

ANÁLISE DE MÉTODOS PARA DOA EM FUNÇÃO DE RESTRIÇÕES DE OTIMIZAÇÃO

Carlos A. Alves¹, Ricardo F. Colares² e Amauri Lopes²

¹ - Departamento de Engenharia Elétrica – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP
Caixa Postal 31, CEP: 15.385-000, Ilha Solteira SP – Brasil
TI/Fax: (18) 762-2125; caa@dee.feis.unesp.br

² – Departamento de Comunicações - FEEC - UNICAMP
Caixa Postal 6101, CEP: 13.083-970, Campinas SP – Brasil
Tel: (19) 788-3703; {ricardo, amauri}@decom.fee.unicamp.br

SUMÁRIO

Apresenta-se neste trabalho dois importantes métodos de estimação de DOA de alta resolução: IQML e MODE. Verifica-se através de simulações que, sob certas circunstâncias, estes métodos apresentam desempenhos degradados quando otimizados via restrições lineares, devido a problemas numéricos.

Propõe-se um novo tipo de restrição linear que não apresenta esta deficiência, adequada à estimação quando o número de sinais presentes é par; verifica-se adicionalmente que esta nova restrição apresenta melhores resultados que a otimização via restrição de norma.

1. INTRODUÇÃO

A estimação de frequência é um tema de relevância em Processamento de Sinais, apresentando grande diversidade de aplicações em problemas de análise espectral, modelagem e identificação de sistemas, radar, sonar, etc. [1]. Uma das utilizações mais conhecida da estimação de frequência é a determinação do ângulo de incidência de ondas planas de banda estreita em sistemas de radar e sonar usando arranjo de sensores, conhecido como problema DOA (*Direction Of Arrival*); as frequências estimadas estão relacionadas aos ângulos de incidência por uma relação simples [2]; assume-se neste trabalho indistintamente o termo DOA e estimação de frequência. A telefonia móvel se constitui em uma outra área extremamente promissora para utilização dos métodos DOA com arranjo de sensores devido à existência de vários usuários e múltiplos caminhos de propagação [1].

Dois métodos de estimação DOA destacam-se na literatura: IQML [3] e [4] e MODE [5] e [6]. Estes métodos realizam a estimação das frequências contidas num conjunto de dados através de um procedimento alternativo à estimação de Máxima Verossimilhança ou ML (*Maximum Likelihood*), com carga computacional factível e bons desempenhos. Nestes métodos obtém-se como resultado final, um vetor de coeficientes de um polinômio cujas raízes fornecem as frequências estimadas.

Uma função custo é obtida para cada método, as quais devem ser minimizadas em relação a um vetor de coeficientes, com restrições de não trivialidade e quanto ao tipo de sinal; apresentam, porém, a mesma forma geral (função quadrática), podendo ser resolvida utilizando as mesmas técnicas. Dois tipos de restrições de não trivialidade são usualmente empregadas para

estas minimizações: restrição linear e restrição de norma. Mostrou-se experimentalmente em [7] que a restrição linear provoca problemas numéricos sob determinadas combinações de frequências dos sinais, enquanto que a restrição de norma permite atingir um bom desempenho.

Apresentamos neste artigo um outro tipo de restrição linear que não apresenta os problemas numéricos destacados anteriormente e que supera em alguns dBs o limiar de estimação dos métodos IQML e MODE resolvidos via restrição de norma.

As análises numéricas e as simulações dos métodos de estimação DOA devem ser baseadas no modelo estocástico de sinal, ou seja, na presença de mais de um *'snapshot'* [5] e algumas condições envolvendo as amplitudes e as fases dos sinais. O *snapshot* em um arranjo de M sensores representa um conjunto de M dados, captados nos sensores num dado instante. Um conjunto de N *snapshots* é obtido realizando aquisições de N vetores de dados no arranjo, uniformemente espaçados no tempo. Para a análise de apenas um *snapshot* utiliza-se o modelo determinístico de sinal, com frequências e fases constantes.

O artigo está dividido da seguinte forma: na Seção 2 são descritos os modelos de sinal e de ruído. A Seção 3 apresenta os métodos de estimação MLE, IQML e MODE e as restrições de otimização. A Seção 4 apresenta os resultados numéricos, as superfícies e curvas de desempenho e a análise dos resultados. As conclusões estão na Seção 5.

