

Espalhamento Eletromagnético por Objetos Não Homogêneos usando um Método de Decomposição do Domínio

Sérgio Antenor de Carvalho ⁽¹⁾ e Leonardo de Souza Mendes ⁽²⁾

⁽¹⁾ Departamento de Engenharia Elétrica - Centro de Tecnologia - Universidade Federal do Ceará - UFC
Caixa Postal 6001, CEP 60455-760, Fortaleza CE - Brasil
Tel: (85) 2889649, Fax: (85) 2889574, antenor@dee.ufc.br

⁽²⁾ Departamento de Comunicações da Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 6101, 13080-970 Campinas SP - Brasil
Tel: (19) 7883806, Fax: (19) 2391395 lmendes@decom.fee.unicamp.br

Resumo

Este trabalho aplica um método de decomposição do domínio no estudo do espalhamento eletromagnético por objetos não homogêneos tridimensionais. O método consiste na decomposição do domínio das funções de base em subdomínios, onde cada um é caracterizado por uma matriz momento que determina o campo induzido por uma excitação externa. A solução da equação integral é obtida por um procedimento iterativo sobre o conjunto de matrizes momento, onde tomamos o campo incidente como a excitação inicial. Analisamos o gasto de memória e tempo do método de decomposição do domínio em relação ao método dos momentos e aplicamos os dois métodos para calcular o espalhamento por uma esfera não homogênea e por um conjunto de cubos não homogêneos.

1. INTRODUÇÃO

O cálculo do espalhamento eletromagnético por objetos tridimensionais não homogêneos é frequentemente feito usando-se o método dos momentos (MoM) [1]. O MoM sofre limitações por causa do tempo gasto para calcular e resolver a matriz envolvida no método, e a necessidade de grande memória computacional para armazenar a matriz. Uma qualidade do método e que se temos a matriz solução, os campos espalhados por uma nova excitação são calculados pela multiplicação desta matriz pelo novo vetor fonte. Neste trabalho aplicamos um método de decomposição do domínio (MDD) para calcular os campos espalhados por objetos não homogêneos. O método consiste na decomposição do domínio das funções de base em subdomínios, cada um é caracterizado por uma matriz momento que determina o campo induzido por uma excitação externa. A solução da equação integral é obtida por um procedimento iterativo sobre o conjunto de matrizes momento, onde o campo incidente é a excitação inicial. Quando nós temos uma nova excitação não é necessário recalculamos as matrizes momentos e sim reiniciar o processo iterativo com a nova excitação inicial. O MDD ao trabalhar com matrizes de ordem menor que o MoM resolve o problema de mal condicionamento e quanto ao tempo gasto para gerar a solução, será mostrado na seção 4 que, sob certas condições, pode ser menor que o MoM. Aplicamos o MDD e o MoM para calcular os campos espalhados por uma esfera não homogênea de duas camadas e por um conjunto não homogêneo de três cubos. No caso da esfera também comparamos os resultados com os obtidos usando a série de Mie.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema do espalhamento eletromagnético por um objeto tridimensional não homogêneo, pode ser formulado pela substituição do objeto, ocupando um volume V , por uma corrente equivalente volumétrica \mathbf{J} . A equação integral de volume pode ser escrita como [2]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) + j\omega\mu_0 \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') g + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \int_V \rho(\mathbf{r}') g = \mathbf{E}^i, \quad (1)$$

onde ϵ_0 é a permissividade do espaço livre, ω é a frequência angular, μ_0 é a permeabilidade do espaço livre, $j = \sqrt{-1}$ e g é a função de Green do espaço livre dada por

$$g = \frac{e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (2)$$

com $\kappa_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$. A densidade de carga $\rho(\mathbf{r})$ e o campo interno $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ são relacionados a corrente equivalente volumétrica, \mathbf{J} , por $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = -j\omega\rho(\mathbf{r})$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = j\omega(\epsilon(\mathbf{r}) - \epsilon_0)\mathbf{E}(\mathbf{r})$, respectivamente, onde $\epsilon(\mathbf{r})$ é a permissividade do corpo.

3. MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DO DOMÍNIO

Para aplicar o MDD decomparamos o conjunto de funções de base em M subconjuntos, com cada um definido em uma região do objeto, assim, a expansão da corrente equivalente pode ser escrita como

$$\mathbf{J} = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{N^m} \alpha_i \mathbf{J}_i, \quad (3)$$

onde N^m é o número de funções de base na região M . Denominamos o domínio do problema de Ω , então $\Omega = \bigcup_{m=1}^M \Omega_i$ com

$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ para todos $i \neq j$, onde Ω_i representa os subdomínios do corpo. Substituindo (3) em (1) obtemos

$$\sum_{m=1}^M \left[\sum_{i=1}^{N^m} \alpha_i \frac{\mathbf{J}_i}{j\omega(\epsilon - \epsilon_0)} + \sum_{i=1}^{N^m} j\omega\alpha_i \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^{N^m} \alpha_i \nabla\phi(\mathbf{r}) \right] = \mathbf{E}^i, \quad (4)$$

onde o potencial vetor magnético \mathbf{A} é dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') g \, dv', \quad (5)$$

e o potencial escalar elétrico ϕ por

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') g \, dv'. \quad (6)$$

A equação (4) pode ser escrita como um sistema de M equações acopladas da seguinte forma [3]

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N^1} \alpha_i \left[\frac{\mathbf{J}_i}{j\omega(\epsilon - \epsilon_0)} + j\omega\mathbf{A} + \nabla\phi \right] &= \mathbf{E}^i - \sum_{m \neq 1}^M \mathbf{E}_{\text{rad}}^m \quad \text{in } \Omega_1 \\ \sum_{i=1}^{N^2} \alpha_i \left[\frac{\mathbf{J}_i}{j\omega(\epsilon - \epsilon_0)} + j\omega\mathbf{A} + \nabla\phi \right] &= \mathbf{E}^i - \sum_{m \neq 2}^M \mathbf{E}_{\text{rad}}^m \quad \text{in } \Omega_2 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{N^M} \alpha_i \left[\frac{\mathbf{J}_i}{j\omega(\epsilon - \epsilon_0)} + j\omega\mathbf{A} + \nabla\phi \right] &= \mathbf{E}^i - \sum_{m \neq M}^M \mathbf{E}_{\text{rad}}^m \quad \text{in } \Omega_M. \end{aligned} \quad (7)$$

Em (7) $\mathbf{E}_{\text{rad}}^m$ é o campo radiado pela corrente do subdomínio Ω_m , é dado, em termos dos potenciais \mathbf{A} e ϕ , por

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}^m = \sum_{i=1}^{N^m} j\omega\alpha_i \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^{N^m} \alpha_i \nabla\phi(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Aplicando o MoM em (7) definimos um sistema linear para cada subdomínio, obtendo [3]

$$\begin{aligned} [Z_1][I_1] &= [V_1] \\ [Z_2][I_2] &= [V_2] \\ &\vdots \\ [Z_M][I_M] &= [V_M] \end{aligned} \quad (9)$$

onde $[I_t]$ é o vetor incógnita, $[V_t]$ é o vetor excitação iterativo e $[Z_t]$ é a matriz momento definida para o subdomínio Ω_t . Os vetores e a matriz são dados por

$$[I_t] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{N_t} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$Z_{ji} = \langle \mathbf{L}(\mathbf{J}_i), \mathbf{J}_j \rangle \quad i, j = 1, \dots, N_t, \quad (11)$$

$$[V_t] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{E}^i, \mathbf{J}_1 \rangle - \sum_{m \neq 1}^M \langle \mathbf{E}_{\text{rad}}^m, \mathbf{J}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{E}^i, \mathbf{J}_2 \rangle - \sum_{m \neq 2}^M \langle \mathbf{E}_{\text{rad}}^m, \mathbf{J}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{E}^i, \mathbf{J}_{N_t} \rangle - \sum_{m \neq t}^M \langle \mathbf{E}_{\text{rad}}^m, \mathbf{J}_{N_t} \rangle \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Na equação (11) o operador L é dado pela expressão entre colchetes, a esquerda da equação (7). A solução do sistema linear (7) é dada por um procedimento iterativo com o $\mathbf{E}_{\text{rad}}^m$, dado em (12), sendo zero para a primeira iteração e corrigido quando novos valores de α_i são calculados. Temos então,

