

A TRANSFORMADA ARITMÉTICA DE HARTLEY

H.M. DE OLIVEIRA, R.M. CAMPELLO DE SOUZA, R.J.S. CINTRA E A.N. KAUFFMAN

Grupo de Pesquisa em Comunicações - CODEC
 Departamento de Eletrônica e Sistemas, UFPE
 Caixa Postal 7800, CEP 50711-970, Recife, PE

E-mail: {hmo, ricardo}@npd.ufpe.br, rjsc@proplan.ufpe.br, auffman@nortelnetworks.com

RESUMO

Este trabalho introduz uma nova transformada Aritmética (AT) para avaliar a Transformada Discreta de Hartley (DHT). Desenvolve-se uma teoria geral, baseada na fórmula de inversão de Möbius e funções aritméticas, comum para todas as ATs. Uma transformada aritmética inversa é também proposta. Os mecanismos de interpolação na avaliação de transformadas discretas de Fourier e Hartley (DFT/DHT) são investigados, examinando-se o compromisso entre complexidade e precisão. As interpolações de ordem zero e um são justificadas. As demonstrações e interpolações obtidas são mais simples que na AT original.

1. INTRODUÇÃO

As inúmeras aplicações em tempo real da Transformada Discreta de Fourier (DFT) são bem conhecidas, especialmente após a revolução dos algoritmos rápidos (FFTs) [5]. Desde então, o campo de processamento de sinais teve várias contribuições importantes ligadas às transformadas discretas. Uma DFT para corpos finitos (FFFT) foi introduzida por Pollard [11] e aplicada como uma ferramenta para avaliar convoluções discretas. Uma transformada muito interessante e similar a DFT é a Transformada Discreta de Hartley (DHT) [2], a versão discreta da transformada contínua simétrica introduzida por R.V.L. Hartley em 1942 [6]. Sem mencionar suas características do ponto de vista numérico, a DHT provou ao longo dos anos ser um ferramenta importante com várias aplicações [3]. Uma transformada de Hartley em Corpos Finitos (FFHT) foi recentemente introduzida por Campello *et al.* [14]. Uma seção especial sobre a Transformada de Hartley [8] cita aproximadamente 300 referências.

Embora vista como uma ferramenta que tem conexão com o mundo físico apenas por intermédio da transformada de Fourier, a DHT aparece cada vez mais como um instrumento útil em muitas aplicações. Recentemente, foram encontradas aplicações interessantes para a transformada de Hartley em Corpos Finitos [14] em multiplexação digital, acesso múltiplo e espalhamento espectral [9, 10]. Após Cooley-Tukey, Good-Thomas e muitos outros algoritmos [1], uma nova abordagem foi proposta em 1988 — a Transformada Aritmética de Fourier (AFT) — em que um algoritmo FFT calcula a DFT com um número reduzido de multiplicações [15]. Em verdade, uma AFT de comprimento N apresenta complexidade computacional $\mathcal{O}(N)$.

Embora as restrições da versão inicial da AFT tenham sido removidas [12], ela permaneceu desconhecida para muitos.

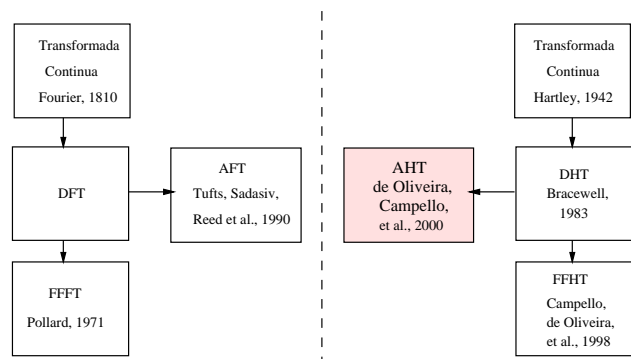


Figura 1: Alguns Desenvolvimentos das Transformadas de Fourier e de Hartley, situando a AHT.

A Figura 1 situa uma nova transformada aritmética, a Transformada Aritmética de Hartley, no contexto das transformadas. Procurando encontrar novos procedimentos para o cálculo da DHT, foi estabelecida uma teoria geral de algoritmos para o cálculo da DFT/DHT, chamados de Transformadas Aritméticas (AT). Neste trabalho, $m|n$ denota m divide n , $[x]$ denota o maior inteiro menor ou igual a x , $[A]$ é uma matriz com elementos $a_{i,j}$ e a cardinalidade de um conjunto T é denotada por $\|T\|$.