2. MODELO DE SINAL E RUÍDO

O problema de estimar o ângulo de incidência de K ondas planas de banda estreita incidindo em um arranjo de M sensores, posicionados linearmente e com interespaçamento uniforme, pode ser reduzido ao problema de estimação das frequências $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K]^T$ no seguinte modelo [5] [6]:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \xi(n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

onde

- $\mathbf{y}(n) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ é o vetor de dados (sinal e ruído)

- $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times K}$ é a matriz de transferência das frequências:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_K] \quad (2)$$

com $\mathbf{a}_K \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ dado por:

$$\mathbf{a}_k = \left[1, e^{j\omega_k}, \dots, e^{j(M-1)\omega_k} \right]^T, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (3)$$

- $\mathbf{x}(\mathbf{n}) \in \mathbb{C}^{K \times 1}$ é o vetor do sinal, envolvendo as fases e amplitudes e é dado por

$$\mathbf{x}(\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} a_1(\mathbf{n})e^{j\phi_1(\mathbf{n})} \\ \vdots \\ a_K(\mathbf{n})e^{j\phi_K(\mathbf{n})} \end{bmatrix} \quad (4)$$

- $\xi(\mathbf{n}) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ é o vetor de ruído

- N é o número de 'snapshots'.

Usa-se aqui $(\cdot)^T$ para denotar a transposta, $(\cdot)^H$ para indicar a hermitiana de matrizes e $\hat{\mathbf{\Theta}}$ para a estimativa de $\mathbf{\Theta}$.

O sinal $\mathbf{x}(\mathbf{n})$ e o ruído $\xi(\mathbf{n})$ são processos aleatórios Gaussianos complexos de média zero e independentes, com os seguintes momentos de segunda ordem:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{x}(\mathbf{n})\mathbf{x}^H(\mathbf{l})\} &= \mathbf{P}\delta_{\mathbf{n},\mathbf{l}} & E\{\mathbf{x}(\mathbf{n})\mathbf{x}^T(\mathbf{l})\} &= \mathbf{0} \\ E\{\xi(\mathbf{n})\xi^H(\mathbf{l})\} &= \sigma^2\mathbf{I}\delta_{\mathbf{n},\mathbf{l}} & E\{\xi(\mathbf{n})\xi^T(\mathbf{l})\} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5)$$

onde $E\{\cdot\}$ é a esperança estatística, σ^2 é a potência do ruído, $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{K \times K}$ é a matriz de correlação dos sinais, $\mathbf{I} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ é a matriz identidade e $\delta_{\mathbf{n},\mathbf{l}}$ é o operador delta de Kronecker.

A matriz de correlação dos dados é definida por [5]:

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{y}(\mathbf{n})\mathbf{y}^H(\mathbf{n})\} \quad (6)$$

A matriz \mathbf{R} pode ainda ser decomposta como a seguir, considerando que sinal e ruído são independentes:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (7)$$

onde $\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H$ é composta pelo sinal e $\sigma^2\mathbf{I}$ é composta pelo ruído. Para sinais contaminados por ruído e N snapshots, deve-se obter a matriz de correlação estimada $\hat{\mathbf{R}}$, dada por:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{n}=0}^{N-1} \mathbf{y}(\mathbf{n})\mathbf{y}^H(\mathbf{n}) \in \mathbb{C}^{M \times M}. \quad (8)$$

A relação sinal-ruído (SNR) é definida como:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left[\frac{\text{variância(sinal)}}{\text{variância(ruído)}} \right] \quad [\text{dB}] \quad (9)$$

3. MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DOA

São apresentados nesta seção dois dos principais métodos de estimação DOA, o IQML e o MODE.

3.1 – Máxima Verossimilhança e o Método IQML

A estimativa ML das frequências de um sinal composto de múltiplas exponenciais é obtida minimizando-se a seguinte função custo [5]:

$$F_1 = \text{tr}\{\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}\} \quad (10)$$

onde $\text{tr}\{\mathbf{X}\}$ é o traço de \mathbf{X} e \mathbf{P}_A^\perp é um operador que projeta um vetor no espaço ortogonal ao das colunas de \mathbf{A} , dado por:

$$\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I}_{(M \times M)} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H \quad (11)$$

A minimização de (10) necessita adicionalmente de restrições de não trivialidade e do tipo de sinal; estas restrições, porém são analisadas após a sua reparametrização. Verifica-se que (10) é não linear em relação às frequências desconhecidas, exigindo uma busca sobre um espaço K -dimensional, o que representa um esforço computacional proibitivo. O algoritmo ou método IQML (*Iterative Quadratic Maximum Likelihood*) contorna o problema da busca multidimensional através de um procedimento iterativo, porém sem garantia de convergência para um mínimo global; apesar deste problema, seu desempenho em simulações tem apresentado bons resultados [2].