$$\begin{aligned} [I_1]^n &= [Z_1]^{-1}[V_1]^n \\ [I_2]^n &= [Z_2]^{-1}[V_2]^n \\ &\vdots \\ [I_M]^n &= [Z_M]^{-1}[V_M]^n \end{aligned}, \quad (13)$$

onde o índice n indica o número da iteração. Em cada passo de uma iteração o vetor $[I_t]$, já calculado, é usado para calcular o próximo vetor $[I_{t+1}]$. O critério de convergência é definido por $\|I_m^n - I_m^{n-1}\|_2 \leq \text{dist}$, onde $\|\mathbf{x}\|_2$ é a norma euclidiana dada por

$$\|\mathbf{x}\|_2 \triangleq \left(\sum_{k=1}^K |x_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (14)$$

Na Fig. 1 temos uma representação do processo de cálculo da corrente equivalente pelo MoM e MDD.

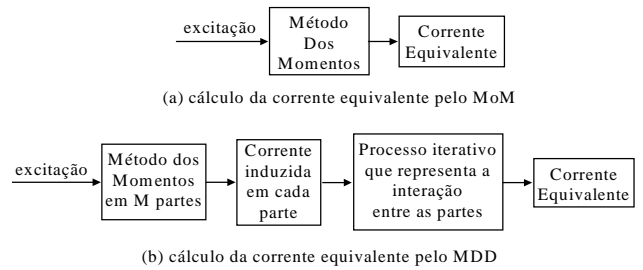


Fig. 1 Processo de cálculo da corrente equivalente

4. GASTO DE MEMÓRIA E TEMPO DO MDD

Nesta seção analisamos o gasto de memória e tempo pelo MDD em relação ao MoM. Suponhamos que usamos N funções de base para expandir a corrente equivalente no MoM, assim temos uma matriz com N^2 elementos. Consideremos que dividimos este conjunto de funções de base em M subconjuntos, então temos

$(N/M)^2$ elementos para cada matriz representando uma região, num total de N^2/M , um fator de redução de ordem M . Vemos que podemos controlar e definir com facilidade o nível de redução da memória. Quanto a comparação entre os tempos gastos devemos considerar o tempo gasto para resolver o sistema linear e o tempo gasto para calcular a matriz do sistema. A decomposição LU requer cerca de $1/3 N^3$ execuções de laço interno com uma multiplicação e uma adição em cada [4], considerando N e N/M funções para o MoM e o MDD, respectivamente, os tempos gastos para solucionar os sistemas serão

$$t_d^s \propto 1/3 N^3 \quad (15)$$

e

$$t_i^s \propto M 1/3 (N/M)^3 = 1/3 N^3 / M^2, \quad (16)$$

onde t_d^s e t_i^s são os tempos gastos para solucionar a matriz do MoM e as M matrizes do MDD, respectivamente, o fator de redução no tempo é da ordem M^2 . O tempo total gasto para calcular a solução pelo MoM pode ser definido como [3]

$$t_d = t_d^e + t_d^s, \quad (17)$$

onde t_d^e é o tempo gasto para formar a matriz do sistema, no MDD o tempo total é dado por [3]

$$t_i = t_i^e + t_i^s + t_i^p, \quad (18)$$

onde t_i^p é o tempo gasto no processo iterativo e t_i^e é o tempo gasto para formar as M matrizes, cujo limite superior é [3]

$$t_i^e \leq t_d^e / M. \quad (19)$$

Substituindo as equações (15), (16) e (19) na equação (18) e após algumas manipulações [3], obtemos

$$t_i = \frac{t_d^e}{M} + t_i^p - \frac{t_d^s}{M} \left(1 - \frac{1}{M} \right). \quad (20)$$

