

COMUNICAÇÃO UTILIZANDO SINAIS CAÓTICOS: INFLUÊNCIA DE RUÍDO E DE LIMITAÇÃO EM BANDA

Marcio Eisenkraft *e Max Gerken †

Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
<http://www.lcs.poli.usp.br>
{marcio, mgk}@lcs.poli.usp.br

RESUMO

O trabalho apresenta os fundamentos de dois tipos de sistemas de comunicação que utilizam o sincronismo de osciladores caóticos e faz uma análise das suas limitações quanto a erros de sincronismo. Particular atenção é dada a um dos sistemas, baseado no método de sincronismo de Wu e Chua, o qual se mostra bastante simples e serve de base para propostas mais elaboradas como o “Chaotic Phase Shift Keying”. O sistema de Wu e Chua é analisado quanto a influência de características do canal, como ruído e limitação em banda. Mostra-se que em ambos os casos, na forma como foi proposto, ele apresenta relação sinal-ruído na saída do receptor pouco satisfatória. Neste trabalho estas deficiências são analisadas e quantificadas sendo apresentado um método para a geração de sinais caóticos com banda limitada, eliminando-se assim o problema da limitação em banda do canal para o sincronismo entre transmissor e receptor.

1. INTRODUÇÃO

Sinais caóticos são caracterizados por três propriedades: determinismo, aperiodicidade e dependência sensível às condições iniciais. Esta última significa que o estado de dois sistemas caóticos idênticos, iniciados com condições cuja diferença seja arbitrariamente pequena, depois de um tempo finito estarão distantes no espaço de fase. Estes sinais podem ser interessantes para algumas áreas da Engenharia de Telecomunicações por apresentarem características como espectro de Fourier plano, dificuldade de predição e ser confundível com ruído.

Devido à sensibilidade às condições iniciais, pode parecer que o sincronismo de dois sistemas caóticos seja impossível. Porém, Pecora e Carroll [1], [2], [3] mostraram que este sincronismo é possível desde que o subsistema escravo seja assintoticamente estável. Este resultado deu um grande impulso para a geração de mais trabalhos sobre a aplicabilidade desses sistemas em comunicações.

No entanto, o critério de sincronismo de Pecora e Carroll envolve o cálculo de expoentes de Lyapunov condicionados para determinar a estabilidade do subsistema escravo, o que pode ser bastante complicado para um sistema em geral. Wu e Chua [4] propuseram um método de projeto de sistemas sincronizantes mais

simples e mais facilmente aplicável do ponto de vista da engenharia. Baseado neste método, no mesmo trabalho, foi proposto um sistema de comunicação utilizando sinais caóticos que é isento de erros desde que o canal seja ideal, ou seja, sem ruído e sem limitação de banda. Este sistema serviu de base para outras propostas de sistemas mais complexas, como o “Chaotic Phase Shift Keying” (CPSK) de Ushio [5], [6].

Um objetivo deste artigo é analisar o desempenho deste sistema em condições não-ideais de canal. Mais especificamente, estudar como se comporta a relação sinal-ruído na saída do receptor quando o canal de transmissão é afetado por ruído branco gaussiano ou quando ele é modelado por um filtro passa-banda de fase linear.

Como será visto na Seção III os resultados mostram que o sistema não apresenta um desempenho satisfatório quando da adição de ruído na entrada do receptor, sendo necessário um processamento adicional do sinal tanto na transmissão quanto na recepção. Também quando o canal de transmissão tem banda limitada ocorrem problemas de sincronismo que afetam seriamente o desempenho do sistema. Para solucionar esse problema é proposta uma modificação que apresenta excelentes resultados.

2. SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO UTILIZANDO SINCRONISMO DE SINAIS CAÓTICOS

2.1. O método de sincronismo de Wu e Chua

Wu e Chua em seu artigo [4] dão um enfoque diferente ao sincronismo de sistemas caóticos em relação ao que foi proposto no trabalho pioneiro de Pecora e Carroll [1]. Ao invés de utilizar expoentes de Lyapunov para verificar a estabilidade assintótica do escravo e, conseqüentemente, a possibilidade de sincronismo, Wu e Chua propõem que as equações do mestre e do escravo sejam escritas de tal forma que a dinâmica do erro de sincronismo se torne simples e que se possa verificar facilmente sua convergência para zero.