Para diminuir o esforço computacional, a função custo F_1 é reparametrizada em termos de outro vetor de parâmetros $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_K]^T$, onde $\{b_k\}$ são os coeficientes do seguinte polinômio [5]:

$$p(z) = b_0 z^K + b_1 z^{K-1} + \dots + b_K = b_0 \prod_{k=1}^K (z - e^{j\omega_k}) \quad (12)$$

cujos zeros se situam sobre a CRU.

O tipo de sinal tratado neste artigo, exponenciais complexas não amortecidas [8], impõem restrição de simetria conjugada no vetor de coeficientes \mathbf{b} , e pode-se definir a matriz de coeficientes \mathbf{B} dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_K & \cdots & b_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_K \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times (M-K)} \quad (13)$$

Verifica-se que $\mathbf{B}^H\mathbf{A} = \mathbf{0}$, ou seja, as colunas de \mathbf{A} são ortogonais às colunas de \mathbf{B} . O operador $\mathbf{B}(\mathbf{B}^H\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^H$ projeta um vetor sobre o espaço das colunas de \mathbf{B} e $\mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$, sobre o espaço das colunas de \mathbf{A} ; portanto, a soma destes projetores produz a matriz identidade [8]:

$$\mathbf{B}(\mathbf{B}^H\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^H = \mathbf{I}_{(M \times M)} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H \quad (14)$$

Substituindo este resultado em (10), tem-se que minimizar F_1 é equivalente a minimizar F_2 dado por:

$$F_2 = \text{tr}\{\mathbf{B}(\mathbf{B}^H\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^H \hat{\mathbf{R}}\}. \quad (15)$$

A restrição de simetria conjugada pode ser incorporada na expressão a ser minimizada reparametrizando F_2 por meio de um vetor $\beta \in \mathbb{R}^{(K+1) \times 1}$, satisfazendo:

$$\mathbf{b} = \mathbf{W}\beta, \quad (16)$$

com $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{(K+1) \times (K+1)}$ denotando a matriz construída de 0,1 e $\pm j$ e que transforma o vetor de valores reais β no vetor \mathbf{b} , de

valores complexos com simetria complexa conjugada. Para K par, $\boldsymbol{\beta}$ tem as primeiras $K/2$ linhas formadas pela parte real de \mathbf{b} e as $K/2$ últimas linhas pela parte imaginária de \mathbf{b} ; a linha $K/2+1$ tem valor real. Para K ímpar, a estrutura anterior é modificada para $(K+1)/2$ elementos e não há elemento real. Para evitar a solução trivial, deve-se impor algum tipo de restrição sobre o vetor \mathbf{b} ou $\boldsymbol{\beta}$, tratado no item 3.1.1 adiante.

O método IQML minimiza F_2 estimando um vetor $\boldsymbol{\beta}$ através da seguinte expressão iterativa:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{r+1} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} \text{tr}[\mathbf{B}(\hat{\mathbf{B}}_r^H \hat{\mathbf{B}}_r)^{-1} \mathbf{B}^H \hat{\mathbf{R}}], \quad (17)$$

onde r é o índice da iteração e ‘arg’ é o valor de $\boldsymbol{\beta}$ que faz F_2 ter valor mínimo. Considerando a expressão (9) é possível mostrar que a expressão (17) pode ser reescrita como [5]:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{r+1} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\beta}^T \tilde{\mathbf{C}}_y^r \boldsymbol{\beta} \quad (18)$$

onde $\tilde{\mathbf{C}}_y^r \in \mathbb{R}^{(K+1) \times (K+1)}$ é uma matriz resultante do produto de \mathbf{B} , o vetor de dados $\mathbf{y}(n)$ e \mathbf{W} .

O algoritmo do método IQML é sumarizado a seguir [5]:

Passo 1) Inicialize $r = 0$, faça $(\hat{\mathbf{B}}_0^H \hat{\mathbf{B}}_0) = \mathbf{I}$;

Passo 2) Determine $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{r+1}$ da expressão (18),

Passo 3) Verifique a convergência; considera-se que o algoritmo convergiu quando $\|\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(r+1)} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(r)}\| \leq \varepsilon$, onde ε é uma precisão preestabelecida; caso a precisão não seja atingida, incremente r , recalcule $\hat{\mathbf{B}}_r$ da estimativa $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{r+1}$ obtida no passo anterior e retorne ao passo 2.