2. A TRANSFORMADA ARITMÉTICA DE HARTLEY

Seja \mathbf{v} um vetor N -dimensional com componentes reais. A DHT define um par transformado denotado por

$$\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1}) \leftrightarrow \mathbf{V} = (V_0, V_1, \dots, V_{N-1}), \quad (1)$$

em que os coeficientes do vetor transformado (i.e., o espectro de Hartley) são definidos por

$$V_k \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} v_i \cdot \text{cas} \left(\frac{2\pi ki}{N} \right) \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

onde $\text{cas } t \triangleq \cos t + \text{sen } t$ é o núcleo “cosseno e seno” de Hartley [6].

Um ponto interessante a observar é a relação entre a DHT e a DWT, a Transformada Discreta de Walsh. Uma versão da DHT de comprimento 4 coincide com a transformada de Walsh [7], i.e., $V_k = \frac{1}{4} \{v_0 + v_1 \text{cas}(\frac{k\pi}{2}) + v_2 \text{cas}(k\pi) + v_3 \text{cas}(\frac{3k\pi}{2})\}$.

Lema 1 (Propriedade Fundamental) A função $\text{cas}(\cdot)$ satisfaz

$$\sum_{m=0}^{k-1} \text{cas}(2\pi m \frac{k'}{k}) = \begin{cases} k, & \text{se } k|k', \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3)$$

Prova: Seja $\sum_{m=0}^{k-1} e^{2\pi j m \frac{k'}{k}} = \sum_{m=0}^{k-1} Z^m$, onde $Z \triangleq e^{2\pi j \frac{k'}{k}}$. Observe que $\sum_{m=0}^{k-1} Z^m = \begin{cases} k, & \text{se } Z = 1, \\ 0, & \text{se } Z \neq 1 \end{cases}$. Aplicando a identidade de Euler, tem-se que

$$\sum_{m=0}^{k-1} \cos\left(2\pi j m \frac{k'}{k}\right) + j \sum_{m=0}^{k-1} \sin\left(2\pi j m \frac{k'}{k}\right) = \begin{cases} k, & \text{se } k|k', \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Tomando-se a parte real e imaginária, vem que

$$\sum_{m=0}^{k-1} \cos\left(2\pi j m \frac{k'}{k}\right) = \begin{cases} k, & \text{se } k|k', \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

e

$$\sum_{m=0}^{k-1} \sin\left(2\pi j m \frac{k'}{k}\right) = 0.$$

Somando essas duas expressões, finaliza-se a prova. ■

Para construir um algoritmo rápido para calcular a DHT, definem-se as somas parciais S_k do vetor no domínio do tempo \mathbf{v} , como sendo

$$S_k \triangleq \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} v_{m \frac{N}{k}} \quad \forall k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (4)$$

Aplicando a fórmula da Transformada Inversa para $v_{m \frac{N}{k}}$, tem-se:

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{k'=0}^{N-1} V_{k'} \text{cas}\left(\frac{2\pi k' (m \frac{N}{k})}{N}\right) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{k'=0}^{N-1} V_{k'} \sum_{m=0}^{k-1} \text{cas}(2\pi m \frac{k'}{k}). \end{aligned} \quad (5)$$

Do Lema 1 acima, segue que:

$$S_k = \frac{1}{k} \sum_{k'=0}^{N-1} V_{k'} \sum_{m=0}^{k-1} \text{cas}\left(2\pi m \left(\frac{k'}{k}\right)\right) = \sum_{s=0}^{\lfloor (N-1)/k \rfloor} V_{sk}. \quad (6)$$

Para simplificar o desenvolvimento, considere, sem perda de generalidade, um sinal \mathbf{v} com componente DC nula, i.e., $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} v_i = 0$. Observa-se que tal consideração não tem influência sobre os V_k , $k \neq 0$.

Lema 2 Um sinal discreto \mathbf{v} e seu sinal correspondente ac \mathbf{v}' têm o mesmo espectro de Hartley, a menos na frequência nula, ou seja, $V_k' = V_k$ para $k \neq 0$.

