G um grupo e K, Q subgrupos de G tais que: (i) $K \lhd G$; (ii) $K \cdot Q = G$; (iii) $K \cap Q = \{1\}$. Dizemos então que G é um *produto semidireto* de K por Q, denotado $K \ltimes Q$ ou mais simplesmente $K \ltimes Q$.

Se G é um produto semidireto de K por Q, então existe um homomorfismo $\theta : Q \to Aut(K)$ de modo que $\theta(x)(k) = xkx^{-1}$. Por outro lado, dados K, Q e $\theta : Q \to Aut(K)$, dizemos que um produto semidireto G de K por Q realiza θ se $\theta(x)(k) = xkx^{-1}$ para todos $k \in K$ e $x \in Q$.

Seja G um grupo gerado por $\{g_i\}_{i\in I}$, construimos uma nova estrutura do seguinte modo: Um conjunto de *vértices* rotulado pelos elementos de G, um conjunto de *arestas* rotulado por pares ordenados de elementos de G (ou vértices), onde (x, y) é uma aresta se, e somente se, existir um gerador g_i de modo que $y = g_i x$. Tal estrutura é denominada de *grafo de Cayley do grupo G* .

V. Decomposição de Grupos Fundamentais Hiperbólicos

A existência de tesselações regulares do plano hiperbólico da forma $\{p, q\}$ gerando conjuntos de sinais justifica a procura de subgrupos e quocientes dos grupos $[p, q]$ que fornecem informações sobre as estruturas dos mesmos.

A. O caso auto-dual, $[8, 8]$

Consideremos o grupo

$$\pi = \pi_2 = \langle a_1, b_2, a_2, b_2 : [a_1, b_1][a_2, b_2] = 1\rangle . \qquad (2)$$

Denotando agora por z_n o subgrupo normal de π gerado por a_1^n, b_1, a_2 e b_2, ou seja, $z_n = \langle a_1^n, b_1, a_2, b_2\rangle$, temos então pelo Teorema de Presentação de Quocientes, que

$$\frac{\pi}{z_n} = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 : [a_1, b_1][a_2, b_2] \text{ e } a_1^n = b_1 = a_2 = b_2 = 1\rangle$$

$$= \langle a_1 : a_1^n = 1\rangle = \mathbb{Z}_n$$

e $\{1, a_1, a_1^2, ..., a_1^{n-1}\}$ é um sistema completo de representantes de Schreier para π modulo z_n. Com isso, podemos mostrar que

Teorema 25: [6] Seja π, como em (2), o grupo fundamental da superfície compacta orientável de gênero 2, então:

$$\pi = z_n \ltimes \mathbb{Z}_n,$$

onde

$$z_n = \left\langle \{c_i\}, \{d_i\}, \{e_i\}, 0 \leq i \leq n-1 : c_{i+1} c_i^{-1} [d_i, e_i] = 1 \right\rangle .$$

tal que $0 \, mod \, n \leq (i-1) \, mod \, n$

Consideremos, agora, o subgrupo normal d_n de π gerado pelos elementos a_1^n, a_2^2, $a_1 b_1^{-1}$, $a_2 b_2^{-1}$, $(a_1 a_2)^2$, então pelo Teorema de Presentação de Quocientes, $\frac{\pi}{d_n}$ tem como geradores os elementos a_1, b_1, a_2, b_2 e como relações $[a_1, b_1][a_2, b_2] = a_1^n = a_2^2 = a_1 b_1^{-1} = a_2 b_2^{-1} = (a_1 a_2)^2$ de onde obtemos:

$$\frac{\pi}{d_n} = \left\langle a_1, a_2 : a_1^n = a_2^2 = 1 \text{ e } a_2 a_1 = a_1^{-1} a_2 \right\rangle = \mathbb{D}_n .$$

Temos agora que $\{1, a_1, ..., a_1^{n-1} a_2, a_1 a_2, ..., a_1^{n-1} a_2\}$ é um sistema completo de representantes de Schreier de π modulo d_n. Considerando então $K \in \{1, a_1, ..., a_1^{n-1} a_2, a_1 a_2, ..., a_1^{n-1} a_2\}$ e $a_\nu \in \{a_1, b_1, a_2, b_2\}$ obtemos que d_n pode ter no máximo n geradores s_{K,a_ν}. Para determinar $\overline{U(a_1, b_1, a_2, b_2)}$ usamos as relações em $\frac{\pi}{d_n}$. Com isso, podemos mostrar que

Teorema 26: [6] Seja π, como em (2), o grupo fundamental da superfície compacta orientável de gênero 2, então:

$$\pi = d_n \ltimes \mathbb{D}_n ,$$

onde

$$d_n = \langle a_i, b_i, c_i, d_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i : \Phi_i = 1,\ \Psi_i = 1\rangle$$

tal que $i \in \{0, ..., n-1\}$.