O termo negativo na equação (20) representa o ganho de tempo obtido pela divisão do domínio da equação integral em M partes, também vemos que é possível que o MDD seja mais rápido que o MoM, isto dependerá do tempo gasto nas iterações.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

O primeiro caso é uma esfera não homogênea com $\epsilon_1 = 4,0$, $\kappa_0 a_1 = 0,204$, $\epsilon_2 = 9,0$ e $\kappa_0 a_2 = 0,408$, sobre a qual incide uma onda plana com intensidade $|E|=1$ V/m. As duas polarizações do campo incidente são definidas como horizontal E_x e vertical E_y , ambas em relação ao plano xy , Fig. 2. No MoM

discretizamos a esfera com 130 tetraedros na primeira camada e 390 na segunda, que geraram 720 funções LI. No MDD dividimos a esfera em 8 partes iguais com 80 tetraedros cada, que geraram 105 funções LI, o critério de convergência foi definido com $dist=10^{-8}$ e obtido em 15 iterações. Na Fig. 3 temos o cálculo da “bistatic cross section” usando os dois métodos e a série de Mie. Vemos que os dois métodos apresentaram a mesma ordem de erro em relação a série de Mie.

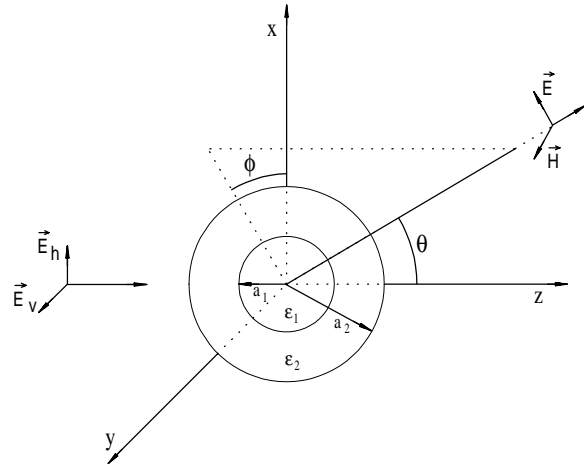


Fig. 2 Esfera não homogênea iluminada por uma onda plana.

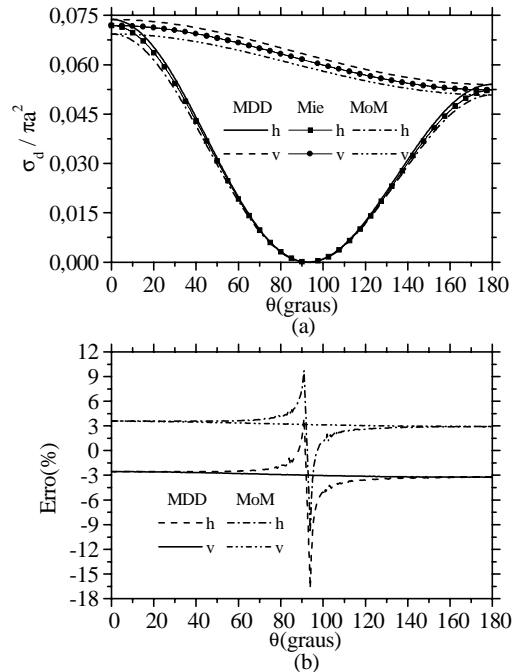


Fig. 3. Bistatic cross section de uma esfera não homogênea (a) MDD, série de Mie e MoM (b) erro em relação a série de Mie.

O campo interno, no baricentro de cada tetraedro, é mostrado na Fig. 4. Por causa da simetria só apresentamos os resultados para duas partes da esfera, a parte 1 é definida pela região $(x<0,y<0,z<0)$ e a parte 2 definida pela região $(x>0,y<0,z<0)$. Os dois

métodos concordaram muito bem e apresentaram o mesmo nível de erro, em relação a série de Mie, na maioria dos tetraedros.

