

# UM ESTUDO SOBRE DINÂMICA CAÓTICA EM EQUALIZADORES AUTODIDATAS

ROMIS RIBEIRO DE FAISSOL ATTUX E JOÃO MARCOS TRAVASSOS ROMANO

DSPCOM - Lab. de Proc. de Sinais para Comunicações Móveis - Depto. de Comunicações  
Fac. de Eng. Elétrica e de Computação – Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)  
Caixa Postal 6101, CEP: 13083-970, Campinas - SP - Brasil  
Tel.: (19) 7883703, Fax: (19) 2891395  
{romisri, romano}@decom.fee.unicamp.br

## SUMÁRIO

Neste trabalho, buscou-se estudar a ocorrência de comportamento caótico em um equalizador ajustado pelo critério do módulo constante. Para este fim, foram feitas duas análises do comportamento do processo iterativo de ajuste dos parâmetros do equalizador: uma estática, buscando a caracterização dos pontos de equilíbrio do processo, e uma dinâmica, avaliando a estabilidade destes pontos em função do passo de adaptação do método. Através da variação do passo de adaptação, verifica-se que, além de convergência para um dos mínimos e divergência para o infinito, o algoritmo do módulo constante apresenta zonas de comportamento periódico e também regiões onde há caos. O emprego de multiplicadores de Floquet e expoentes de Lyapunov serviu para dar maior embasamento matemático às conclusões do trabalho. Por fim, propõe-se um método que pode levar a um aumento da taxa de convergência global de algoritmos cegos.

## 1. INTRODUÇÃO

As técnicas de equalização conhecidas como *cegas* ou *autodidatas* têm despertado grande interesse desde que surgiram. O motivo é que as mesmas dispensam o uso de sequências de treinamento, que nem sempre são possíveis de se obter em uma aplicação prática.

Dentre os algoritmos adaptativos cegos, podemos destacar, como um dos mais populares, o CMA (Constant Modulus Algorithm), proposto por Godard em 1980 [7]. Este algoritmo tem sido extensivamente estudados em vários de seus aspectos, por diversos autores [1-4, 10, 11], na busca de um maior entendimento acerca de diversas características de convergência do mesmo.

O CMA pertence à família dos algoritmos de Bussgang [9]. Tais algoritmos têm, em sua fórmula iterativa, termos não-lineares em relação à saída do equalizador. A presença de não-linearidades na expressão de atualização dos coeficientes do filtro torna-a uma possível candidata a mostrar comportamento complexo, inclusive caos. A motivação deste trabalho foi a de investigar a ocorrência destes comportamentos em algoritmos baseados no critério do módulo constante.

Para a realização da análise do algoritmo, foram empregados dois modelos de canal/equalizador (ambos filtros FIR de mesma ordem): um ganho real e um modelo MA(1). Em ambos, foram feitas duas análises: uma estática, centrada na obtenção dos pontos de equilíbrio do método iterativo, e uma dinâmica, na

qual o comportamento do sistema é estudado para diferentes valores do passo de adaptação. Na análise dinâmica, enfoca-se a questão da estabilidade dos pontos de equilíbrio, bem como os comportamentos que emergem quando os pontos de mínimo perdem sua estabilidade.

Além dos comportamentos usualmente discutidos no contexto da equalização adaptativa, a saber, convergência para um ponto de mínimo e divergência para o infinito, foram observadas oscilações periódicas nos pesos do filtro e caos. Os resultados da análise nos levaram a propor as linhas gerais de um método de obtenção de convergência global, baseado nas características dinâmicas do algoritmo.

O artigo está estruturado como descreveremos a seguir. Na seção 2, são apresentados o problema geral da desconvolução autodidata e o algoritmo baseado no critério do módulo constante (CMA). Na seção 3, o critério é aplicado à equalização de dois canais, um ganho real e um filtro FIR com dois taps. São mostrados e comentados os resultados da análise estática e da análise dinâmica, para os dois modelos adotados. Na seção 4, são discutidos alguns elementos resultantes da análise precedente que podem ser explorados para melhorar a taxa de convergência global do algoritmo empregado. Finalmente, a seção 5 traz algumas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

## 2. O PROBLEMA DA DESCONVOLUÇÃO AUTODIDATA

No âmbito da teoria de comunicações, pode-se dizer que um dos grandes problemas consiste em se obter uma boa estimativa de um sinal transmitido a partir de uma versão do mesmo distorcida por um canal. A versão distorcida, caso o canal seja considerado linear e invariante no tempo, será a *convolução* do sinal original com a resposta ao impulso do canal de transmissão. Portanto, para se obter uma estimativa do sinal original no receptor, é preciso realizar uma operação de *desconvolução*.