Prova: O sinal com componente de nula tem seu espectro dado por

$$V_k' = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (v_i - V_0) \text{cas}\left(\frac{2\pi k i}{N}\right).$$

A demonstração é finalizada observando que

$$\sum_{i=0}^{N-1} \text{cas}\left(\frac{2\pi k i}{N}\right) = 0 \quad \forall k \neq 0.$$

A Transformada Aritmética de Hartley (AHT) pode ser obtida pela fórmula de inversão de Möbius modificada para séries finitas [12].

Teorema 1 (Reed et al.) Se $S_k = \sum_{m=1}^{\lfloor (N-1)/k \rfloor} V_{sk}$, $1 \leq k \leq N-1$, então $V_k = \sum_{l=1}^{\lfloor (N-1)/k \rfloor} \mu(l) S_{kl}$, onde $\mu(\cdot)$ é a função de Möbius. ■

A função de Möbius, $\mu(n)$, é definida por:

$$\mu(n) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ (-1)^r, & \text{se } n = \prod_{i=1}^r p_i, p_i \text{ primos distintos,} \\ 0, & \text{se } p^2 | n \text{ para algum primo } p. \end{cases}$$

Um outra função aritmética relevante é definida abaixo.

Definição 1 A função soma aritmética de Möbius é definida por $M(n) \triangleq \sum_{l=1}^n \mu(l)$. ■

Uma aplicação direta do Teorema 1 em (6), faz os coeficientes de Hartley $\{V_k\}$ de um sinal ac $\{v_i\}$ serem expressos por

$$V_k = \sum_{l=1}^{\lfloor (N-1)/k \rfloor} \mu(l) S_{kl}, \quad (7)$$

onde $S_k = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} v_{m \frac{N}{k}}$.

Considere uma DHT de comprimento $N = 8$. A análise espectral de Hartley através da fórmula de inversão de Möbius resulta em:

$$\begin{aligned} V_1 &= S_1 - S_2 - S_3 - S_5 + S_6 - S_7, \\ V_2 &= S_2 - S_4 - S_6, \\ V_3 &= S_3 - S_6, \\ V_4 &= S_4, \\ V_5 &= S_5, \\ V_6 &= S_6, \\ V_7 &= S_7. \end{aligned}$$

Definição 2 A matriz de Möbius $[M]$ é dada por

$$\mu_{ij} \triangleq \begin{cases} \mu\left(\frac{i}{j}\right), & \text{se } i|j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (8)$$

Por exemplo, a matriz de Möbius de ordem 7 é

$$M_7 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

As componentes espectrais e as somas parciais agora podem se relacionar através da matriz de Möbius: $\mathbf{V}^T = [M] \cdot \mathbf{S}^T$. Visando uma formulação completa para a AT, é possível incluir a componente dc escrevendo-a em termos da soma parcial S_N :

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} v_{\frac{mN}{N}} = V_0 = V_N. \quad (10)$$

Portanto, a relação $\mathbf{V}^T = [M] \cdot \mathbf{S}^T$ pode ser escrita em termos de uma matriz de Möbius estendida:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & & \vdots \\ [M] & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Um ponto marcante é que a AFT clássica fornece equações exatamente idênticas para estimar um espectro com mesmo comprimento (e.g., $N = 8$). Este fato dificulta o entendimento das AT's: qual o espectro que de fato se avalia? A compreensão dos mecanismos das AT's só é possível na próxima seção.

Se o sinal no domínio do tempo tivesse componente dc não nula, tomaria-se o sinal ac correspondente $v'_i = v_i - V_0$, $i = 0, \dots, N-1$, i.e., $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - V_0$. Assim, $S'_k = S_k - V_0$ e a Equação 7 pode ser aplicada, levando a $V'_k = \sum_{l=1}^{\lfloor (N-1)/k \rfloor} \mu(l) S'_{kl}$. Como $V_k = V'_k$, $k = 1, \dots, N-1$ pelo Lema 2, tem-se:

Teorema 2 *As componentes $k = 1, \dots, N-1$ da transformada de Hartley discreta podem ser computadas por*

$$V_k = \sum_{l=1}^{\lfloor (N-1)/k \rfloor} \mu(l) S_{kl} - V_0 M \left(\left\lfloor \frac{N-1}{k} \right\rfloor \right). \quad (12)$$

