SBrT 2000 - XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, 3 a 6 de Setembro, 2000, Gramado-RS

PROPOSTA PARA APLICAÇÃO DO MÉTODO WTLS EM DOA

RICARDO F. COLARES[1], CARLOS A. ALVES[2], AMAURI LOPES[1]

[1] – Departamento de Comunicações - FEEC - UNICAMP
Caixa Postal 6101, CEP: 13.083-970, Campinas SP – Brasil
Tel: (19) 788-3703; {ricardo, amauri}@decom.fee.unicamp.br
[2] - Departamento de Engenharia Elétrica – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP
Caixa Postal 31, CEP: 15.385-000, Ilha Solteira SP – Brasil
Tel/Fax: (18) 762-2125; caa@dee.feis.unesp.br

SUMÁRIO

Este trabalho aborda o problema da estimação da direção de chegada de ondas planas (DOA) através de um arranjo de sensores linear e uniforme. O objetivo é apresentar uma extensão do método WTLS-LP para estimação do parâmetro DOA, denominada aqui de WTLS-DOA. Adicionalmente será proposta uma modificação desse método baseada na restrição dos subespaços envolvidos em sua formulação, dando origem ao método WTLS-DOA Modificado. Devido à semelhança de formulação será possível relacionar essa última proposta com o método MODE, permitindo assim evidenciar suas vantagens.

1. INTRODUÇÃO

O problema de estimação dos parâmetros DOA através de arranjo de sensores é encontrado em uma variedade de aplicações e em diversas áreas do processamento de sinais. Historicamente, a estimação do parâmetro DOA determinava a posição de alvos em RADAR e SONAR. Mais recentemente, tem sido aplicada em sistemas de comunicações móveis [1].

Em tais aplicações, o parâmetro de interesse é aquele que determina a direção de chegada (DOA) ou ângulo de chegada (AOA) de ondas planas incidentes sobre o arranjo, geralmente dado pelo valor de um ângulo, que define o azimute [2]. Geralmente, para a estimação de K parâmetros, correspondentes a K fontes de sinal, dispomos de um arranjo de sensores M-dimensional, que fornece um conjunto de M amostras a cada instante ou experimento, num total de N experimentos ou "snapshots".

Recentemente, vários métodos para estimar o parâmetro DOA tem sido propostos. Dentre esses, os algoritmos de estimação baseados na máxima verossimilhança (ML) apresentam uma grande capacidade de resolução e nenhuma dificuldade particular de aplicação em arranjos de qualquer geometria ou para o caso multidimensional. Porém, tais métodos exigem um esforço computacional proibitivo [3].

Para contornar as dificuldades de implementação do critério ML sugiram novas propostas baseadas em uma reparametrização do critério original, como nos métodos IQML [4] e MODE [5]. No método IQML a implementação é realizada de forma iterativa, enquanto que no método MODE tais iterações são evitadas através de considerações sobre os subespaços envolvidos no critério ML reparametrizado.

A predição linear é também reconhecida como alternativa ao critério ML para estimação de parâmetros de séries temporais. Nos métodos de estimação de freqüências baseados em predição linear, os parâmetros desejados são obtidos através das raízes de um polinômio L dimensional, cujos coeficientes são os ganhos de um filtro preditor otimizado para o sinal de entrada. Variações na estrutura do filtro utilizado e nos procedimento de otimização levam ao surgimento de uma variedade de métodos, como o FBLP [6] e WTLS-LP [7].

Devido à relação entre o problema de estimação de freqüências em séries temporais e a estimação dos parâmetros DOA através de arranjo de sensores, propomos a extensão de tais métodos para o caso em que dispomos de vários experimentos ("snapshots") e utilizamos um arranjo linear e uniforme.

Particularmente, a extensão do método WTLS-LP para estimação dos parâmetros DOA, juntamente com a consideração sobre os subespaços associados aos dados do problema, permite reconhecer uma equivalência entre esse e o método MODE. Mais especificamente, a proposta de um método WTLS-LP para DOA com restrição de subespaço pode ser interpretada como uma extensão do método MODE para ordens elevadas (L > K).