Quando este processo ocorre sem que se conheça a resposta ao impulso do canal de transmissão, fala-se de *desconvolução autodidata ou cega* [9].

Podemos visualizar isto em um modelo genérico do sistema de comunicações descrito acima, encontrado na Fig. 1. Neste modelo,  $s(n)$  é o sinal transmitido,  $x(n)$  é o sinal distorcido pelo canal e presente à entrada do equalizador, enquanto  $y(n)$  é o sinal

equalizado. Os parâmetros do equalizador transversal FIR são expressos pelo vetor  $\mathbf{w}(n)$ . Podemos dizer que o objetivo da desconvolução é obter um valor de  $y(n)$  tão próximo quanto possível de  $s(n)$  ou de uma versão do mesmo atrasada e/ou multiplicada por um fator de escala.

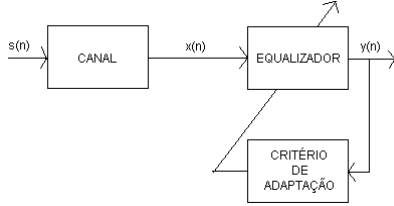


Figura 1. Modelo Canal-Equalizador

Um dos mais populares algoritmos para se realizar a desconvolução cega é o CMA (Constant Modulus Algorithm), pertencente à classe dos algoritmos de Bussgang [9]. Por ser autodidata, esta técnica não dispõe de um sinal desejado para comparar com a saída, como no caso da filtragem de Wiener. Porém, supondo que o sinal transmitido pertença a uma constelação bidimensional, pode-se definir uma dispersão em torno de um certo valor médio que, no caso de constelações com módulo constante, é o próprio quadrado do módulo. Assim, minimizar esta dispersão será fazer com que o sinal de saída tenha características de módulo semelhantes às da constelação do sinal transmitido. A expressão para a dispersão, no CMA, é a seguinte:

$$J(n) = E[(|y(n)|^2 - R_2)^2] \quad (1)$$

onde

$$R_2 = \frac{E[|s(n)|^4]}{E[|s(n)|^2]} \quad (2)$$

Sendo o equalizador um filtro FIR, podemos escrever:

$$y(n) = \mathbf{w}^H(n) \cdot \mathbf{x}(n) \quad (3)$$

Utilizando o método *steepest descent*, que fundamenta-se numa busca seguindo a direção contrária à do gradiente, temos a seguinte expressão de busca do ponto de operação do equalizador:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \cdot \nabla J[\mathbf{w}(n)] \quad (4)$$

Utilizando a aproximação estocástica para o gradiente, temos:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \cdot e^*(n) \cdot \mathbf{x}(n) \quad (5)$$

onde  $e(n)$  é um “erro” definido como:

$$e(n) = y(n) \cdot (R_2 - |y(n)|^2) \quad (6)$$

### 3. ALGORITMO DO MÓDULO CONSTANTE E DINÂMICA CAÓTICA

Com o fim de analisar a expressão iterativa do algoritmo como um sistema dinâmico, iremos aplicar o critério do módulo constante em dois casos. Primeiramente consideraremos um “canal” que consiste apenas de um fator ganho real e, em seguida, assumiremos um modelo MA(1). Embora demasiado

simples em relação aos casos práticos de equalização de canais discretos, tais modelos permitem que se tenha uma boa noção dos tipos possíveis de comportamento presentes na adaptação de equalizadores autodidatas em sistemas como o da Fig.1. É bom ressaltar que a não-linearidade inerente ao método abre um grande “leque” de possibilidades para o sistema em questão.

Em ambos os casos, o equalizador tem a mesma ordem do canal e as amostras do sinal são consideradas i.i.d., valendo  $+A$  e  $-A$  com igual probabilidade.

#### 3.1 Caso simples: canal MA(0)

Neste modelo, o efeito do canal resume-se a uma alteração na potência do sinal transmitido. Considera-se, portanto, o canal como um ganho real de valor  $K$ . Para que o equalizador seja o inverso deste canal, o valor de  $w(n)$  deve ser igual a  $\pm 1/K$ . O equalizador irá de fato atuar como um CAG (Controle Automático de Ganho) cego. Trata-se de um caso bastante simples, sem grandes implicações práticas, cuja grande vantagem é a viabilidade de se obter uma expressão recursiva totalmente determinística para o parâmetro  $w(n)$ , permitindo assim uma determinação analítica dos pontos de equilíbrio e de um limitante de operação satisfatória, expresso em termos do passo de adaptação.