Passo 4) A estimativa $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ final é obtida após o passo 3 ter convergido. Obtém-se a estimativa $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ calculando-se os zeros do polinômio $p(z)$ em (12) e \mathbf{b} na expressão (16).

3.1.1 – As Restrições do Vetor de Coeficientes

O IQML busca a minimização de (18) com restrição de não trivialidade de dois tipos: linear e de norma. As expressões são apresentadas a seguir para o caso de $K=2$; a expressão genérica é apresentada em [10].

Restrições Lineares

Esta restrição apresenta três possíveis alternativas, deduzidas de forma semelhante às expressões seguintes [5].

Achar $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^{3 \times 1}$, com $\beta_0 = \text{real}(b_0) = 1$, tal que $\Phi(\boldsymbol{\beta})$ tenha valor mínimo, onde:

$$\Phi(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\beta} \quad (19)$$

com $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Considere as partições de $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\boldsymbol{\Theta}_{21} = \begin{bmatrix} \Omega_{21} \\ \Omega_{31} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \text{ e } \boldsymbol{\Theta}_{22} = \begin{bmatrix} \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (20)$$

e o vetor solução $\boldsymbol{\beta}$ tendo a forma:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{\eta}^T \end{bmatrix}^T \quad (21)$$

e $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$. Substituindo (20) e (21) em (19), obtém-se:

$$\Phi(\boldsymbol{\beta}) = \Omega_{11} + \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\Theta}_{21} + \boldsymbol{\Theta}_{21}^T \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\Theta}_{22} \boldsymbol{\eta} \quad (22)$$

Derivando (22) em relação à $\boldsymbol{\eta}$, obtém-se que o ponto de mínimo de $\Phi(\boldsymbol{\beta})$ é atingido quando [5]:

$$\boldsymbol{\eta} = -\boldsymbol{\Theta}_{22}^{-1} \boldsymbol{\Theta}_{21} \quad (23)$$

supondo que $\boldsymbol{\Theta}_{22}$ é não singular. Esta restrição é denominada aqui de RLR (Restrição Linear Real) e o método IQML resolvido sob esta restrição será tratado como IQML_{RLR}.

Outra restrição linear equivalente à RLR considera o elemento $\beta_2 = \text{imag}(b_0) = 1$. Fazendo-se considerações equivalentes à restrição anterior, a minimização da expressão (19) resulta em [5]:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & \vartheta^T \end{bmatrix}^T \text{ com } \vartheta = -\boldsymbol{\Theta}_{22}^{-1} \boldsymbol{\Theta}_{21} \quad (24)$$

onde $\vartheta \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ e

$$\boldsymbol{\Theta}_{21} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} \\ \Omega_{21} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \text{ e } \boldsymbol{\Theta}_{22} = \begin{bmatrix} \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{22} & \Omega_{23} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (25)$$

Esta restrição é denominada aqui como RLI (Restrição Linear Imaginária).

A expressão (24) indica valor unitário de β_0 (em vez de β_2), devido à utilização da mesma estrutura matricial de RLR, diferindo na escolha dos elementos da matriz $\boldsymbol{\Omega}$; para a RLR descarta-se a primeira linha de $\boldsymbol{\Omega}$, enquanto que para a RLI descarta-se a última linha.

As restrições RLR e RLI apresentam problemas numéricos no resultado da otimização de (19). Para investigar a causa destes problemas, considere o vetor de coeficientes \mathbf{b} obtido da decomposição do polinômio $p(z)$ da expressão (12), para $K=2$ e as frequências angulares normalizadas entre 0 e 2π .

$$p(z) = b_0 \prod_{i=1}^2 (z - e^{j\omega_i}) = b_0 [z^2 - (e^{j\omega_2} + e^{j\omega_1})z + e^{j(\Phi)}] \quad (26)$$

onde $\Phi = \omega_1 + \omega_2 = 2\pi(f_1 + f_2)$.