■

A transformada aritmética inversa de Hartley pode ser obtida de modo similar, definindo-se as somas parciais das componentes espectrais por:

$$\sigma_i \triangleq \frac{1}{i} \sum_{m=0}^{i-1} V_{\frac{mN}{i}} \quad \forall i = 1, \dots, N-1. \quad (13)$$

De modo análogo, tem-se que $\sigma_i = \sum_{s=0}^{\lfloor (N-1)/i \rfloor} v_{si}$ e então o Teorema 1 (Fórmula de Inversão de Möbius) implica

$$v_i = \sum_{l=1}^{\lfloor (N-1)/i \rfloor} \mu(l) \sigma_{il} - v_0 M \left(\left\lfloor \frac{N-1}{i} \right\rfloor \right). \quad (14)$$

A Transformada Aritmética é melhor entendida quando se considera a transformada de Hartley. A fórmula de inversão de Möbius é apropriada para tratamento de sinais reais. Na abordagem clássica da AFT, o espectro é calculado separando-se os coeficientes de Fourier a_n e b_n da série truncada [15], i.e., as componentes par e ímpar do sinal real são estimadas separadamente. No caso da transformada de Hartley, o espectro é real e a DHT funciona como uma série de Fourier truncada.

A AFT convencional realiza aproximações do espectro via interpolação de ordem zero ou um. A análise apresentada neste artigo possibilita uma compreensão adequada dos mecanismos envolvidos nas aproximações e permite estabelecer limites de validade para as interpolações.

3. ENTENDENDO A INTERPOLAÇÃO

3.1. Interpolação Ideal

O que exatamente significa o valor de um sinal discreto num índice fracionário? Dado $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_{N-1})$, o valor de v_r para um valor não inteiro de r pode ser estimado por:

$$\begin{aligned} v_r &= \sum_{k=0}^{N-1} V_k \text{cas} \left(\frac{2\pi kr}{N} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} v_i \sum_{k=0}^{N-1} \text{cas} \left(\frac{2\pi ki}{N} \right) \text{cas} \left(\frac{2\pi kr}{N} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Definindo-se a função peso de Hartley por

$$w_i(r) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{cas} \left(\frac{2\pi ki}{N} \right) \text{cas} \left(\frac{2\pi kr}{N} \right), \quad (16)$$

o valor do sinal nos índices fracionários pode ser encontrado através de uma interpolação de ordem N :

$$v_r \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} w_i(r) \cdot v_i. \quad (17)$$

Desse modo, cada núcleo realiza um tipo diferente de interpolação. Uma propriedade interessante dos pesos de interpolação para a DHT é dada pela proposição abaixo.

Proposição 1 *Para os pesos de interpolação de Hartley vale que*

$$\sum_{i=0}^{N-1} w_i(r) = 1. \quad (18)$$

Prova: Claramente,

$$\sum_{i=0}^{N-1} w_i(r) = \frac{1}{N} \sum_{k'=0}^{N-1} \text{cas} \frac{2\pi k' r}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \text{cas} \frac{2\pi k' i}{N}.$$

Observando-se que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \cos \frac{2\pi k' i}{N} = \begin{cases} 1, & \text{se } k' = 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

tem-se que

$$\sum_{i=0}^{N-1} w_i(r) = \sum_{k'=0}^{N-1} \cos \frac{2\pi k' r}{N} \delta_{k',0},$$

onde δ é o delta de Kronecker. ■

Em verdade, $|w_i(r)| \leq 1$. Nos casos em que r é inteiro, segue das propriedades de ortogonalidade da função cas que $w_r = 1$ e $w_i = 0$, $\forall i \neq r$ e, como esperado, não há necessidade de interpolação. Observa-se que $\max_i w_i(r) = w_{[r]}$, onde $[x]$ denota o inteiro mais próximo de x . Esta propriedade justifica uma interpolação de ordem zero. Os pesos de interpolação para vários núcleos podem ser expresso por uma fórmula fechada após alguns desenvolvimentos trigonométricos. No que se segue, $\text{Sa}(\cdot)$ denota a função amostragem, $\text{Sa}(x) \triangleq \frac{\sin x}{x}$.