2. ASPECTOS GERAIS

2.1 Modelo do Sinal

O vetor de sinal na saída de um arranjo com M elementos, com geometria arbitrária, e com K ondas distintas incidentes pode ser escrito como [2]

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{a}(\phi_k)\mathbf{s}_k(t), \quad \in C^{\mathrm{Mx1}} \tag{1}$$

onde $\mathbf{s}_k(t)$ representa a função da *k*'esima forma de onda incidente e $\mathbf{a}(\phi_k) = \left[\ a_1(\phi_k), \cdots, a_M(\phi_k)\right]^T$ é denominado de vetor de direção angular ϕ_k. No caso de um arranjo linear, e assumindo que todos os elementos possuem a mesma diretividade, teremos

$$\mathbf{a}(\phi_k) = \left[\; 1, e^{j\phi_k}, \cdots, e^{j(M-1)\phi_k} \;\right]^T \quad , \; k = 1,2,\cdots,K. \qquad (2)$$

onde $\phi_k = (2\pi d/\lambda)\cos\theta_k$, com d representando a distância entre cada elemento do arranjo vertical, λ o comprimento de onda e θ_k o ângulo de incidência medido com relação ao eixo vertical do arranjo. De forma mais compacta e geral, considerando a presença de ruído, podemos reescrever o vetor de sinal em (1) como

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \qquad (3)$$

onde $\mathbf{A} = \left[\; \mathbf{a}(\phi_1), \cdots, \mathbf{a}(\phi_K) \right] \in C^{\mathrm{MxK}}$, $\mathbf{s}(t) = \left[\; s_1(t), \cdots, s_K(t) \right]^T$ e $\mathbf{n}(t)$ é o vetor de ruído aditivo.

2.2 Correlação e Subespaços

A correlação é uma das ferramentas mais úteis na estimação de parâmetros. A matriz de autocorrelação para um vetor de sinal **y**(*t*) e definida como

$$\mathbf{R} = E\left\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)\right\} \qquad (4)$$

onde *E*{ } simboliza esperança estatística. Para o sinal em (3) teremos a matriz de correlação das fontes dada por

$E\left\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(s)\right\} = \mathbf{P}\delta_{t,s}$, $\delta_{t,s} = 1$ para *t*=*s* e $\delta_{t,s} = 0$, para *t*≠*s*,

e a matriz de correlação do ruído, considerado branco, Gaussiano, média nula e variância σ^2, dada por $E\left\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(s)\right\} = \sigma^2 \mathbf{I}\delta_{t,s}$.

Consideraremos a seguinte possibilidade de composição para a matriz **R**

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} = \mathbf{U}\sum\mathbf{U}^H, \qquad (5)$$

onde **U** é uma matriz composta pelos autovetores unitários de **R** e Σ=diag$\left\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M\right\}$ é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de **R** ordenados de forma que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_M > 0$.

Indo além na decomposição apresentada em (5), é fácil verificar que qualquer vetor ortogonal às colunas da matriz **A** será um autovetor da matriz **R**, cujo autovalor será σ^2. Para as dimensões envolvidas, existem M-K vetores ortogonais entre si com essa propriedade, os quais geram o subespaço de ruído. Os restantes autovalores maiores que σ^2, por sua vez, estão relacionados com os autovetores que determinam o subespaço de sinal [2]. Desta forma, podemos reescrever a matriz **R** como

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_s \sum\nolimits_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \sum\nolimits_n \mathbf{U}_n^H \qquad (6)$$

na qual $\sum_n = \sigma^2\mathbf{I}$ e $\sum_s = diag\left\{\lambda_1 + \sigma^2, \ldots, \lambda_K + \sigma^2\right\}$.

Considerando que todos autovetores de ruído são ortogonais às colunas da matriz **A**, as colunas de $\mathbf{U}_s$, dada pelos autovetores associados aos K maiores autovalores de **R,** geram o espaço das colunas de **A**, enquanto que as colunas de $\mathbf{U}_n$, dada pelos autovetores associados aos M – K autovalores restantes, geram seu complemento ortogonal, denominado de espaço nulo de **A**. Os operadores de projeção nos subespaços de sinal e de ruído são definidos, respectivamente, como

$$\prod\nolimits_A = \mathbf{U}_s\mathbf{U}_s^H = \mathbf{A}\mathbf{A}^\# \qquad (7)$$

$$\prod\nolimits_A^\perp = \mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H = \mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^\# \qquad (8)$$

onde $\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$ é a pseudo-inversa de Moore-Penrose da matriz **A** [8]. Considerando a a existência das matrizes inversas, teremos $\mathbf{I} = \prod_A + \prod_A^\perp$.