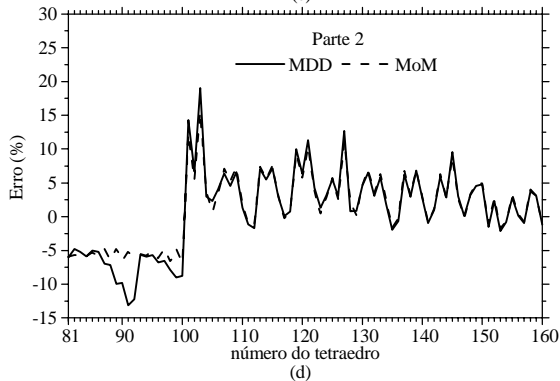
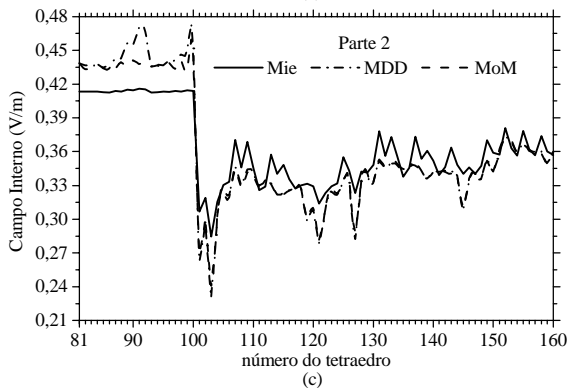
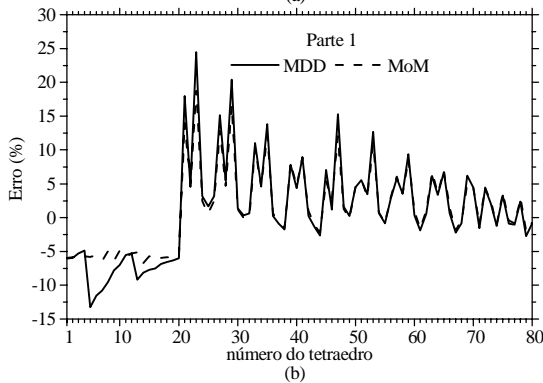
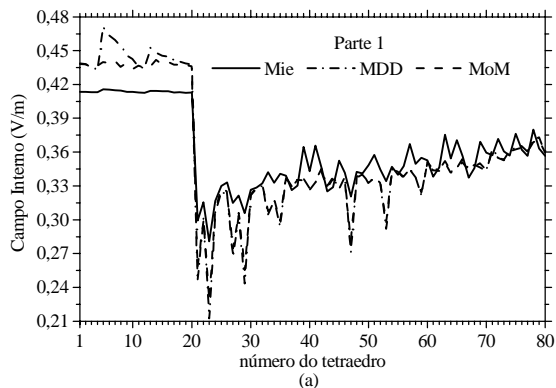


Fig. 4. Campo interno da esfera não homogênea. (a) e (c) campo interno de duas partes da esfera (b) e (d) erro em relação a série de Mie.

O segundo caso estudado é o de um conjunto de três cubos distintos sobre os quais incide onda plana propagando na direção +z, na frequência de 300 MHz e com intensidade $E_x^i = 377 \text{ V/m}$. Fig. 5 temos a configuração do conjunto.

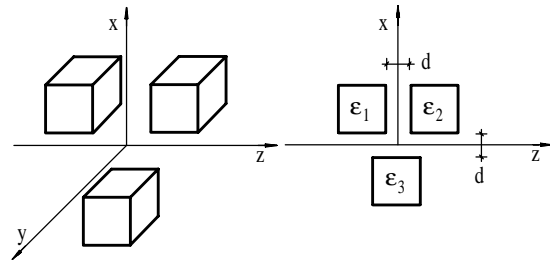


Fig. 5 Configuração do conjunto de três cubos

Cada cubo foi discretizado com 384 tetraedros que geraram 480 funções LI, no MoM o número total de incógnitas é a soma das funções geradas em cada cubo. O critério de convergência para o MDD foi definido com $\text{dist} = 10^{-8}$ e alcançado em 4 iterações. Na Fig. 6 temos o campo espalhado distante do conjunto e vemos uma excelente concordância entre os dois métodos, não sendo possível observar, graficamente, nenhuma diferença. O campo interno é apresentado na Fig. 7 (a), (c). Há uma excelente concordância. Na Fig. 7 (b), (d) e (f) mostramos a diferença entre o campo inicial (indução inicial) e o campo MDD em relação ao campo MoM, vemos que o processo iterativo corrige muito bem a estimativa do campo inicial.