Proposição 2 *Os pesos de interpolação para uma transformada de comprimento N são dados pelas seguintes expressões a depender do núcleo considerado.*

Núcleo Cosseno - $\cos\left(\frac{2\pi k i}{N}\right)$

$$w_i(r) = \frac{1}{2N} + \frac{N-1/2}{N} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\text{Sa}\left(\frac{N-1/2}{N} 2\pi(i-r)\right)}{\text{Sa}\left(\pi(i-r)/N\right)} + \frac{1}{2} \frac{\text{Sa}\left(\frac{N-1/2}{N} 2\pi(i+r)\right)}{\text{Sa}\left(\pi(i+r)/N\right)} \right\}. \quad (19)$$

Núcleo Seno - $\sin\left(\frac{2\pi k i}{N}\right)$

$$w_i(r) = \frac{N-1/2}{N} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\text{Sa}\left(\frac{N-1/2}{N} 2\pi(i-r)\right)}{\text{Sa}\left(\pi(i-r)/N\right)} - \frac{1}{2} \frac{\text{Sa}\left(\frac{N-1/2}{N} 2\pi(i+r)\right)}{\text{Sa}\left(\pi(i+r)/N\right)} \right\}. \quad (20)$$

Núcleo de Hartley - $\text{cas}\left(\frac{2\pi k i}{N}\right)$

$$w_i(r) = \frac{1}{2N} + \frac{N-1/2}{N} \frac{\text{Sa}\left(\frac{N-1/2}{N} 2\pi(i-r)\right)}{\text{Sa}\left(\pi(i-r)/N\right)} + \frac{1}{2N} \cot\left(\frac{\pi(i+r)}{N}\right) - \frac{1}{2N} \frac{\cos\left(\frac{N-1/2}{N} 2\pi(i+r)\right)}{\sin\left(\pi(i+r)/N\right)}. \quad (21)$$

Prova: Segue diretamente das fórmulas de adição de arcos e das identidades trigonométricas:

$$\sum_{m=0}^M \cos m\theta \quad \text{e} \quad \sum_{m=0}^M \sin m\theta.$$

Cada somatório parcial S_k corresponde a k pontos de amostragem e se pode escrever cada ponto $v_{m\frac{N}{k}}$, de acordo com a fórmula de interpolação, em função do vetor de entrada $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_{N-1})$. Então, toda soma parcial pode ser reescrita como uma combinação linear das componentes no domínio do tempo, isto é,

$$S_k = \sum_{i=0}^{N-1} \Omega_i^k v_i, \quad (22)$$

onde $\Omega_i^k \triangleq \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} w_i\left(m\frac{N}{k}\right)$ representa a resultante do peso da k -ésima soma parcial. As somas parciais podem então ser expressas em termos do sinal de entrada:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_0^1 & \Omega_1^1 & \cdots & \Omega_{N-1}^1 \\ \Omega_0^2 & \Omega_1^2 & \cdots & \Omega_{N-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_0^{N-1} & \Omega_1^{N-1} & \cdots & \Omega_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Os índices fracionários foram incorporados à matriz $[\Omega]$. Escrita de forma compacta, a equação matricial acima fica denotada por $\mathbf{S}^T = [\Omega] \cdot \mathbf{v}^T$. Então, o espectro pode ser calculado por $\mathbf{V}^T = [M] \cdot [\Omega] \cdot \mathbf{v}^T$. A matriz $[M]$ apresenta apenas adições e a complexidade multiplicativa está relacionada com a matriz $[\Omega]$.

Os elementos de $[\Omega]$ podem ser calculadas facilmente:

$$\Omega_i^k = \frac{1}{Nk} \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{k'=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi i k'}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi k'}{N} \frac{mN}{k}\right). \quad (24)$$

Invertendo-se a ordem dos somatórios e aplicando o Lema Fundamental, vem que

$$\Omega_i^k = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{\lfloor (N-1)/k \rfloor} \cos\left(\frac{2\pi k i s}{N}\right), \quad 0 \leq i, s \leq N-1. \quad (25)$$

Proposição 3 *As componentes do peso da k -ésima soma parcial são normalizadas, i.e., somam $\sum_{i=0}^{N-1} \Omega_i^k = 1$.*