##### 3.1.1 Análise da expressão iterativa

A partir da Fig. 1, podemos escrever:

$$y(n) = w(n) \cdot x(n) = K \cdot w(n) \cdot s(n) \quad (7)$$

A aplicação de (5) nos leva à seguinte expressão para  $w(n)$ :

$$w(n+1) = w(n) + \mu \cdot K^2 \cdot A^4 \cdot w(n) \cdot [1 - K^2 \cdot w^2(n)] \quad (8)$$

A equação (8) encaixa-se na forma geral  $w(n+1) = F[w(n)]$ , que caracteriza sistemas dinâmicos unidimensionais. O sistema é não-linear, pois a função  $F$  mostra esta dependência em relação à variável  $w(n)$ . Sistemas dinâmicos não-lineares da forma de (8) são candidatos naturais à ocorrência de caos. Como primeiro passo de nossa análise, iremos determinar os pontos de equilíbrio de nosso sistema e a sua estabilidade em função do passo de adaptação  $\mu$ . Isto irá fornecer informação sobre as possibilidades de comportamento de nosso equalizador para diferentes valores do parâmetro livre. Tais pontos satisfazem a equação:

$$w_e = F(w_e) \quad (9)$$

De (8), conclui-se facilmente que os pontos de equilíbrio de nosso sistema são  $w_{e1} = 0$  e  $w_{e2,3} = \pm 1/|K|$ . Para verificarmos, como comentamos acima, a influência do parâmetro livre  $\mu$  no comportamento do sistema, observemos a primeira derivada de  $F[w(n)]$  [5]:

$$F'[w(n)] = 1 + \mu \cdot K^2 \cdot A^4 - 3\mu K^4 \cdot A^4 \cdot w^2(n) \quad (10)$$

Aplicando (10) aos pontos de equilíbrio, temos:

$$F'(w_{e1}) = 1 + \mu \cdot K^2 \cdot A^4 \quad (11)$$

$$F'(w_{e2,3}) = 1 - 2 \cdot \mu \cdot K^2 \cdot A^4 \quad (12)$$

É sabido que a capacidade de atração da vizinhança de um ponto de equilíbrio só existe se  $|F'(w_e)| < 1$ . Concluímos então que o primeiro ponto não será estável para nenhum valor de  $\mu > 0$ . Já os outros dois o serão apenas para:

$$0 < \mu < \frac{1}{K^2 \cdot A^4} \quad (13)$$

Podemos entender (13) como a condição sobre o passo de adaptação para que haja performance satisfatória do equalizador, ou seja, convergência para  $w_{e2}$  ou  $w_{e3}$ . Quando  $\mu$  ultrapassa o valor limite, ocorre uma mudança substancial na dinâmica do sistema, pois cessa a convergência para os pontos de equilíbrio. A tal mudança dá-se o nome de *bifurcação*.

Uma forma de se tentar observar o que ocorre é através de um diagrama de bifurcação, que indica o comportamento do sistema após o fim dos transitórios, para diversos valores de  $\mu$ . Empregamos, na análise subsequente, os valores  $K=2$  e  $A=1$ . Nas simulações, foi usado  $w(0) = 0.1$ . Na Fig. 2, foram rodadas 1000 iterações de (8), e representados os últimos 50 valores para cada  $\mu$  (tomado aqui de 0.0001 a 0.5496, a intervalos uniformes de 0.0005).

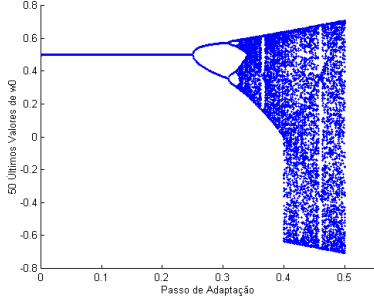


Figura 2. Diagrama de Bifurcação

Podemos então verificar os diferentes comportamentos apresentados pelo nosso CAG, para diferentes valores de  $\mu$ . A primeira região é a de convergência para o ponto de equilíbrio  $1/K$  (converge-se para este ponto e não para seu oposto por causa da inicialização), como já mostramos em (13). Quando o valor crítico de  $\mu$  é ultrapassado, o sistema não mais converge para um ponto de equilíbrio, mas passa a oscilar entre dois valores, em um ciclo-limite estável. Aumentando ainda mais  $\mu$ , ocorrem ciclos de período 4, 8, 16, até que chega-se a um ponto de acumulação, a partir do qual ocorre caos (para  $\mu$  próximo de 0.32). Porém, mesmo nesta região, há “janelas” de periodicidade, onde ciclos-limite voltam a ser estáveis. Após a região de caos, há divergência para o infinito.