Para haver simetria, assume-se b_0 dado por [6]

$$b_0 = e^{j\left(\frac{2\pi-\Phi}{2}\right)} = e^{j\pi} e^{-j\frac{\Phi}{2}} = -e^{-j\frac{\Phi}{2}} = b_2^*$$

e, de (26) obtém-se:

$$b_0 = -\cos[\pi(f_1 + f_2)] + j \text{sen}[\pi(f_1 + f_2)] \quad (27)$$

$$b_1 = 2 \cos[\pi(f_1 - f_2)] \quad (28)$$

Deste modo, conforme (27), a restrição RLR depende do cosseno da soma das frequências que apresenta valor zero quando $\sum f_i = (2L+1)/2$ [9], L inteiro; RLI depende do seno da soma das frequências e apresentará valor zero para $\sum f_i = L$. Ao se realizar a normalização pelos valores $\text{real}(b_0)$ ou $\text{imag}(b_0)$ quando as somas das frequências estão próximas dos valores indicados acima, um erro numérico é inserido afetando todos os cálculos posteriores e degradando as estimativas das frequências. Na presença de ruído aditivo, este problema é ampliado para a região vizinha. Em [6], sugere-se que se use uma das duas normalizações, pois ambas não podem ser simultaneamente zero. O teste de escolha da restrição apropriada, porém, falha experimentalmente [9].

Propomos um terceiro tipo de restrição linear, denominada aqui RLC, de **Restrição Linear Central** e que é obtida impondo-se $b_1 = \beta_1 = 1$; para K par, este elemento é real. A minimização da expressão (19) sujeita à esta restrição, resulta:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{\chi}^T \end{bmatrix}^T \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\chi} = -\boldsymbol{\Theta}_{22}^{-1} \boldsymbol{\Theta}_{21} \quad (29)$$

onde $\boldsymbol{\chi} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ e

$$\boldsymbol{\Theta}_{21} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} \\ \Omega_{31} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Theta}_{22} = \begin{bmatrix} \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (30)$$

e é realizada descartando-se a linha central de $\boldsymbol{\Omega}$. Este tipo de restrição não havia sido explicitada anteriormente.

Retornado à expressão (28) verifica-se que para K par, β_1 é real e depende do cosseno da diferença das frequências; aproxima-se portanto, do valor unitário para a situação de frequências muito próximas (alta resolução). Por outro lado, no caso em que a **diferença das frequências** for próxima de $(2L+1)/2$, também apresentará problemas numéricos na normalização. A RLC pode ser colocada como uma técnica de minimização importante, a despeito dessas duas limitações, pois em estimação de frequências, o número de sinais é suposto conhecido e na situação de haver grande diferença entre as frequências, a estimação pode ser realizada com métodos mais simples pois não é um problema de alta resolução.

Restrição de Norma

A minimização de (19) sob a restrição de norma é obtida impondo-se que a norma de $\boldsymbol{\beta}$ seja unitária. Isto equivale à derivar $\Phi(\boldsymbol{\beta})$, igualar a zero e obter o vetor $\boldsymbol{\beta}$ de norma unitária que forneça o mínimo valor. O critério TLS [8] obtém a solução desta expressão utilizando a decomposição em valores singulares (SVD – singular value decomposition) de $\boldsymbol{\Omega}$; a norma quadrática mínima de (19) é obtida quando $\boldsymbol{\beta}$ corresponde ao vetor singular à direita associado ao menor valor singular de $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{V}_{(:, K+1)}$$

onde $\mathbf{V}_{(:, K+1)}$ é a última coluna da matriz de vetores singulares unitários à direita; esta restrição será tratada aqui como RSVD. Resultado semelhante é obtido caso se utilize a decomposição em

autovalores (EVD eigenvalue decomposition) de $\boldsymbol{\Omega}$; a escolha da decomposição a ser usada é decidida sob o ponto de vista computacional: a SVD exige menor esforço computacional e apresenta melhor precisão numérica que a EVD. A resolução de (19) via RSVD foi apresentada em [8] apenas como uma alternativa para que o IQML convergisse. A solução via EVD foi apresentada em [9] como uma alternativa às restrições lineares, em vista seu desempenho dependente das frequências, apontados anteriormente.

As soluções da função quadrática sob restrições lineares ou de norma foram desenvolvidas baseadas no IQML; porém, como o método MODE também exige a minimização de uma expressão semelhante a (19), pode-se utilizar tais restrições neste método.

3.2 - MODE

O MODE (*Method Of Direction Estimation*) [5], [6] é um estimador derivado do MLE, semelhante ao IQML. Entretanto, utiliza restrição de subespaço na decomposição da matriz de correlação de dados e atenuação da estimativa de ruído; difere ainda do IQML por não ser iterativo.

A característica importante do MODE é que, assintoticamente (N elevado) apresenta melhores níveis de desempenho que o IQML. Em altas SNR seus desempenhos são equivalentes. Sob sinais coerentes ambos apresentam bom desempenho.