Prova: Para o núcleo cas segue que

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Omega_i^k = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{\lfloor (N-1)/k \rfloor} \cos \frac{2\pi k i s}{N}.$$

Novamente, invertendo-se a ordem dos somatórios e aplicando o Lema Fundamental, tem-se que

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Omega_i^k = \sum_{s=0}^{\lfloor (N-1)/k \rfloor} \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se } N|ks \\ 0, & \text{caso contrário} \end{array} \right\} = 1.$$

A demonstração é análoga para outros núcleos. ■

Proposição 4 *As fórmulas fechadas para Ω_i^k com relação aos núcleos cosseno e cas são:*

Cosseno:

$$\Omega_i^k(\cos) = \frac{1}{2} + \left(\left\lfloor \frac{N-1}{k} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\text{Sa} \left(\left(\left\lfloor \frac{N-1}{k} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi ik}{N} \right)}{\text{Sa} \left(\frac{\pi ik}{N} \right)}. \quad (26)$$

Hartley:

$$\Omega_i^k(\text{cas}) = \Omega_i^k(\cos) + \frac{1}{2} \cot \left(\frac{\pi ki}{N} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \left(\left(\left\lfloor \frac{N-1}{k} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi ik}{N} \right)}{\sin \left(\frac{\pi ik}{N} \right)}. \quad (27)$$

Prova: Segue diretamente das identidades trigonométricas para $\sum_{m=0}^M \cos m\theta$ e $\sum_{m=0}^M \sin m\theta$. ■

3.2. Interpolação Não Ideal

O algoritmo introduzido aqui para calcular uma Transformada Discreta pode ser interpretado de forma mais completa. Nesta seção procura-se esclarecer alguns pontos da transformada aritmética. Todo o processo é baseado em somatórios S_k , $k = 1, \dots, N-1$, de determinadas componentes em tempo discreto. Os índices nos quais o sinal deve ser amostrado para construir as somas parciais são da forma λN , em que λ é uma fração de Farey $N-1$ [13]. Independentemente do valor de k , um número k de amostras é tomado prudentemente através de uma dizimação. Fixado k , a seqüência no domínio do tempo (v_0, \dots, v_{N-1}) é dizimada por $\frac{N}{k}$ e as somas S_k correspondem exatamente ao valor médio (média aritmética) das “componentes sobreviventes”. Nos casos em que k não divide N , a dizimação leva a índices fracionários no domínio do tempo, de modo que uma interpolação é exigida. O número de pontos R que exigem interpolação é quotada superiormente por $R \leq \sum_{d|N} \frac{d-1}{2}$. Esta abordagem é, portanto, atrativa quando se lida com uma seqüência de comprimento N não primo com grande número de fatores.

Proposição 5 *Uma aproximação contínua para os pesos de interpolação para N suficientemente grande é dada por:*

Núcleo Cosseno

$$\hat{w}_i(r) \approx \frac{\text{Sa}(2\pi(i-r)) + \text{Sa}(2\pi(i+r))}{2} \quad (28)$$

Núcleo Seno

$$\hat{w}_i(r) \approx \frac{\text{Sa}(2\pi(i-r)) - \text{Sa}(2\pi(i+r))}{2} \quad (29)$$

Núcleo de Hartley

$$\hat{w}_i(r) \approx \text{Sa}(2\pi(i-r)) + \frac{1 - \cos 2\pi r}{2\pi(i+r)}. \quad (30)$$

É interessante observar que o peso assintótico para a transformada de Hartley pode ser reescrito em termos de uma Transformada de Hilbert:

$$\hat{w}_i(r) \approx \text{Sa}(2\pi(i-r)) - \mathcal{H} \{ \text{Sa}(2\pi(i+r)) \}, \quad (31)$$

onde \mathcal{H} denota a transformada de Hilbert.