Outra característica notável é a mudança significativa na estrutura do atrator estranho, para um valor de  $\mu$  próximo de 0.4. Associamos isto à ocorrência de uma *crise* [8] no atrator, ocorrida quando os valores de  $w(n)$  começam a ser negativos. Podemos atribuir esta crise à “colisão” entre o ponto de equilíbrio instável  $w_{e1} = 0$  e o atrator estranho. A região caótica inferior, que aparece no diagrama apenas após a crise, é “proveniente” da “evolução” do outro ponto de equilíbrio  $(-1/K)$ .

Por fim, foi calculado o expoente de Lyapunov deste sistema, para os valores de  $\mu$  do diagrama. No cálculo do expoente, foram

utilizadas 5000 iterações para cada passo de adaptação. Este expoente, no nosso sistema, assumirá valores negativos nas regiões de convergência para pontos de equilíbrio ou ciclos-limite, será nulo nas bifurcações e positivo na região de caos. A Fig. 3 mostra os resultados obtidos e permite verificar matematicamente o que se comentou no parágrafo anterior.

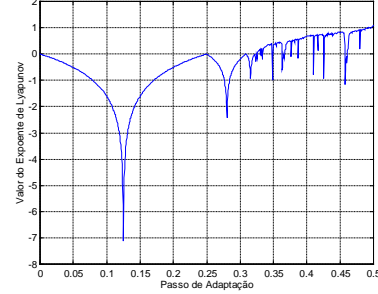


Figura 3. Expoente de Lyapunov

### 3.2 Modelo de canal MA(1)

Tendo caracterizada a existência de fenômenos caóticos através do exemplo anterior, podemos estender nosso estudo a um caso de maior interesse prático que é um canal FIR de primeira ordem, ou modelo MA(1). Normalizando-o em relação ao primeiro coeficiente, podemos escrever para o sistema da Fig. 1:

$$x(n) = s(n) + b \cdot s(n-1) \quad (14)$$

$$y(n) = w_0(n) \cdot x(n) + w_1(n) \cdot x(n-1) \quad (15)$$

onde, novamente, consideraremos  $A = 1$ .

#### 3.2.1 Análise estática

De posse do modelo, obter a expressão de  $J(n)$  torna-se um trabalho matemático. Isto porém só é prático, via de regra, num processo de análise, pois exige conhecimento acerca do canal, por definição não disponível.

A partir de (1), obtemos:

$$J(w_0, w_1) = 1 + \theta_1 \cdot w_0^4 + 4 \cdot \theta_2 \cdot w_0^3 \cdot w_1 + 6 \cdot \theta_4 \cdot w_0^2 \cdot w_1^2 + 4 \cdot \theta_3 \cdot w_0 \cdot w_1^3 + \theta_1 \cdot w_1^4 - 2 \cdot \theta_5 \cdot w_0^2 - 4 \cdot \theta_6 \cdot w_0 \cdot w_1 - 2 \cdot \theta_5 \cdot w_1^2 \quad (16)$$

Onde os valores  $\theta_i$  expressam diferentes momentos ou momentos cruzados de  $x(n)$  e  $x(n-1)$ , sendo funções do zero do canal.

O gradiente de tal superfície é composto por:

$$\frac{\partial J}{\partial w_0} = 4 \cdot \theta_1 \cdot w_0^3 + 12 \cdot \theta_2 \cdot w_0^2 \cdot w_1 + 12 \cdot \theta_4 \cdot w_0 \cdot w_1^2 + 4 \cdot \theta_3 \cdot w_1^3 - 4 \cdot \theta_5 \cdot w_0 - 4 \cdot \theta_6 \cdot w_1 \quad (17)$$

$$\frac{\partial J}{\partial w_1} = 4 \cdot \theta_2 \cdot w_0^3 + 12 \cdot \theta_4 \cdot w_0^2 \cdot w_1 + 12 \cdot \theta_3 \cdot w_0 \cdot w_1^2 + 4 \cdot \theta_1 \cdot w_1^3 - 4 \cdot \theta_6 \cdot w_0 - 4 \cdot \theta_5 \cdot w_1 \quad (18)$$