O método de sincronismo de Chua assume que o sistema mestre possa ser escrito na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_r), \quad (1)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz com todos os autovalores no semiplano aberto esquerdo, ou seja, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é globalmente assintoticamente

* Financiado pela FAPESP (proc. 98/13362-6).

† Financiado pelo CNPq (proc. 300521/92-8).

estável e $\mathbf{x}_r = (x_1, x_2, \dots, x_r)^t \in R^r$ é um subvetor do vetor de estados $\mathbf{x} \in R^p, p \geq r$.

Desta forma, define-se o sistema mestre-escravo como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_r) \quad (2a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{f}(\mathbf{x}_r) \quad (2b)$$

onde \mathbf{x} é o vetor de estados do sistema mestre e \mathbf{x}' é o vetor de estados do sistema escravo. A dinâmica do erro de sincronismo para este caso é descrita por:

$$\frac{d(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}). \quad (3)$$

Como \mathbf{A} tem todos os autovalores no semiplano aberto esquerdo, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}' = \mathbf{x}$. Assim, o sistema sincroniza de forma global. A taxa de convergência pode ser diretamente encontrada através dos autovalores de \mathbf{A} . É interessante notar que apesar do sistema escravo não ser autônomo, a equação que descreve o comportamento do erro (3) o é.

Em [4], são citados vários exemplos de sistemas que podem ser colocados na forma (1) com \mathbf{x}_r possuindo poucos componentes.

2.2. Sistema de Cuomo e Oppenheim

Uma vez demonstrada a possibilidade de sincronismo de sinais caóticos, vários autores sugeriram sistemas de telecomunicações que utilizam sinais caóticos para mascarar ou codificar a informação a ser transmitida. Talvez a idéia mais simples tenha sido a de Cuomo e Oppenheim [7] ilustrada na Figura 1.

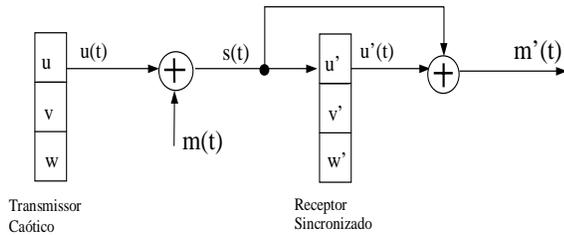


Figura 1. Diagrama de blocos do sistema proposto por Cuomo e Oppenheim [7].

O transmissor é composto por um oscilador caótico que, caso $m(t)$ seja identicamente nulo, sincroniza perfeitamente com o receptor. Assim, neste caso, $\lim_{t \rightarrow \infty} |u'(t) - u(t)| = 0$. A idéia então é somar a $u(t)$ o sinal $m(t)$ bastante atenuado de forma que $s(t) = u(t) + m(t) \approx u(t)$. Dessa forma, $u'(t) \approx u(t)$ e na saída do receptor temos $m'(t) = s(t) - u'(t) = m(t) + u(t) - u'(t) \approx m(t)$ e a mensagem é recuperada. É importante notar que nesse sistema o sincronismo não é perfeito e existe um erro na recuperação da informação mesmo quando todos os fatores são ideais (não há ruído no canal, os parâmetros são idênticos no transmissor e no receptor, etc). Tudo se passa como se a própria mensagem fosse um ruído para o sistema.

2.3. Sistema de Wu e Chua

Wu e Chua propuseram um sistema de transmissão de informações utilizando sinais caóticos que não possui um erro intrínseco como o apresentado no item anterior. Seu diagrama de blocos está mostrado na Figura 2.