Embora as formulações anteriores demandem o conhecimento das propriedades estatísticas do sinal e do ruído, na prática dispomos apenas de estimativas. Neste caso, o estimador natural da matriz **R** será

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n) \in C^{MxM} \\ &= \hat{\mathbf{U}}_s \hat{\sum}_s \hat{\mathbf{U}}_s^H + \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\sum}_n \hat{\mathbf{U}}_n^H, \end{aligned} \qquad (9)$$

na qual N representa o número de experimentos utilizados.

3. MÉTODO WTLS-DOA

Considerando um arranjo composto por M sensores, teremos a cada instante de tempo *t* = *n*Δ*t*, denominado de experimento ou "snapshot", M amostras dadas por $\left\{y_0(n), y_1(n), \ldots, y_{M-1}(n)\right\}$.

Supondo que o sinal presente na entrada do filtro satisfaz um modelo AR de ordem L, teremos a seguinte relação entre as amostras disponíveis

$$y_m(n) = \sum_{l=1}^{L} b_l \mathbf{y}_{m-l}(n), \qquad (10)$$

para *m*=L, L+1, ..., M-1, na qual b_l são os parâmetros do sistema. Tomando-se esse mesmo sinal como a entrada de um filtro transversal de ordem L, no qual a primeira amostra é $y_0(n)$ e a última amostra é $y_{M-1}(n)$, e considerando apenas as situações em que o filtro está totalmente preenchido pelas amostras do sinal, podemos notar que cada uma das amostras $\{\, y_m(n) \,\}$ poderá ser predita pela combinação linear das amostras presentes nesse filtro no mesmo instante *n*. Desta forma, o problema de predição do sinal $y_m(n)$ se restringirá na obtenção dos parâmetros b_l do filtro.

Consideraremos, portanto, o conjunto de M amostras do sinal $y_m(n)$ em (10), dado pelo vetor $\mathbf{y}(n)$, como a entrada do filtro transversal de erro de predição com (L + 1) fatores de ganhos. Para que tal filtro funcione como um filtro preditor e o sinal na sua saída seja o erro de predição devemos fazer $b_0 = -1$. Dessa forma, o sinal na sua saída será dado por

$$e_m(n) = \left[\sum_{l=1}^{L} b_l \mathbf{y}_{m-l}(n) \right] - y_m(n) , \qquad (11)$$

para m = L, L+1, ... , M-1.

Para obter os parâmetros ótimos b_l, l = 1,...,L, devemos, portanto, minimizar a energia do sinal de erro, dada por $E = \left[\sum_{n=1}^{N} \| e_m(n) \|^2 \right]$, para m = L, L + 1, ... , M – 1.

Mais especificamente, se definirmos a matriz de dados no instante n como

$$\mathbf{Y}(n) = \begin{bmatrix} y_{L-1}(n) & y_{L-2}(n) & \cdots & y_0(n) \\ y_L(n) & y_{L-1}(n) & \cdots & y_1(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{M-2}(n) & y_{M-3}(n) & \cdots & y_{M-L-1}(n) \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

e o vetor dos valores preditos como

$$\mathbf{d}(n) = \left[y_L(n) \quad y_{L+1}(n) \quad \cdots \quad y_{M-1}(n) \right]_{M-L}^{T} ,$$

poderemos escrever o processo do filtro preditor de forma matricial como

$$\mathbf{Y}(n)\mathbf{b}(n) = \mathbf{d}(n) , \qquad (13)$$

para cada valor de n, na qual o vetor $\mathbf{b}$(n)=$[b_1, b_2, \cdots, b_L]^T$ é ccomposto pelos ganhos do filtro preditor.

Porém, a igualdade da expressão em (13) só é satisfeita para o caso em que o sinal $\mathbf{y}(n)$ não é corrompido por ruído. Para a situação de um sinal ruidoso teremos, conseqüentemente, erro na predição das amostras em $\mathbf{d}(n)$, e para esse caso a expressão em (13) só poderá ser considerada de forma aproximada ($\mathbf{Y}(n)\mathbf{b}(n) \approx \mathbf{d}(n)$).