Uma vez determinado o gradiente, podemos buscar o ponto de operação de nosso equalizador através de (4). Os pontos de equilíbrio deste sistema satisfazem:

$$\nabla J[w(n)] = 0 \quad (19)$$

Em nossa análise subsequente, adotaremos  $b = 0.6$ . Para este valor, foram obtidas as curvas de nível de  $J(n)$ , que estão na Fig. 4. Como podemos perceber,  $J(n)$  não é convexa, apresentando

como pontos que satisfazem (19): dois mínimos globais, dois mínimos locais, quatro pontos de sela e um máximo, totalizando 9 pontos “críticos”. Para o nosso exemplo específico, os pontos citados acima constituem, respectivamente, o conjunto :

$$\mathbf{P} = \{ [0.831 \ -0.372], [-0.831 \ 0.372] [0.084 \ 0.607], [-0.084 \ -0.607], [0.450 \ 0.241], [-0.382 \ 0.613], [-0.450 \ -0.241], [0.382, -0.613], [0 \ 0] \} \quad (20)$$

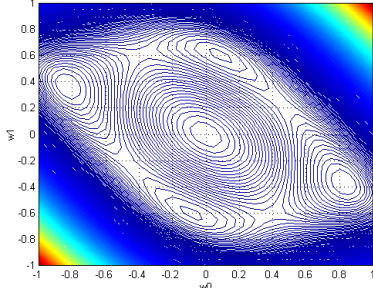


Figura 4. Curvas de Nível de J(n)

Como se pode perceber, sempre que um ponto satisfaz (19), o seu simétrico em relação à origem também o faz. Para se obter os pontos acima, foi preciso solucionar as equações  $\partial J/\partial w_0 = 0$  e  $\partial J/\partial w_1 = 0$ . Observando (17) e (18), podemos perceber que a condição de gradiente nulo corresponde à intersecção de duas curvas no plano  $w_0 \times w_1$ , uma vez que cada elemento da equação vetorial (19) é uma relação implícita entre os dois taps do equalizador. Por métodos numéricos, conseguimos traçar as duas curvas no plano, e obtivemos a Fig. 5. As intersecções entre as curvas correspondem exatamente aos pontos de (20), o que confirma nossos comentários.

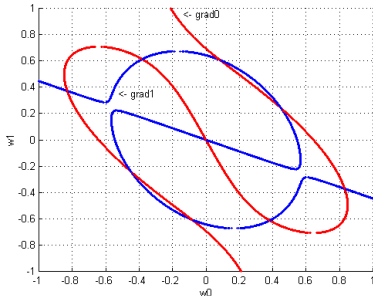


Figura 5. Curvas no Plano  $w_0 \times w_1$  (grad0 corresponde à condição  $\partial J/\partial w_0 = 0$  e grad1 à condição  $\partial J/\partial w_1 = 0$ )

### 3.2.2 Análise dinâmica dos mínimos

Passemos agora à análise dos pontos de equilíbrio do algoritmo. Analisaremos apenas um ponto de mínimo global e um ponto de mínimo local (os outros dois pontos de mínimo são simétricos aos primeiros, o que torna desnecessária a sua análise). O máximo não é estável para  $\mu \geq 0$ , e os pontos de sela não o são para nenhum valor de  $\mu$ .

Na análise dinâmica realizada nesta seção, foi considerado o algoritmo sem aproximação estocástica para o gradiente, conforme a equação (4). O motivo desta escolha é que esta expressão não contém parâmetros aleatórios, o que permite o uso de ferramentas padrão de análise. Consideramos que, mesmo sem estarmos lidando diretamente com (5), a análise da expressão

determinística permite inferir algumas características médias de convergência do CMA.

Tomemos então o mínimo global  $\mathbf{w}_G = [0.831 \ -0.372]$ . Por se tratar de um sistema de dimensão maior que um, a análise de estabilidade está relacionada à matriz de Floquet do sistema. Mais especificamente, é preciso observar a posição dos autovalores, também conhecidos como multiplicadores de Floquet, desta matriz, calculada no ponto analisado. Caso ambos estejam dentro do círculo de raio unitário (CRU), o ponto em questão irá atrair as trajetórias de sua vizinhança.

A figura a seguir mostra o valor do máximo módulo dos autovalores da matriz de Floquet,  $\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ , em função do passo de adaptação  $\mu$ .