O sinal de informação $\mathbf{m}(t)$ é codificado com o sinal caótico $\mathbf{x}_r(t)$ usando uma função de codificação $\mathbf{s}(t) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_r(t), \mathbf{m}(t))$

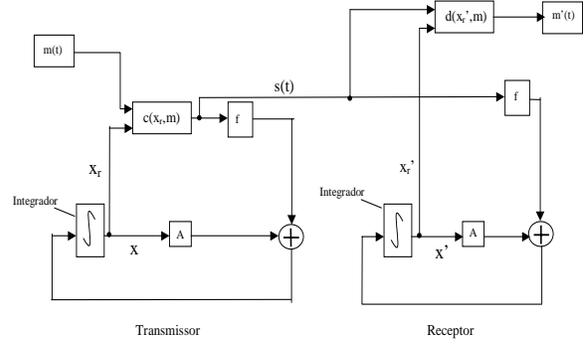


Figura 2. Diagrama de blocos do sistema proposto por Wu e Chua [4].

de tal modo que o sinal de informação possa ser decodificado de forma única como $\mathbf{m}(t) = \mathbf{d}(\mathbf{x}_r(t), \mathbf{s}(t)) = \mathbf{d}(\mathbf{x}_r(t), \mathbf{c}(\mathbf{x}_r(t), \mathbf{m}(t)))$. Assume-se aqui que \mathbf{d} seja contínua na variável \mathbf{x}_r . A princípio a escolha de $\mathbf{c}(\cdot, \cdot)$ e $\mathbf{d}(\cdot, \cdot)$ precisa satisfazer $\mathbf{s}(t) \approx \mathbf{x}_r(t)$ para todos os sinais de informação apropriados por dois motivos. Primeiramente, $\mathbf{s}(t)$ é realimentado no lugar de $\mathbf{x}_r(t)$ no sistema transmissor. Por outro lado, deseja-se que este sistema continue gerando sinais caóticos. Esta condição só será assegurada se $\mathbf{s}(t) \approx \mathbf{x}_r(t)$. Além disso, como deseja-se que o sistema de comunicação seja seguro, é necessário que $\mathbf{s}(t) \approx \mathbf{x}_r(t)$ de forma que a ocorrência de $\mathbf{m}(t)$ não seja aparente a partir do sinal $\mathbf{s}(t)$. As equações que governam o sistema global são da forma (2), apenas substituindo-se $\mathbf{x}_r(t)$ por $\mathbf{s}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{s}) \\ \dot{\mathbf{x}}' &= \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{f}(\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (4)$$

Novamente, $\frac{d(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ e assim $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}(t)$. Da continuidade de $\mathbf{d}(\cdot, \cdot)$ resulta $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{m}'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_r(t), \mathbf{s}(t)) = \mathbf{m}(t)$. Desta forma a mensagem é recuperada no receptor sem degradação (a menos de um transitório necessário para que os sistemas entrem em sincronismo) quando os parâmetros do transmissor e do receptor estão perfeitamente casados e o canal é ideal. Esta recepção isenta de erro é o que torna este sistema superior ao de Cuomo e Oppenheim descrito anteriormente.

Além disso, cabe observar que esse sistema de transmissão pode ser utilizado também com equações que não podem ser colocados na forma (1), como as equações de Lorenz [8].

Em nossos testes, foi utilizado o sistema de Lorenz ($r = 1, p = 3$) e $\mathbf{s}(t) = \mathbf{c}(x_r(t), m(t)) = x_r(t) + a \cdot m(t)$, sendo a um fator de atenuação. O sinal $\mathbf{s}(t)$ é então transmitido para o sistema receptor. Note-se que o sinal $m(t)$ fica mascarado pelo sinal $x_r(t)$, que pode ser denominado sinal *máscara*.

3. ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE RUÍDO ADITIVO E DA LIMITAÇÃO DE BANDA NO SISTEMA DE WU E CHUA

No sistema da Figura 2 a mensagem $m(t)$ é exatamente recuperada no caso do canal por onde $\mathbf{s}(t)$ é transmitido ser ideal. O objetivo dessa seção é analisar a degradação no sincronismo que ocorre quando ruído branco gaussiano é adicionado a $\mathbf{s}(t)$ ou quando o canal é modelado por um filtro passa-bandas $H_c(z)$, ou seja $\mathbf{s}(t)$ sofre uma limitação em frequência.