Considerando o filtro de erro de predição em um dado instante n, teremos

$$\mathbf{Yb} - \mathbf{d} = \left[\mathbf{d} \vdots \mathbf{Y} \right] \begin{bmatrix} -1 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{Y}'\mathbf{b}' = \mathbf{e} , \qquad (14)$$

na qual **Y**’ e **b**’ denotam as versões aumentadas, respectivamente, da matriz de dados **Y** e do vetor dos ganhos do filtro **b**. O vetor **e** representa o sinal de erro na saída do filtro de erro de predição. Na expressão (14) foi omitido o índice n para simplificar a notação.

O critério a ser minimizado nos métodos de estimação baseados em predição linear é dado por

$$J_{PL}(\mathbf{b}) = \left\{ \mathbf{e}^H \mathbf{e} \right\} = \| \mathbf{e} \|^2 , \text{ com } \quad b_0 = -1 , \qquad (15)$$

no qual a motivação é obter os ganhos do filtro de forma a minimizar a energia do sinal de erro de predição, com $b_0 = -1$.

Substituindo o vetor de erro **Y’b’**=**e**, em (15), teremos o critério dado por

$$J_{PL}(\mathbf{b}) = \left\{ \mathbf{b}'^H \ \mathbf{Y}'^H \ \mathbf{Y}'\mathbf{b}' \right\}. \qquad (16)$$

A estrutura da matriz de dados definida em (12), corresponde a utilização de um filtro do tipo progressivo ("forward"). Combinando-se as formas de predição progressiva e regressiva, obtém-se uma terceira forma denominada de progressiva regressiva ("forward-backward"), que dá origem à predição linear progressiva-regressiva (FBLP). Nesse caso, o critério de otimização consiste na minimização da soma das energias dos erros de predição progressivo e regressivo impondo-se como restrição uma relação adequada entre a solução para ambos os filtros. Esse procedimento é aquele que melhor utiliza as amostras disponíveis do sinal e, conseqüentemente, apresenta melhores resultados [6].

O método WTLS-LP consiste em impor uma característica de ruído branco ao resultado do erro de estimação da predição. A motivação para tal restrição surge do comportamento do filtro de erro de predição como um filtro branqueador quando otimizado para os dados de entrada. Sendo mais específico, reescrevendo (14) através de uma reparametrização de **b**, teremos

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}^H \mathbf{y} = \mathbf{B}^H (\mathbf{x} + \mathbf{n}) , \qquad (17)$$

na qual **B** e dada por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_L & \cdots & b_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_L \end{bmatrix} \in \ \in C^{\mathrm{Mx(M-L)}} \qquad (18)$$

e $\mathbf{y} = [\ y_0, \cdots, y_{M-1}]^T$.

Para o filtro preditor otimizado, pode ser demonstrado que o polinômio b(z) = $b_0 z^L + b_1 z^{L-1} + \cdots + b_L$ de ordem L ≥ K, possui K de suas raízes localizadas sobre a circunferência de raio unitário (CRU) na posição angular determinada pelas freqüênias do sinal na entrada do filtro, denominadas de zeros de sinal. As L–K raízes restantes, por sua vez, encontram-se distrubuídas uniformemente dentro da CRU [6]. Essa característica de fase mínima do filtro preditor permite distingüir os zeros de sinal dos demais zeros, propiciando uma capacidade de resolução até uma relação sinal-ruído definida como SNR de limiar. Nessa condição teremos $\mathbf{B}^H \mathbf{x} = 0$ e, conseqüentemente, $\mathbf{e} = \mathbf{B}^H \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n} = [\ n_0, \cdots, n_{M-1}]^T$. Através da suposição de que $\mathbf{n}$ é um ruído tipo branco, e sabendo que para o filtro preditor operar em sua condição ótima devemos ter em sua saída um sinal tipo ruído branco, deveríamos esperar que o sinal de erro **e** também fosse branco. No entanto, podemos notar que o sinal **e** não é branco pois $E\{\mathbf{ee}^H\} = \sigma^2 \mathbf{B}^H \mathbf{B}$, onde $E\{\mathbf{nn}^H\} = \sigma^2 \mathbf{I}$, com $E\{\mathbf{n}\} = 0$. Portanto, é natural branquearmos o sinal **e**, fazendo

$$\mathbf{e}_w = (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1/2} \mathbf{B}^H \mathbf{y} = (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1/2} \mathbf{Y}' \mathbf{b}'. \quad (19)$$