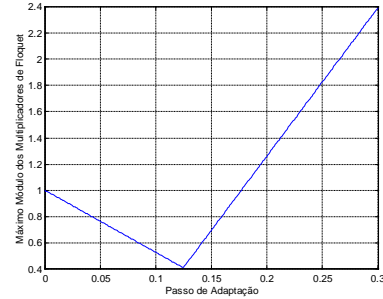


Figura 6. Valor Máximo dentre os Módulos dos Multiplicadores de Floquet (condição de mínimo global)

A partir da Fig. 6, podemos perceber que ambos autovalores estarão dentro do CRU para  $0 < \mu < 0.1765$ . Isto significa que o ponto analisado será estável para esta faixa de valores do passo de adaptação. Novamente, para percebermos o que ocorre para outros valores de  $\mu$ , é interessante traçar um diagrama de bifurcação. Para tanto, escolhemos o peso  $w_0$ . Foi escolhida uma condição inicial que assegurasse convergência global. O valor de  $\mu$  variou de 0 a 0.3, com um passo de 0.001. Foram rodadas 1000 iterações. A Fig. 7 mostra o diagrama. Podemos observar o mesmo cenário do modelo anterior, com uma cascata de infinitas bifurcações de duplicação de período e uma faixa de caos (com janelas de periodicidade). Após esta faixa, há divergência para o infinito.

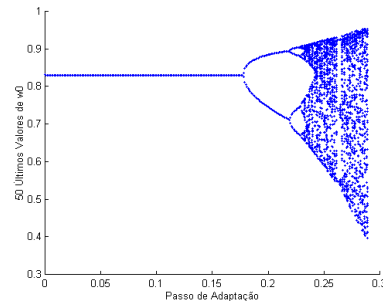
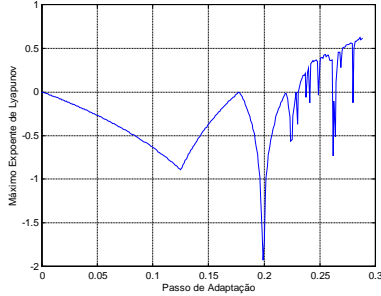


Figura 7. Diagrama de Bifurcação para  $w_0$

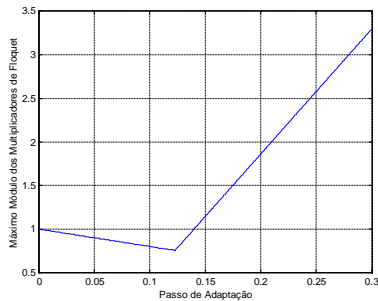
Por fim, foi calculado o maior expoente de Lyapunov do sistema. Para isto, foi utilizada a condição  $\mathbf{w}(0) = [0.831 \ -0.372]^T$  e foram rodadas 5000 iterações para cada valor de  $\mu$  (tomado de 0 a 0.3, com passo de 0.001). A Fig. 8 traz a relação entre o máximo expoente de Lyapunov e o passo de adaptação.

Podemos observar uma região onde o maior expoente é nulo ou negativo, correspondendo a um comportamento estacionário ou periódico, e uma faixa para o qual tal expoente é positivo, caracterizando comportamento caótico. Novamente, na região de caos há infinitas “janelas de periodicidade”, nas quais o sistema volta a oscilar de forma ordenada. Quando o sistema apresenta divergência para o infinito, o expoente também diverge.



**Figura 8.** Maior Expoente de Lyapunov (condição de mínimo global)

Refaçamos agora a análise para o ponto de mínimo local dado por  $w_L = [0,084, 0,607]^T$ . Na Fig. 9, foi traçado o máximo módulo dos autovalores da matriz de Floquet. Nota-se que tal ponto será estável para  $0 < \mu < 0,1400$  pois, fora desta faixa, pelo menos um dos autovalores estará fora do CRU. É interessante observar que neste caso o mínimo local mantém-se estável para uma faixa de valores menor que no caso do mínimo global.

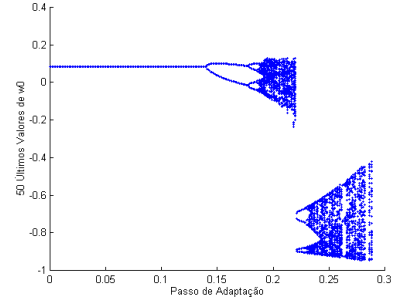


**Figura 9.** Valor Máximo dentre os Módulos dos Multiplicadores de Floquet (condição de mínimo local)

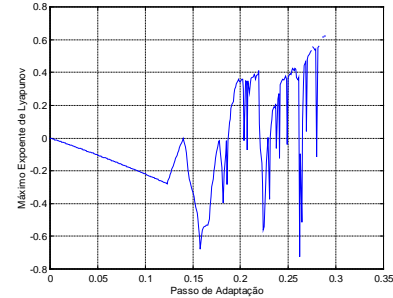
A Fig. 10 mostra o diagrama de bifurcação (de  $w_0$ ) associado ao mínimo local, obtido de forma análoga ao relativo ao mínimo global. Para a obtenção deste diagrama, foi utilizada uma condição inicial que levou o sistema a convergir para um mínimo local.