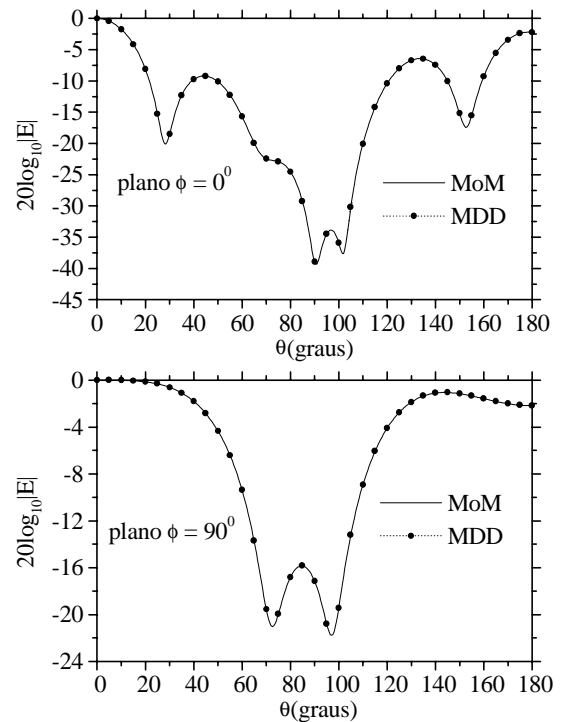


Fig. 6. Campo espalhado por três cubos com $0,1\lambda$ de aresta, $\epsilon_1 = 4,0$, $\epsilon_2 = 9,0$, $\epsilon_3 = 14,0$ e $d = 1,0\lambda$. Iluminados por uma onda plana de campo elétrico $E_x^i = 377 e^{-jk_0 z} \hat{x}$ (V/m).