O MODE estima ω usando $\hat{\mathbf{S}}$ e $\hat{\Lambda}$ como dados de entrada, onde as colunas de $\hat{\mathbf{S}} \in \mathbb{C}^{M \times \bar{K}}$ são os autovetores de $\hat{\mathbf{R}}$ que correspondem aos \bar{K} maiores autovalores de $\hat{\mathbf{R}}$, $\hat{\Lambda} \in \mathbb{C}^{\bar{K} \times \bar{K}}$ é uma matriz diagonal dos \bar{K} maiores autovalores de $\hat{\mathbf{R}}$ corrigidos e $\bar{K} = \min\{K, \text{posto}(\mathbf{P})\}$.

A expressão do MODE a ser minimizada é [5]:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} \{ \text{tr}[(\hat{\mathbf{S}}^H \mathbf{B})(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})^{-1} (\mathbf{B}^H \hat{\mathbf{S}}) \hat{\Lambda}] \} \quad (31)$$

que, após algumas manipulações [5], pode ser transformada em:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} \{ \boldsymbol{\beta}^H \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_k \boldsymbol{\beta} \} \quad (32)$$

onde $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_k \in \mathbb{R}^{(K+1) \times (K+1)}$ é uma matriz resultante do produto de \mathbf{B} ,

$\hat{\mathbf{S}}$ e $\hat{\Lambda}$. O algoritmo MODE apresenta os passos [5]:

Passo 1) Calcule $\hat{\mathbf{R}}$ e seus \bar{K} autovalores dominantes e os correspondentes autovetores;

Passo 2) Determine uma estimativa inicial $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$ considerando $(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{I}$ em (31);

Passo 3) Determine uma estimativa eficiente de $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ em (31), com $(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})$ formada por $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$ obtida no passo 2.

Passo 4) Obtenha a estimativa de frequência $\hat{\omega}$ calculando os zeros do polinômio $p(z)$, com seus coeficientes formados por $\hat{\mathbf{b}}$

obtido de $\hat{\beta}$ no passo 3.

É conveniente, em algumas situações, repetir o Passo 3 algumas vezes, visando melhorar as estimativas, porém valores acima de cinco são irrelevantes [5].

Observa-se que as expressões (19) e (32) têm a mesma forma quadrática e, portanto os passos 2 e 3 do MODE podem ser resolvidos utilizando as restrições lineares RLR, RLI e RLC ou a restrição de norma, baseada na SVD ou EVD.

4. SIMULAÇÕES E RESULTADOS

São apresentados nesta seção as simulações e os resultados gráficos dos métodos IQML e MODE sob RLC e RSVD. As restrições RLR e RLI já foram abordadas experimentalmente em [7] onde se apresentou superfícies de desempenho em função da SNR e da frequência; observou-se que estas superfícies apresentam ‘vales’ nas frequências vizinhas daquelas indicadas no item 3.1.1, para cada tipo de restrição, indicando portanto, que estas restrições são inadequadas à estimação.

Para realizar as simulações das duas outras restrições desenvolveu-se um programa em ambiente MATLAB® V5.3, para PC's bastante completo e versátil. Este programa permite simular os métodos tendo como variáveis o número de sensores e de *snapshots*, as frequências, a coerência ou as fases dos sinais, etc. Nas simulações, o IQML foi limitado a no máximo 50 iterações e a precisão estabelecida para a convergência, $\epsilon = 10^{-3}$. No MODE reiterou-se cinco vezes o Passo 3, para refinar as estimativas.

Para cada ponto calculado obtém-se os valores das variâncias das estimativas (*var*) das frequências angulares ω_1 e ω_2 e adota-se a que apresenta maior variância. Utiliza-se aqui o log do inverso desse valor, tratado aqui como Desempenho, ou seja, $\text{Desempenho} = 10 \log_{10}(1/\text{var})$; cada estimativa é gerada sobre 100 realizações independentes. Utilizou-se um sinal composto de duas exponenciais com frequências espaçadas de 0.04π e $M=25$ amostras [4]. Realizou-se dois tipos de comparação: superfícies de varredura em frequência e desempenhos assintóticos.

Superfícies de Varredura em Frequência

Estas simulações tem por objetivo verificar se a restrição de otimização aplicada ao método apresenta limiar de estimação dependente das frequências dos sinais; é realizada obtendo-se a variância da estimativa das frequências em um faixa determinada de SNR para cada método, com $N=1$. Nesta simulação utilizou-se ω_1 variando de 0.1π a 1.6π rad/s, com ω_2 0.04π rad/s acima de ω_1 e a SNR variando de 0 a 15 dB. Para cada par de curvas de desempenho obtidas, considera-se apenas aquela que apresenta limiar de estimação mais elevado, ou, quando iguais, a que apresenta menor valor médio em função da SNR; as curvas porém, são sempre representadas em função de ω_1 para evitar confusão.