A interpolação de ordem zero é feita fazendo-se $f_j = f_{[j]}$. Um sinal discreto $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_{N-1})$ é dito ser par (respectivamente ímpar) se e somente se $v_k = v_{N-k}$ (respectivamente $v_k = -v_{N-k}$). Os índices correspondentes aos instantes de amostragem são tais que uma simetria par é observada. A influência das componentes ímpares do sinal nas somas parciais desaparece quando uma interpolação de ordem zero é feita. Assim, essa interpolação permite apenas estimar as componentes pares do espectro. Um exame do comportamento assintótico dos pesos justifica uma interpolação de ordem zero para o núcleo cosseno. Claramente,

$$\hat{w}_i(r) \approx 0 \quad \forall i \neq [r], N-[r]; \quad (32)$$

$$\hat{w}_{[r]}(r) \approx \text{Sa} \left(\frac{2\pi([r]-r)}{2} \right) \approx \frac{1}{2}; \quad (33)$$

$$\hat{w}_{N-[r]}(r) \approx \text{Sa} \left(\frac{2\pi([r]-r)}{2} \right) \approx \frac{1}{2}. \quad (34)$$

Observando a Equação 17, ve-se que $\hat{v}_r \approx w_{[r]}(r)v_{[r]} + w_{N-[r]}(r)v_{N-[r]}$. Então, tem-se que para sinais pares $\hat{v}_r \approx v_{[r]}$. Como mencionado, o problema chave na AT é a interpolação. Assim, para entender o balanço entre completude multiplicativa e precisão, deve-se examinar mais detalhadamente o processo de interpolação.

Um modo de “controlar” o processo de interpolação é classificar os pesos $w_i(r)$ em ordem decrescente e classificar os índices i segundo a ordem dos $w_i(r)$ correspondentes em um conjunto T de N elementos ($\|T\| = N$).

Seja T_Θ o subconjunto de T que contém apenas os primeiros Θ elementos de T ($T_\Theta \subset T, \|T_\Theta\| = \Theta$). Uma interpolação não-ideal com Θ amostras pode ser gerada considerando

$$\hat{v}_r = \sum_{i \in T_\Theta} \frac{w_i(r)}{\sum_{j \in T_\Theta} w_j(r)} \cdot v_i, \quad (35)$$

onde $\sum_{j \in T_\Theta} w_j(r)$ é um fator de normalização. Para uma interpolação de ordem zero, faça $\Theta = 1$.

4. GENERALIZAÇÃO: TRANSFORMADAS ARITMÉTICAS

Uma abordagem para transformadas discretas invariantes ao núcleo pode ser obtida de um maneira simples.

Considere uma transformada discreta

$$V_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} v_i \Psi_N(k, i), \quad \forall k = 0, \dots, N-1. \quad (36)$$

O núcleo da transformada, Ψ_N , pode ser, por exemplo,

$$\Psi_N(k, i) \in \left\{ \text{cas} \left(\frac{2\pi ki}{N} \right), \cos \left(\frac{2\pi ki}{N} \right), e^{-j \frac{2\pi ki}{N}} \right\}. \quad (37)$$

Lema 3 (Generalização do Lema 1)

$$\frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \Psi_N \left(\frac{k'}{k}, mN \right) = \begin{cases} 1, & \text{se } k|k', \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (38)$$

A Transformada Aritmética tem a mesma formulação para todas as transformadas de uma certa classe. A diferença entre usar uma ou outra está relacionada com o processo de interpolação. O valor do sinal em amostras fracionárias é diferente para cada transformada, pois a fórmula de interpolação depende do núcleo considerado.

Seja $\text{cas}'(\cdot)$ a função $\text{cas}(\cdot)$ complementar [3]. Um conjunto alternativo de amostras pode ser definido no cálculo das somas parciais através da inclusão de um novo parâmetro α .

Teorema 3 *Seja uma soma parcial no domínio do tempo definida por $S_{k,\alpha} \triangleq \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} v_m \frac{N}{k} - \alpha N$. Então, o espectro de Hartley é relacionado com as somas parciais deslocadas por:*

$$V_k = \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{N-1}{k} \rfloor} \mu(l) \frac{S_{kl,\alpha}}{\text{cas}'(2\pi kl\alpha)}, \quad \forall k = 1, \dots, N-1. \quad (39)$$

Prova: Realizando um procedimento análogo ao feito nas Equações 5 e 6, vem que

$$S_{k,\alpha} = \sum_{k'=0}^{N-1} V_{k'} \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \text{cas} \left(2\pi \frac{k'}{k} m - 2\pi k' \alpha \right). \quad (40)$$

Aplicando o Lema 1 e a fórmula para adição de arcos para a função $\text{cas}(\cdot)$, i.e., $\text{cas}(a-b) = \cos b \cdot \text{cas} a - \sin b \cdot \text{cas}' a$, conclui-se facilmente que

$$S_{k,\alpha} = \sum_{s=1}^{\lfloor (N-1)/k \rfloor} V_{sk} \text{cas}'(2\pi k\alpha). \quad (41)$$

Uma aplicação do Teorema 1 (Fórmula de Inversão de Möbius) finaliza a demonstração. ■

Agora, é possível ajustar convenientemente o valor de α como função de k , de modo a obter a transformada aritmética baseada em outro conjunto de pontos de amostragem do sinal no domínio do tempo.