Retomando ao problema original, devemos agora encontrar o vetor **b** que minimiza a norma do erro em (19), ou seja

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg\min \left\{ \mathbf{b}'^H \ \mathbf{Y}'^H \ (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{Y}' \mathbf{b}' \right\}. \quad (20)$$

O método WTLS-LP para DOA, aplicado a K experimentos, consistirá, portanto, na solução do problema em (20) considerado em todos os instamtes *n*, e será dado pelos seguintes passos:

1) Inicialização de **b**': Fazer $b_0 = -1$, ou qualquer outra inicialização mais próxima de seu valor final. Uma melhor inicialização e, conseqüentemente, uma convergência mais rápida, pode ser obtida se tivermos uma informação *a priori* sobre o tipo de sinal. Para o caso sem ruído, qualquer valor inicial para **b**' propiciará convergência após a primeira iteração.

2) Utilizando o procedimento TLS de minimização em termos dos L + 1 autovetores de $\mathbf{R}_w = \sum_{n=1}^{N} \left[\mathbf{Y}(n)'^H \ (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{Y}(n)' \right]$, devemos encontrar o vetor de norma-mínima **b**', com $b_0 = -1$, no espaço nulo aproximado de $\mathbf{R}_w$ [7].

3) Se $\left\| \mathbf{b}'_i - \mathbf{b}'_{i-1} \right\| \le \varepsilon$, seguir para o próximo passo. Caso contrário, voltar para o passo anterior utilizando o valor atualizado para **b'** e, conseqüentemente, atualizando a matriz **B** com esses valores.

4) Tomar as K raízes de *b*(*z*) associadas aos parâmetros do sinal como estimativas de ϕ_k, para *k* = 1, 2, ... ,K. O parâmetro DOA, por sua vez, será estimado como $\theta_k = \arccos(\lambda \phi_k / 2\pi d)$, para *k* = 1, 2, ..., K. Para L > K, toma-se o ângulo das K raízes mais próximas da CRU como estimativas para ϕ_k.

4. MÉTODO WTLS-DOA MODIFICADO

Apresentaremos, aqui, uma modificação para o método WTLS-DOA, na qual faremos uso da distinção entre os subespaços definidos pela matriz de correlação dos dados do problema.

Partindo da relação $\mathbf{B}^H \mathbf{y} = \mathbf{Y}' \mathbf{b}'$, poderemos reescrever (20) como

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg\min \left\{ Tr \sum_{n=1}^{N} \left\{ \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{y}(n) \mathbf{y}^H(n) \right\} \right\} \quad (21)$$

onde Tr denota o traço de uma matriz [8].

Reconhecendo a igualdade $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{y}(n) \mathbf{y}^H(n)$, teremos o problema equivalente a (21), dado por

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg\min \left\{ Tr \left\{ \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \hat{\mathbf{R}} \right\} \right\}. \quad (22)$$

Tomando-se a versão em subespaços da matriz de correlação, dada em (9), poderemos realizar uma restrição na qual o subespaço associado à sua porção ruidosa é extraído, dando origem a matriz

$$\tilde{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{U}}_s \hat{\Sigma}_s \hat{\mathbf{U}}_s^H .$$

Tal restrição procura aproximar a estimativa da matriz de correlação da sua versão sem ruído, com o objetivo de aumentar de forma artificial a relação sinal-ruído que envolve os dados do problema.

Portanto, o método WTLS-DOA Modificado consistirá na solução do seguinte problema de minimização

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg\min \left\{ Tr \left\{ \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H (\hat{\mathbf{U}}_s \hat{\Sigma}_s \hat{\mathbf{U}}_s^H) \right\} \right\}, \quad (23)$$

o qual, após a obtenção das estimativas $\{\hat{\mathbf{U}}_s, \hat{\Sigma}_s\}$, a partir da decomposição em subespaços de $\hat{\mathbf{R}}$, pode ser resolvido iterativamente, como no método WTLS-DOA.