As figuras seguintes mostram parte da superfície de desempenho obtida para cada restrição sobre o IQML com ω_1 variando de 0.1π a π rad/s.

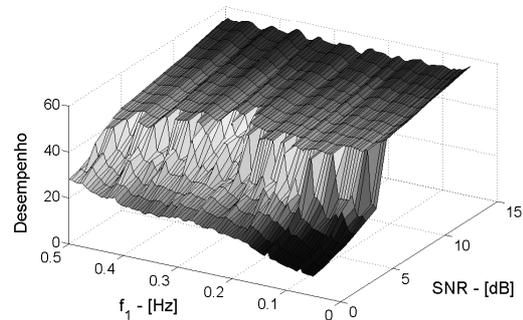


Figura 1) Superfície de Desempenho IQML_{RLC}

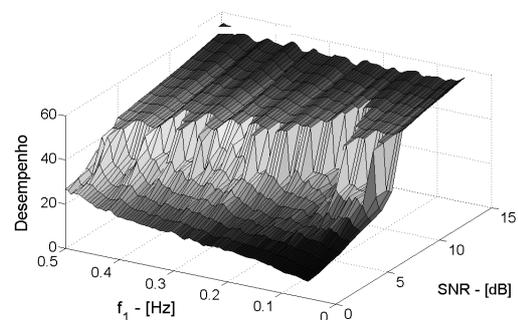


Figura 2) Superfície de Desempenho IQML_{RSVD}

Visualmente, a RLC apresenta menores limiares de estimação (maior desempenho em menor SNR), além de ter um comportamento mais homogêneo em relação à RSVD.

Para destacar quantitativamente a diferença entre os desempenhos do IQML_{RLC} e IQML_{RSVD}, novas curvas foram calculadas, subtraindo-se ponto a ponto aquelas superfícies. Tais curvas estão mostradas na figura 3 em função da SNR; valores positivos indicam superioridade do IQML_{RLC} e valores negativos, melhor desempenho do IQML_{RSVD}.

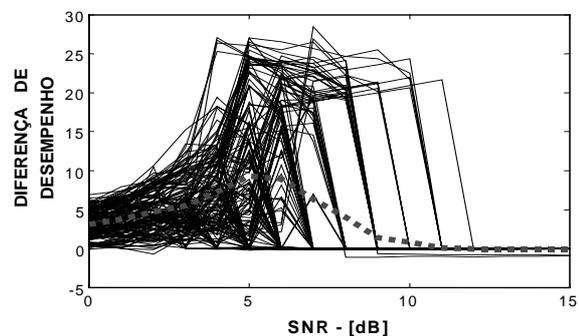


Figura 3) Diferença entre as Curvas de Desempenho IQML_{RLC} e IQML_{RSVD} - $0.1\pi \leq \omega_1 \leq 1.6\pi$

Nesta última figura, a curva pontilhada indica o valor médio da diferença e mostra a superioridade da RLC sobre a RSVD.

Esta superioridade implica em melhores níveis de limiar de estimação e atinge seu máximo em torno da SNR de 5 dB; em uma das curvas esta melhoria se estende até a SNR de 12 dBs. Atingido o limiar, apenas duas das curvas de desempenho do IQML_{RSVD} apresentam melhor resultado que o IQML_{RLC}, provavelmente por falha do critério de seleção da curva de desempenho em relação a ω_1 ou ω_2 .

Desempenhos Assintóticos

Nestas simulações as duas restrições de otimização do IQML são analisadas para um par de frequências fixas em $\omega_1 = \pi$ e $\omega_2 = 1.04\pi$ rad/s, SNR variando de -10 a 30 dB e sob diferentes valores de N (1, 10, 100 e 1000); utilizou-se $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ (sinais descorrelacionados). O desempenho em função de N e da SNR são apresentados na figura 4.

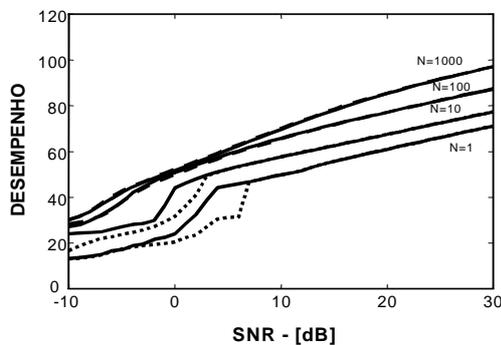


Figura 4) Gráficos de Desempenho Assintótico – IQML_{RLC}(-) e IQML_{RSVD}(..).