O diagrama de blocos da Figura 3 ilustra o sistema utilizado nas simulações computacionais. Foi utilizado o sistema de Lorenz com os mesmos parâmetros de [7]. Esse sistema é tridimensional sendo suas variáveis representadas por $\mathbf{x} = (u, v, w)^t$. O sinal $u(t)$ foi utilizado na transmissão (\mathbf{x}_r) somado a $m(t)$. Para a computação numérica, os sinais foram amostrados a $f_a = 8kHz$ e utilizou-se um passo de integração de 0,06. Foi utilizado $m(t) = \text{sen}(2\pi 500t)$ com $0 \leq t \leq 1,25s$. As condições iniciais no transmissor e no receptor são escolhidas aleatoriamente a cada simulação. O filtro $H_c(z)$ é FIR com fase linear de ordem $N = 200$ com frequências de corte inferior e superior variáveis. Estas frequências, normalizadas com relação à frequência de Nyquist ($f_a/2$), são respectivamente denominadas f_{ci} e f_{cs} . Para diminuir o erro devido aos transitórios da sincronização e para compensar o atraso do filtro $H_c(z)$ foram adicionadas 250 amostras nulas no início e 100 no final do vetor resultante da amostragem de $m(t)$. Assim, o sinal discreto $m(k)$ resultante da amostragem de $m(t)$ será composto por 10350 pontos.

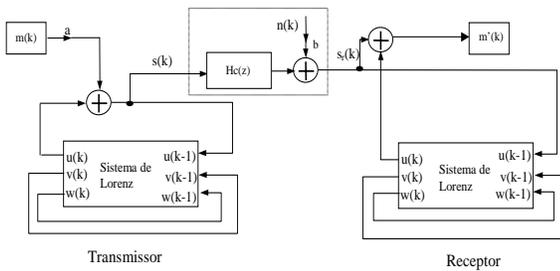


Figura 3. Diagrama de blocos do sistema de Wu e Chua discretizado utilizado nas simulações computacionais.

Como já foi mencionado o sinal x_r faz o papel de uma máscara que esconde a mensagem m . No caso utilizou-se uma relação sinal-máscara a de $-30dB$, suficiente para esconder o sinal senoidal em meio ao espectro do sinal caótico. O ruído branco gaussiano foi adicionado a $s(k)$ atenuado por uma constante b que nada mais é do que a relação ruído-máscara expressa em dB's. Assim, a relação sinal-ruído no canal pode ser calculada por $a - b$, com a e b medidos em dB.

A Figura 4 mostra alguns sinais obtidos com esse sistema quando o canal é ideal, ou seja, $b = -\infty dB$, $f_{ci} = 0$ e $f_{cs} = 1$.

3.1. Influência do ruído aditivo

Nesta seção será considerada a influência da adição do ruído branco gaussiano $n(k)$ no desempenho do sistema da Figura 3. Não será considerada a influência do filtro $H_c(z)$ a ser tratada no item seguinte.

O sinal $s(k)$ pode ser entendido como um parâmetro variante no tempo dos sistemas mestre e escravo. Ou seja, a introdução do ruído branco no canal pode ser visto como um problema de descasamento dos parâmetros entre transmissor e receptor. Alguns trabalhos [1],[9] mostram que no caso típico de um sistema como o da Figura 2 o erro de sincronismo $\|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}'_r\|$ é da ordem de grandeza do descasamento dos parâmetros entre mestre e escravo. Assim, é de se esperar que isto ocorra também nesse caso. O gráfico da Figura 5 confirma essa expectativa.

Por exemplo, quando a relação ruído-máscara b no canal é $-40dB$, espera-se também encontrar um erro de sincronismo de