Para  $\mu$  próximo de 0,22, há uma “descontinuidade” no diagrama, quando o atrator estranho associado ao mínimo local perde sua estabilidade, sendo que o sistema passa então a apresentar uma evolução idêntica a de um mínimo global (pela prevalência da estabilidade desta região).

Observando o máximo expoente de Lyapunov associado ao sistema, mostrado na Fig. 11, verificamos que o mesmo começa a ser maior do que zero em um valor de  $\mu$  próximo de 0,18, mas depois sofre uma mudança abrupta. Tal mudança corresponde à perda de estabilidade do atrator estranho, comentada anteriormente.



**Figura 10.** Diagrama de Bifurcação para  $w_0$



**Figura 11.** Máximo Expoente de Lyapunov (condição de mínimo local)

#### 4. UMA PROPOSTA PARA A OBTENÇÃO DE CONVERGÊNCIA GLOBAL

A partir dos resultados apresentados neste trabalho, surgiu uma possibilidade de aplicação prática das características dinâmicas inerentes à técnica de equalização pelo critério do módulo constante. Esta possibilidade foi inspirada por trabalhos de otimização baseada em caos [13,14]. No presente contexto, procuramos utilizar tais idéias num método para escolha da condição inicial do algoritmo, visando o aumento da taxa de convergência global do mesmo. Podemos dividir a técnica em duas partes: uma fase de varredura e uma fase de diminuição no valor do passo de adaptação. As duas fases são procedimentos independentes de busca do objetivo do método, sendo que o mesmo poderia ser implementado com apenas uma delas (porém, com um desempenho inferior ou igual, o que dá à atuação conjunta das fases um caráter de segurança quanto à qualidade da estimativa).

O princípio por trás da primeira fase é intuitivo: testar diversos valores de  $w$  e verificar, segundo um certo critério, qual é o melhor deles. Caso estejamos no caso determinístico, o critério pode ser a própria função custo  $J(n)$ . Caso estejamos operando com o CMA propriamente dito, é preciso obter um outro critério que aproxime o papel desempenhado pela função custo. Chamemos este critério escolhido de  $G$ .

Quando o sistema opera na zona caótica, ele pode percorrer uma ampla região do espaço de estados, como podemos perceber pelas Figs. 2, 7 e 10. Munidos de nosso critério  $G$ , podemos usar esta “varredura caótica” para buscar um valor de  $w$  tão próximo quanto possível do mínimo global, simplesmente comparando, através de nosso critério, os diversos valores varridos.

Este método é limitado pela faixa percorrida, pois caso a mesma não englobe valores considerados bons, os resultados não devem ser satisfatórios.

A segunda fase do método consiste em escolher um valor de  $\mu$  para o qual o sistema opere em caos. Em seguida, reduz-se gradativamente este valor, até que o sistema convirja para um ponto de equilíbrio que, pela diminuição do passo, volta a ser estável. Tal ponto é então avaliado segundo G e comparado com o ótimo da primeira fase.

A Fig. 10 ajuda a compreender a lógica desta fase. Podemos ver que a região caótica do mínimo local perde a estabilidade para um valor de  $\mu$  menor do que no caso do mínimo global. Se o valor do passo for tal que esteja na região caótica associada ao mínimo global, quando o mesmo for diminuído, o sistema *não irá convergir para o mínimo local*, como seria se o diagrama fosse seguido, mas para o global. Portanto, para canais como o apresentado, a diminuição do valor de  $\mu$  a partir de um valor adequado leva a um valor próximo do ótimo. Porém, como foi comentado, a segunda fase será eficaz em cenários como os apresentados aqui, que não são necessariamente todos os possíveis.

Para inicialização conveniente na região caótica, pode ser usado o maior valor de passo para o qual não há divergência para o infinito. Tal escolha parece adequada para ambas as fases.

Uma vez obtida uma estimativa de  $w$  por este método, tal valor pode ser usado como condição inicial do algoritmo adaptativo, visando refinar esta estimativa. Assim, deve haver uma melhoria na taxa de convergência global em relação a uma escolha aleatória.