Verifica-se na Figura 4 que para N pequeno (≤ 10) o IQML_{RLC} apresenta desempenho superior ao IQML_{RSVD}; para N grande (≥ 100), o desempenho de ambos é semelhante. Outro caso de interesse é a comparação de desempenho assintótico entre o MODE e o IQML. Apresenta-se na figura seguinte o desempenho destes dois métodos sob a restrição RLC.

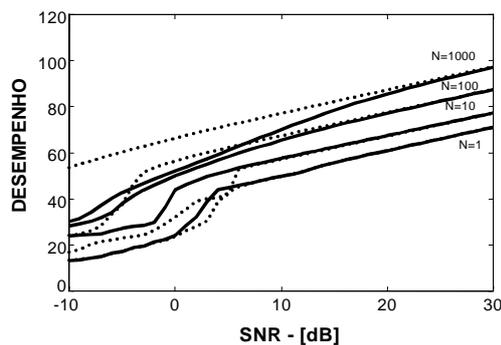


Figura 5) Gráficos de Desempenho Assintótico – IQML_{RLC}(-) e MODE_{RLC}(..) - P = I

Observa-se na Figura 5 que para N pequeno (≤ 10) o desempenho do IQML_{RLC} é superior ao do MODE_{RLC} enquanto em N grande (≥ 100) o desempenho do MODE é melhor.

Para altas SNR (> 25 dB) o desempenho de ambos os métodos são semelhantes. Resultados de simulação (não mostrados) indicam que as conclusões continuam válidas até para sinais com correlação de 0.99.

5. CONCLUSÕES

Mostrou-se neste artigo um tipo de restrição linear, RLC, que pode ser aplicada à minimização quadrática exigida pelos métodos IQML e MODE e que não apresenta os problemas numéricos de outras restrições lineares. Esta restrição pode ser utilizada somente quando o número de sinais presentes for par e o espaçamento entre os sinais seja pequeno (alta resolução).

As simulações demonstraram a superioridade desta restrição quando comparada à restrição de norma, considerada até então como aquela que apresentava os melhores resultados para esta minimização; a restrição de norma apresenta a grande vantagem de poder ser utilizada qualquer que seja o número de sinais presentes. Adicionalmente verificou-se que o desempenho do MODE supera o do IQML sob a mesma restrição, para N grande e baixa SNR. Para N pequeno (> 10) o IQML apresenta melhor desempenho, enquanto que para alta SNR, sob qualquer N, o desempenho dos dois métodos se igualam.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - Krim, H. e Viberg, M., "Two Decades of Array Signal Processing Research", *IEEE Signal Processing Magazine*, Julho de 1996.
- [2] - Haykin, S. "Array Signal Processing", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985
- [3] - Kumaresan, R., Scharf, L. L. e Shaw, A. K., "An Algorithm for pole-zero modeling and spectral analysis", *IEEE Trans. on Audio, Speech and Signal Processing*, vol. 34, Junho de 1986.
- [4] - Bresler, Y. e Macovski, A., "Exact Maximum Likelihood Parameter Estimation of Superimposed Exponential Signals in Noise", *IEEE Trans. on Audio, Speech and Signal Processing*, vol. 34, no. 5, Outubro de 1986.
- [5] - Li, J., Stoica, P. and Liu, Z., "Comparative Study of IQML and MODE Direction-of-Arrival Estimators", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 46, no. 1, Janeiro de 1998.
- [6] - Stoica, P. e Sharman K. C., "Novel Eigenanalysis Method for Direction Estimation", *IEE Proceedings*, vol.137, Pt. F, no.1, Fevereiro de 1990.
- [7] - Alves, C. A. e Lopes, A., "Métodos de Estimação DOA Baseados no Critério TLS", *Anais do SBT 99*, Vila Velha - ES-Brasil, Setembro de 1999.
- [8] - Lemos, R. P., "Mínimos Quadrados Totais e Máxima Verossimilhança em Estimação de Frequências", *Tese de Doutorado*, FEEC-UNICAMP, Junho de 1997.
- [9] - Nagesha V. e Kay, Steven, "On Frequency Estimation with IQML Algorithm", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42, no. 9, Setembro de 1994.
- [10] - Gorokhov, A. e Stoica, P., "Generalized Quadratic Minimization and Blind Multichannel Deconvolution", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 48, no. 1, Janeiro de 2000.