Vamos considerar agora os subgrupos $z_{m,n}$ de π gerados por a_1^m, b_1^n, a_2, b_2. Pelo Teorema de Presentação do Quociente obtemos que $\dfrac{\pi}{z_{m,n}}$ tem os mesmos geradores que π e relações $[a_1,b_1][a_2,b_2] = 1, a_1^m = b_1^n = a_2 = b_2 = 1$, mas $a_2 = b_2 = 1$ implica que $[a_2,b_2] = 1$, logo devemos ter $[a_1,b_1] = 1$, ou seja, $a_1b_1 = b_1a_1$. Com isso, podemos mostrar que

Teorema 27: [6] Seja π, como em (2), o grupo fundamental da superfície compacta orientável de gênero 2, então:

$$\pi = z_{m,n} \ltimes (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n),$$

onde

$$z_{m,n} = \langle a_{j,k}, b_{j,k}, c_{j,k}, d_{j,k} : R_{j,k} = 1\rangle$$

tal que $0 \le j \le m-1$ e $0 \le k \le n-1$.

B. Caso não auto-dual - grupos [p,3]

Considere o grupo $[p,3]$ como em (1), isto é, o grupo completo de simetrias de $\{p,3\}$, onde $\mathrm{r}_1(z) = -\overline{z}$. Vamos denotar por $P = P_{p,3} = [p,3] \cap PSL(2,\mathbb{R})$, ou seja, P é a parte fuchsiana de $[p,3]$ consistindo de todos os elementos conformes que são representados por um número par de reflexões. Como $\{1, r_1\}$ é um sistema completo de representantes de Schreier de $[p,3]$ modulo P, aplicando o algoritmo de Reidemeister-Schreier obtemos a seguinte presentação:

$$P = \left\langle s_{r_1,r_2}, s_{r_{r_1},r_3} : s_{r_1,r_2}^p = s_{r_1,r_3}^2 = (s_{r_1,r_2}^{-1} \cdot s_{r_1,r_3})^3 = 1\right\rangle.$$

Denotando então s_{r_1,r_2} por p_2 e $s_{r_{r_1},r_3}$ por p_3 reescrevemos:

$$P = \left\langle p_2, p_3 : p_2^p = p_3^2 = (p_2^{-1}p_3)^3 = 1\right\rangle.$$

Com a nova transformação $p_1 = p_2^{-1}p_3$ obtemos:

$$P = \left\langle p_1, p_2 : p_1^3 = p_2^p = (p_1p_2)^2 = 1\right\rangle.$$

Como $(p_1p_2)^2 = 1$ se, e somente se, $(p_2p_1)^2 = 1$ também podemos reescrever:

$$P = \left\langle p_1, p_2 : p_1^p = p_2^3 = (p_1p_2)^2 = 1\right\rangle.$$

Finalmente, temos o seguinte resultado

Teorema 28: [6] Dado o número natural $p > 6$ (ou seja $(p-2)(3-2) > 4$) a decomposição de $[p,3]$ é dada por

$$[p,3] = P \ltimes \mathbb{Z}_2,$$

onde $P = \left\langle p_1, p_2 : p_1^3 = p_2^p = (p_1p_2)^2 = 1\right\rangle$ e $\mathbb{Z}_2 = \langle r_1\rangle$.