Apesar de exigir a obtenção de estimativas adicionais em relação ao método WTLS-DOA, espera-se que tal modificação leve a uma melhoria no desempenho em relação ao método original. Resultados quantitativos com respeito ao ganho de desempenho com a modificação sugerida ainda estão sob investigação. Em termos qualitativos o desempenho esperado é comparável à aplicação de métodos baseados no critério ML, conforme será constatado nas seções seguintes.

Apresentaremos a seguir um método baseado no critério ML que permitirá comparações com o método WTLS-DOA Modificado.

5. MÉTODO MODE

Consideremos a aplicação do critério ML sobre o problema de estimação do parâmetro DOA, como a minimização da função custo [4]

$$J_{ML}(\phi_k) = Tr \left\{ \prod\nolimits_{\mathbf{A}}^{\perp} \hat{\mathbf{R}} \right\}, \quad (24)$$

que consiste em um problema de otimização não linear K-dimensional.

O método MODE pode ser visto como uma alternativa ao procedimento de minimização do critério ML, na qual consideramos a reparametrização apresentada em (18), com L=K.

Desde que $\mathbf{B}^H$ tenha posto cheio, suas colunas formam uma base para o espaço ortogonal ao espaço gerado pelas colunas de

$\mathbf{A}^H$, denominado de espaço nulo de $\mathbf{A}^H$. Desta forma, o projetor do espaço gerado por $\mathbf{B}^H$ e do espaço nulo de $\mathbf{A}^H$ devem coincidir, implicando em

$$\prod_A^{\perp} = \prod_B = \mathbf{B}(\mathbf{B}^H\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^H \quad . \qquad (25)$$

Conseqüentemente, o critério ML pode ser reparametrizado através dos coeficientes b_l. As estimativas dos coeficientes podem ser, então, obtidas resolvendo-se o seguinte problema de minimização

$$J(\mathbf{b}) = Tr\left\{\mathbf{B}(\mathbf{B}^H\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^H\hat{\mathbf{R}}\right\}, \qquad (26)$$

com $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n)$.

Além da reparametrização, o método MODE procura aproximar a função J($\mathbf{b}$) localmente em torno de $\mathbf{b}_o$, onde $\mathbf{b}$ e $\mathbf{b}_o$ indicam, respectivamente, o parâmetro desconhecido e seu valor ótimo. Desta forma, o MODE pretende contornar os problemas de convergência enfrentados para alcançar as estimativas finais.

Partindo-se da expressão para a matriz $\hat{\mathbf{R}}$ em (9), lembrando que $\mathbf{U}_s\mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H = \mathbf{I}$ e fazendo $\hat{\sum}_n \approx \sigma^2\mathbf{I}$, uma vez que $\hat{\sum}_n$ é um estimador consistente para $\sigma^2\mathbf{I}$, poderemos reconhecer a seguinte função custo equivalente a (26) [5]

$$J(\mathbf{b}) = Tr\left\{\hat{\mathbf{U}}_s^H \prod_{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{U}}_s\left(\hat{\sum}_s - \hat{\sigma}^2\mathbf{I}\right)\right\}, \qquad (27)$$

com $\prod_{\mathbf{B}} = \mathbf{B}(\hat{\mathbf{B}}^H\hat{\mathbf{B}})^{-1}\mathbf{B}^H$.

Desta forma, para N grande, o estimador MODE será dado pela minimização da função em (27) na qual $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{L-K}Tr\left\{\hat{\sum}_n\right\}$ e $\hat{\mathbf{B}}$ são estimativas consistentes para σ^2 e $\mathbf{B}$, respectivamente.

A estimativa consistente para **B**, e conseqüentemente para **b**, pode ser determinada através da minimização da função quadrática

$$J(\mathbf{b}) = Tr\left\{\mathbf{B}(\hat{\mathbf{B}}^H\hat{\mathbf{B}})^{-1}\mathbf{B}^H\hat{\mathbf{U}}_s\mathbf{W}\hat{\mathbf{U}}_s^H\right\}, \qquad (28)$$

com $(\hat{\mathbf{B}}^H\hat{\mathbf{B}})^{-1} = \mathbf{I}$ e na qual **W** é uma matriz de ponderações adequada que generaliza o método MODE. Podemos observar que (28) é equivalente a (27) com $\mathbf{W} = \left(\hat{\sum}_s - \hat{\sigma}^2\mathbf{I}\right)$.