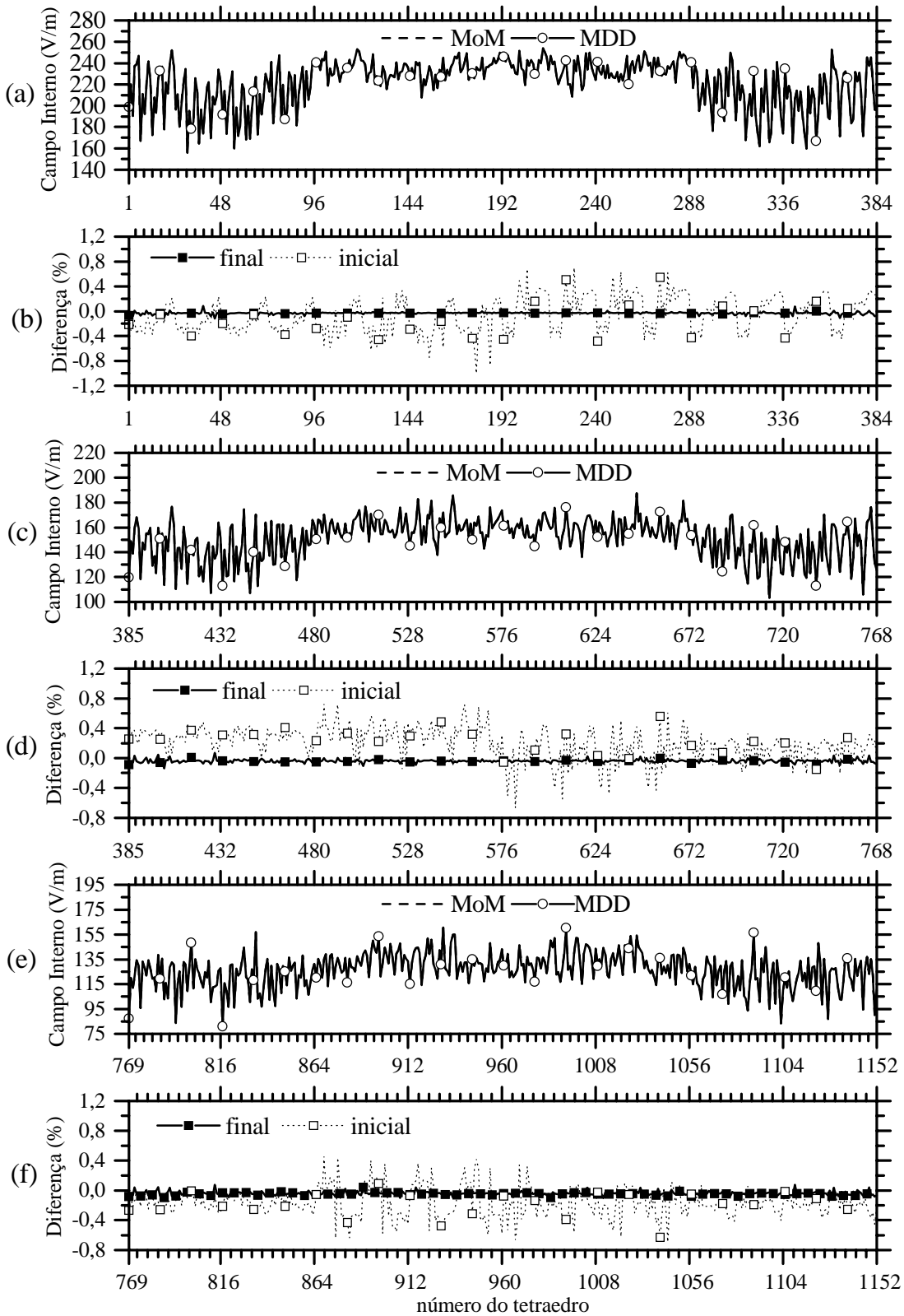


Fig. 7. Campo interno do conjunto de três cubos. (a), (c) e (f) campo interno do 1^o, 2^o e 3^o cubo, respectivamente. (b), (d) e (f) diferença entre o campo interno dado pelo MoM e o campos internos inicial e final dados pelo MDD.

5. CONCLUSÕES

Aplicamos um método de decomposição do domínio (MDD) para calcular os campos espalhados por objetos não homogêneos. Uma análise do gasto de memória e tempo do MDD foi feita, conclui-se que o MDD consome menos memória que o método dos momentos (MoM) e, em certos casos, pode ser mais rápido. Os resultados são comparados com os obtidos com o MoM e, no caso da esfera não homogênea, com os da série de Mie. No cálculo da bistatic cross section da esfera e do campo espalhado distante do conjunto de cubos, o MDD apresentou um desempenho de mesma ordem que o MoM. No cálculo do campo interno da esfera, o MDD apresentou um erro maior em alguns tetraedros, mas na maioria dos tetraedros o erro foi de mesma ordem que no MoM. No caso do conjunto de cubos mostramos que o MDD corrige muito bem a estimativa inicial de campo interno, chegando a um resultado, em termos práticos, igual ao MoM. Os casos estudados demonstram a aplicabilidade e o potencial do MDD proposto, que pode ser aplicado a outras equações integrais ou sistemas de equações integrais. A estrutura paralela do MDD, por exemplo, cada matriz momento é calculada independentemente da outra, permite uma implementação usando processamento paralelo. Com a paralelização do MDD poderemos estender a faixa dos problemas que podem ser estudados usando equações integrais de radiação.

6. REFERÊNCIAS

- [1] Harrington R. F., "Field Computation by Moment Methods", Macmillan, 1968.
- [2] Harrington R. F., "Time-harmonic electromagnetic fields", McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [3] Carvalho S. A., Cálculo dos Campos Eletromagnéticos Gerados pela Interação de um Corpo Tridimensional com uma Onda Eletromagnética usando o Método dos Momentos e Funções de Base Solenoidais, Tese de Doutorado, UNICAMP, 1998.
- [4] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. e Flannery B. P., "Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing", Cambridge University Press, 1992.

7. AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).