Procuramos determinar um subgrupo normal N de P tal que $\dfrac{P}{N} \simeq \mathbb{Z}_3$. Pelo Teorema de Presentação do Quociente, tomando um gerador da forma $p_2p_1^{-\alpha}$ para N e tal que α satisfaça a condição

$$(p_1p_2)^2 = 1$$

Substituindo $p_2 = p_1^\alpha$, devemos ter que $(p_1p_2)^2 = (p_1^{\alpha+1})^2 = p_1^{2\alpha+2} = 1$. Além disso, $p_2^p = p_1^{\alpha p} = 1$. Logo, devemos ter então:

$$\begin{cases} 3|2\alpha+2 & (*) \\ 3|\alpha p & (**) \end{cases}.$$

Mas a congruência $(*)$ tem solução geral da forma $\alpha = 2+3n \equiv 2 (mod\, 3)$. Assim, $3 \nmid \alpha$ e como 3 é primo, devemos ter $3|p$ e a construção é possível para todo p tal que $3|p$ e $\alpha \equiv 3 mod\, 3$. Sob estas hipóteses:

$$\frac{P}{N} = \left\langle p_1 : p_1^3 = 1\right\rangle.$$

Com isso, $\{1, p_1, p_1^2\}$ é um sistema completo de representantes de Schreier para P modulo N.

Seja $W(p_1,p_2) = \prod_{i=1}^{n} p_1^{u_i}p_2^{v_i}$ uma palavra em p_1 e p_2 que representa um elemento de P. Então, reduzindo modulo N temos

$$W(p_1,p_2) = \prod_{i=1}^{n} p_1^{u_i}p_2^{v_i} = p^{\sum u_i + \sum v_i} = p_1^\lambda,$$

onde

$$\lambda = (\sum u_i + \alpha \sum v_i) mod\, 3 = (\sigma_1(W) + \alpha\sigma_2(W))\, mod\, 3.$$

Finalmente, a presentação de N é dada por

Teorema 29: [6] Dado um número natural p tal que $p > 6$ e $3|p$, então a decomposição de $[p,3]$ é dada por

$$[p,3] = (N \ltimes \mathbb{Z}_3) \ltimes \mathbb{Z}_2,$$

onde

$$N = \left\langle b_1, b_2, b_3 : b_1^2 = b_2^2 = b_3^2 = (b_1b_2b_3)^{\frac{p}{3}} = (b_2b_1b_3)^{\frac{p}{3}} = 1\right\rangle.$$

VI. Conclusões

Neste trabalho apresentamos os conceitos de presentação de grupos, de tesselações regulares no plano hiperbólico necessários para o estabelecimento da extensão do conceito de partição geometricamente uniforme. Foram levados em consideração as decomposições dos grupos fundamentais hiperbólicos auto-dual $[8,8]$ e não auto-dual $[p,3]$ associados às tesselações regulares hiperbólicas $\{8,8\}$ e $\{p,3\}$, respectivamente.

References

[1] Beardon, A.F., *The Geometry of Discrete Groups*, New York, Springer,1982

[2] Biglieri, E., *Performance Evaluation of Digital Communication Schemes Based on Generalized Concatenation*, Politecnico di Torino, Torino, 1991.

[3] Coxeter, H.M.S., Moser, W.O.J., *Generators and Relations for Discrete Groups*, Berlin, Springer, 1965.

[4] Firby, P.A., Gardiner, C.F., *Surface Topology*, New York, Ellis Horwood, 1991.

[5] Forney, Jr.G.D., "Geometrically uniform codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT 37 no. 5, pp. 1241-1260, Sep. 1991.

[6] Lazari, H., *Uma Contribuição à Teoria dos Códigos Geometricamente Uniformes Hiperbólicos*, Tese de Doutorado, DT-FEEC-UNICAMP, Fev. 2000.

[7] Katok, S., *Fuchsian Groups*, Chicago, University of Chicago Press, 1992.

[8] Lima, E.L.,*Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Rio de Janeiro, IMPA, 1993.

[9] Lyndon, R.C.,Schupp, P.E., *Combinatorial Group Theory*, Berlin, Springer-Verlag, 1977.

[10] Magnus, W., *NonEuclidean Tesselations and Their Groups*, New York, Academic Press, 1974.

[11] Magnus, W., Karras, A., Solitar, D.,*Combinatorial Group Theory*, New York, Interscience, 1966.

[12] Rotman, J.J., *The Theory of Groups, An Introduction*, Boston, Allyn and Bacon, 1973.

[13] Thurston, W.P., *Three-dimensional Geometry and Topology*, Princeton, Princeton, 1997.

[14] Ungerboeck, G., "Channel coding with multilevel/phase signals," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT 28, no.1 pp.55-67, Jan. 1982.