Corolário 1 (AT Generalizada) *O espectro de Hartley pode ser determinado por*

$$V_k = \sum_{l=1}^{\lfloor (N-1)/k \rfloor} \mu(l) S_{kl, \frac{1}{4kl}}. \quad (42)$$

Fazendo $\alpha = \frac{1}{4kl}$, a interpolação de ordem zero se torna aplicável para o cálculo da Transformada de Hartley de sinais ímpares [12].

5. CONCLUSÕES

A abordagem apresentada neste artigo generaliza a Transformada Aritmética de Fourier (AFT) e permite o cálculo de outras transformadas discretas, como a DHT. O ponto chave do desenvolvimento é o *processo de interpolação* exigido para o cálculo da AFT. Explica-se então o balanço entre complexidade e precisão, especialmente para transformadas de comprimento menores. Como existe uma relação simples entre a DFT e a DHT [3], uma possibilidade é avaliar a AHT como estimativa da DHT e então encontrar uma estimativa correspondente para a DFT. Finalmente, vale lembrar que a transformada aritmética pode ser calculada usando processamento paralelo.

REFERÊNCIAS

- [1] R.E. Blahut, *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*, Addison-Wesley, 1985.
- [2] R.N. Bracewell, "The Discrete Hartley Transform", *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 73, pp. 183-185, Dec. 1983.
- [3] R.N. Bracewell, *The Hartley Transform*, Oxford University Press, 1986.
- [4] R.V. Churchill, *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960.
- [5] J.W. Cooley, J.W. Tukey, "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series", *Math. of Comput.*, vol 19, pp. 297-301, 1965.
- [6] R.V.L Hartley, "A More Symmetrical Fourier Analysis Applied To Transmission Problems", *Proc. IRE*, vol. 30, pp. 144-150, 1942.
- [7] E.C. Ifeachor and B.W. Jervis, *Digital Signal Processing - A Practical Approach*, Addison-Wesley, 1993.
- [8] K.J. Olejniczak and G.T. Heydt, "Special Section on the Hartley Transform", *Proc. of IEEE*, vol. 82, no. 3, March, pp. 372-447, 1994.
- [9] H.M. de Oliveira, R.M. Campello de Souza, "Orthogonal Multilevel Spreading Sequence Design", *5th Int. Symp. on Commun. Theory and Applications*, IE-EE/IEE, Ambleside, UK, 11-16 July, pp. 206-208, 1999.
- [10] H.M. de Oliveira, R.M. Campello de Souza, A.N. Kauffman, "Efficient Multiplex For Band-Limited Channels: Galois-Field Division Multiple Access", no *Workshop on Coding and Cryptography, WCC'99*, pp. 253-241, 1999.
- [11] J.M. Pollard, "The Fast Fourier Transform in a Finite Field", *Math. Comput.*, V. 25, N. 114, pp. 356-374, 1971.
- [12] I.S. Reed et al., "Fourier Analysis and Signal Processing by Use of the Möbius Inversion Formula", *IEEE Trans. ASSP*, vol. 38, pp. 459-470, Mar., 1990.
- [13] M.R. Schroeder, *Number Theory in Science and Communications*, Springer, 1997.
- [14] R.M. Campello de Souza, H.M. de Oliveira. A.N. Kauffman and A.J.A. Paschoal, "Trigonometry in Finite Fields and a new Hartley Transform", *IEEE Int. Symp. on Info. Theory*, ISIT, MIT Cambridge, MA, pp. 293, 1998.
- [15] D.W. Tufts and G. Sadasiv, "The Arithmetic Fourier Transform", *IEEE ASSP Magazine*, pp. 13-17, Jan., 1988.