## 5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, procurou-se analisar a expressão iterativa de atualização dos parâmetros de um equalizador autodidata como um sistema dinâmico. A não-linearidade inerente ao critério empregado dá origem a ciclos-limite e a comportamento caótico, pouco investigados na análise de algoritmos adaptativos, que usualmente se restringe a verificar a convergência ou não para um ponto de mínimo da função custo.

Nosso estudo consistiu em duas partes básicas : uma análise estática, ligada à localização dos pontos de equilíbrio do sistema, e uma análise dinâmica, que relacionou diferentes comportamentos ao valor do parâmetro livre (no caso o passo de adaptação  $\mu$ ). As observações foram suportadas matematicamente por técnicas usuais de análise de sistemas determinísticos e confirmaram a suposição inicial do trabalho de que algoritmos de Bussgang podem operar em regime caótico.

Os resultados obtidos levaram ainda à proposta preliminar de um método que pode aumentar as taxas de convergência global do algoritmo CMA.

Os próximos passos deste trabalho são a busca de uma análise mais refinada para o caso de canais e equalizadores de qualquer ordem, na busca de soluções para os pontos significativos da função custo e de uma melhor caracterização dos fenômenos

observados no CMA. A partir de uma análise estática mais detalhada, poderemos ter mais informações sobre a dinâmica do sistema. Um outro passo importante é um aprofundamento em métodos de análise dinâmica estocástica, que se apresenta como a ferramenta mais adequada para o caso de filtros de ordens mais elevadas. Por fim, é preciso estabelecer uma análise mais detalhada do desempenho e da aplicabilidade do método de convergência global, cujos princípios foram aqui propostos.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Ding Z., Kennedy R. A., Anderson B. D. O., Johnson C.R., "Ill-convergence of Godard blind equalizers in data communications Systems", IEEE Trans. on Comm., Vol. 39, pp.1313-27, 1991.
- [2] Ding Z., Kennedy R. A., Johnson C. R., "On the (non)existence of undesirable equilibria of Godard blind equalizer", IEEE Trans. on Sig. Processing, vol. 40, pp. 2425-32, 1992.
- [3] Ding Z., Johnson C.R., "On the nonvanishing stability of undesired equilibria for FIR Godard blind equalizers", IEEE Trans. on Sig. Proc., Vol. 41, pp.1940-44, 1993.
- [4] Ding Z., Kennedy R. A., "On the whereabouts of local minima for blind adaptive equalizers", IEEE Trans. on Circ. Syst. II, Vol. 39, pp. 119-23, 1992.
- [5] Fiedler-Ferrara N., Cintra do Prado C.P., Caos: uma Introdução, Primeira reimpressão, Edgard Blücher, 1999.
- [6] Feigenbaum M., "Universal behavior in nonlinear systems", Physica 7D, pp. 16-39, 1983.
- [7] Godard D.N., "Self-recovering equalization and carrier tracking in two-dimensional data communication systems", IEEE Trans. on Comm., vol. COM-28, pp. 1867-75, 1980.
- [8] Grebogi C., Ott E., "Crises, sudden changes in strange attractors, and transient chaos", Physica 7D, pp. 181-200, 1983.
- [9] Haykin S., Adaptive Filter Theory, Third Edition, Prentice Hall, 1996.
- [10] Li Y., Ding Z., "Convergence analysis of finite length blind equalizers", IEEE Trans. on Sig. Proc., Vol. 41, pp. 2120-28, 1995.
- [11] Li Y., Ray Liu K.J., "Static and dynamic convergence behavior of adaptive blind equalizers", IEEE Trans. on Sig. Proc., Vol. 44, pp. 2736-45, 1996.
- [12] Schuster H. G., Deterministic Chaos: An Introduction, First reprint of second revised edition, VCH, 1989.
- [13] Tokuda I., Onodera K., Tokunaga R., Aihara K., Nagashima T., "Global bifurcation scenario for chaotic dynamical systems that solve optimization problems and analysis of their optimization capability", Electronics and Communications in Japan, Part 3, Vol. 81, No. 2, 1998.
- [14] Zhou C., Chen T., "Chaotic annealing for optimization", Physical Review E, Vol. 55, pp. 2580-87, 1997.

**Agradecimentos** : Gostaríamos de agradecer à CAPES que financia parcialmente esta pesquisa, a Márcio Eisencraft, da Escola Politécnica da USP, pelas valiosas discussões e informações sobre dinâmica caótica, e a Cristiano Panazio, Helder Bertan e Alexandre Osorio, pelo apoio técnico.