Demonstra-se que a escolha ótima $\mathbf{W}_o$ para **W**, sob o ponto de vista da minimização da variância do estimador, é dada por [5]

$$\mathbf{W}_o = \left(\hat{\sum}_s - \hat{\sigma}^2\mathbf{I}\right)^2 \hat{\sum}_s^{-1}. \qquad (29)$$

A vantagem da escolha em (29) é que as estimativas finais se aproximam mais dos seus valores assintóticos. Dessa forma, o problema de minimização do critério ML para estimação do parâmetro DOA se transforma em um problema direto de obtenção das estimativas através do método MODE.

Apesar de ser considerado um método não iterativo, o método MODE pode ser iterado naturalmente levando, em geral, a melhores resultados [5].

6. RELAÇÃO ENTRE WTLS-DOA E MODE

Podemos constatar através da comparação dos problema de minimização em (27) para o método MODE e (23) para o método WTLS-DOA Modificado que ambos procuram obter suas estimativas como resultado da minimização do produto do projetor ortogonal ao subespaço de sinal reparametrizado, dado por $\prod_{\mathbf{B}}$, com uma estimativa associada ao subespaço de sinal. Portanto, ambos fazem uso da reparametrização em (18) e da distinção entre os subespaço da matriz de correlação estimada.

Por ser derivado do critério ML, que presume uma busca K-dimensional, o método MODE considera a reparametrização apenas para L = K. Essa limitação não ocorre para o método WTLS-DOA Modificado por esse ser derivado de uma predição linear. Nesse último, o aumento da ordem do preditor leva a melhoria na qualidade das estimativas [6]. Essa melhoria no desempenho ocorrerá desde que seja possível a distinção entre os zeros associados ao sinal com relação aos demais zeros do polinômio *b*(*z*), para L > K. Para a aplicação em DOA tal distinção e possível mesmo para baixas relações sinal-ruído e é implementada tomando-se os K zeros mais próximos da CRU como zeros de sinais. Para relações sinal-ruído nas quais tal distinção não é possível, algum outro procedimento de distinção dos zeros deverá ser utilizado. Por outro lado, a utilização de uma ordem L = K evita a necessidade de um procedimento de distinção. De qualquer forma, o método WTLS-DOA Modificado apresenta vantagem sobre o método MODE por permitir o aumento da ordem de forma natural.

Quanto à implementação da solução, podemos notar que uma primeira estimativa para a matriz **B** é necessária em ambos os métodos. No MODE tal estimativa é obtida através da solução do problema de minimização em (28), enquanto que no WTLS-DOA Modificado, através do algoritmo WTLS, toma-se um valor inicial predeterminado. Esse é um dos motivos pelo qual o método MODE apresenta a vantagem de não exigir iterações. Para compensar essa desvantagem do método WTLS-DOA, podemos naturalmente implementar uma melhor inicialização para esse método no intuito de evitar as iterações previstas.

O método MODE, por sua vez, mostra maior flexibilidade quanto à escolha da matriz de ponderações **W**, considerando a forma genérica. Com $\mathbf{W} = \hat{\sum}_s$ em (28) teremos a equivalência com (23). Para $\mathbf{W} = \mathbf{W}_o$ devemos esperar estimativas mais próximas dos valores ótimos para o método MODE. Tal escolha adequada também contribui para a convergência do procedimento de solução no método MODE. Da mesma forma que no caso da estimativa inicial para **B**, tal estimativa ótima também pode ser utilizada junto ao procedimento de solução WTLS, levando a melhoria nas estimativas ou até a eliminação das iterações previstas para esse método.

O método MODE deve, portanto, apresentar desempenho equivalente ao método WTLS-DOA Modificado para L = K. Para L > K, podemos esperar que o método WTLS-DOA Modificado apresente melhores resultados que o do MODE. A confirmação dessas expectativas está sob investigação através de simulação computacional.

7. CONCLUSÕES

A necessidade de alta resolução nas aplicações atuais de estimação do parâmetro DOA exigem métodos com capacidade de estimar parâmetros próximos entre si, mesmo em baixas relações sinal-ruído. O critério da maxima-verossimilhança (ML), apesar de exibir alta resolução, apresenta esforço computacional proibitivo. Os métodos mais recentes baseados no ML, como o método MODE, procuram ser computacionalmente viáveis sem contudo comprometer o desempenho apresentado pelo método ML.

Por sua vez, os métodos de estimação baseados na predição linear, como o FBLP e WTLS-LP, podem ser descritos como uma alternativa, de baixo esforço computacional, ao uso do critério ML para aplicações em séries temporais. A grande desvantagem de tal abordagem, com relação ao uso do critério ML, consiste na perda de desempenho em baixas relações sinal-ruído, sobretudo para sinais correlacionados. Além disso, apresentam dificuldade na implementação para o caso de múltiplos experimentos, como nos problemas de estimação DOA.

No intuito de fazer frente aos métodos baseados no ML voltado para a estimação do parâmetro DOA, apresentamos o método WTLS-DOA, e seu algoritmo iterativo, como uma extensão do método WTLS-LP para aplicações com múltiplos experimentos.

Através da utilização da versão decomposta em subespaços da matriz de correlação das amostras do sinal e da distinção entre os subespaços de sinal e ruído associados a essa matriz, foi possível propor uma versão modificada para o método WTLS-DOA. Esta versão consiste na utilização apenas do subespaço de sinal na composição da matriz de correlação estimada. Tal modificação apresentara melhorias em relação ao método original desde que os subespaços sejam corretamente estimados.

Devido à semelhança entre os problemas de otimização envolvidos no método WTLS-DOA Modificado e no método MODE, por conseqüência da reparametrização e do uso de subespaços, foi possível relacionar os dois métodos.

Através da relação entre os dois métodos constatamos a equivalência entre os dois problemas de minimização para o caso particular em que a ordem do preditor, utilizado no método WTLS-DOA Modificado, é limitada ao número de parâmetros desconhecidos (L = K). Quanto à implementação da solução, a equivalência se dá através do uso das estimativas intermediárias existentes na solução MODE, pela solução iterativa do método WTLS-DOA.

Concluímos, então, que apesar de possuírem origens e hipóteses distintas para as suas concepções, o método MODE baseado no ML e o método WTLS-DOA Modificado baseado na predição linear foram aqui interpretados como a busca das estimativas que minimizam funções custos equivalentes. Dessa forma, eliminamos a desvantagem quanto ao desempenho da abordagem da predição linear com relação ao critério ML. Além disso, por apresentar uma precisão assintótica equivalente ao método MODE, sem a limitação quanto à ordem da reparametrização, o método WTLS-DOA Modificado, aqui proposto, torna-se um forte candidato a melhor método para estimação do parâmetro DOA através de arranjo de sensores lineares e uniformes.

8. REFERÊNCIAS

[1] L. C. Godara, “Applications of Antenna Arrays to Mobile Communications”, Part I and Part II," *Proc. of the IEEE*, Vol. 85, No. 7, Jul. 1997.

[2] H. Krim and M. Viberg, "Two Decades of Array Signal Processing Research: The Parametric Approach," *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 13, No. 4, Jul. 1996.

[3] P. Stoica and K. C. Sharman, "Maximum Likelihood Methods for Direction of Arrival Estimation," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and S. P.*, Vol. 38, No. 7, Jul. 1990.

[4] Y. Bresler and A. Macovski, "Exact Maximum Likelihood Parameter Estimation of Superimposed Exponential Signals in Noise," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and S. P.*, Vol. 34, Out. 1986.

[5] P. Stoica and K. Sharman, " A Novel Eigenanalysis Method for Direction Estimation," *Proc. of IEE, Part. F*, Fev. 1990.

[6] D. W. Tufts and R. Kumaresan, "Estimation of Frequencies of Multiple Sinusoids: Making Linear Prediction Perform Like Maximum Likelihood" *Proc. of the IEEE*, Vol. 70, No. 9, Set. 1982.

[7] Y. Hua and T. K. Sarkar, "On the Total Least Squares Linear Prediction Method for Frequency Estimation", *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and S. P.*, Vol. 38, Dez. 1990.

[8] G. H. Golub and C. F. VanLoan, Matrix Computation, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD., 2a. ed., 1989.