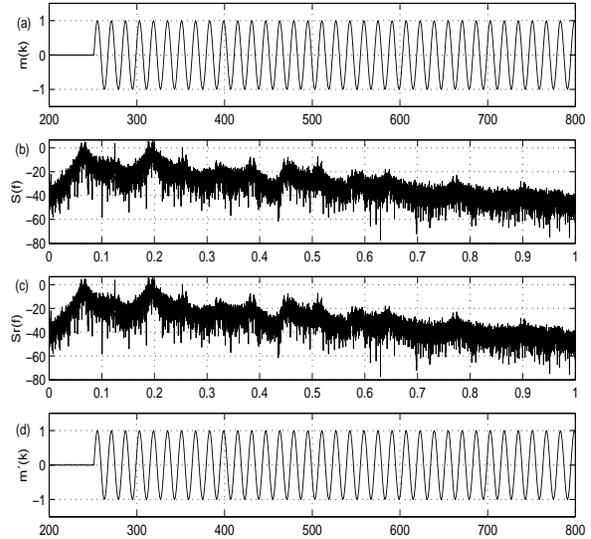


Figura 4. Sinais do sistema da Figura 3, no caso do canal ser ideal. O sinal de informação $m(k)$ é recuperado exatamente no receptor. (a) Trecho do sinal de informação. (b) Densidade espectral de potência em dB do sinal na saída do transmissor. O eixo das frequências está normalizado com relação a $f_a/2$. (c) Densidade espectral de potência em dB do sinal na entrada do receptor. (d) Trecho do sinal recuperado.

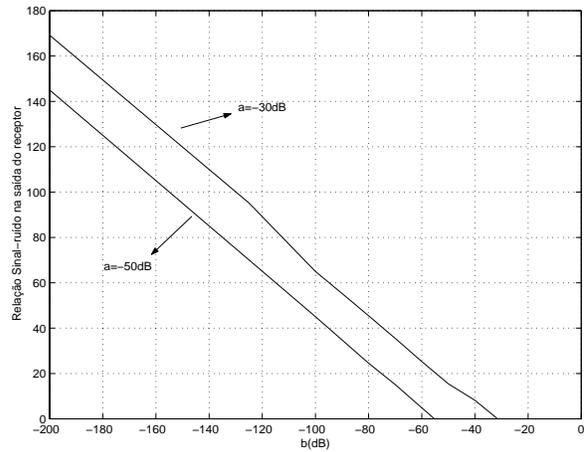


Figura 5. Relação sinal-ruído na saída do receptor em função da relação ruído-máscara no canal b .

cerca de $-40dB$. Ora, como a relação sinal-máscara a foi fixada em $-30dB$, o valor esperado para a relação sinal-ruído no sinal recuperado é de $10dB$. Observando-se a curva relativa a $a = -30dB$ na Figura 5, vemos que para $b = -40dB$ encontramos uma relação sinal-ruído de $8dB$ na saída do receptor. Confirma-se assim, com boa aproximação, a previsão feita. Os sinais relativos a essa situação são mostrados na Figura 6.

Os resultados apresentados mostram que o sistema não se comporta muito bem frente ao ruído. Isto porque a relação sinal-ruído na saída do receptor é igual ou pior do que aquela no canal. Como o sinal de informação $m(k)$ precisa ser atenuado para ser transmitido, concluímos que mesmo ruídos de baixas potências somados no canal causarão baixa relação sinal-ruído no receptor.

A solução desse problema no caso analógico não parece ser evi-

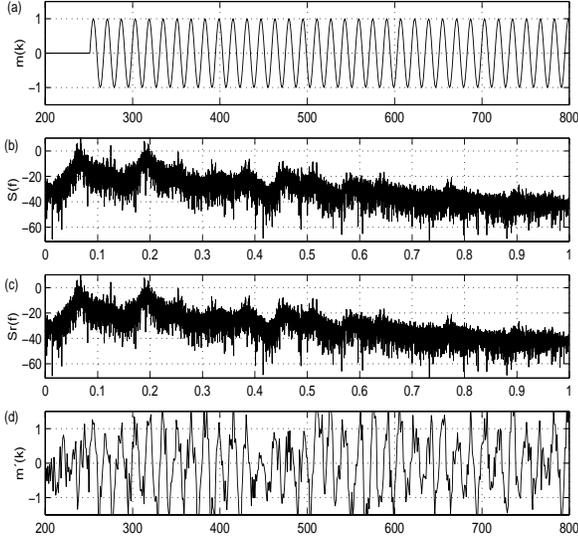


Figura 6. Sinais do sistema da Figura 3 para $b = -40dB$. (a) Trecho do sinal de informação. (b) Densidade espectral de potência em dB do sinal na saída do transmissor. O eixo das frequências está normalizado com relação a $f_a/2$. (c) Densidade espectral de potência em dB do sinal na entrada do receptor. (d) Trecho do sinal recuperado.

dente já que o erro de sincronismo com o desajuste dos parâmetros é uma característica intrínseca dos sinais caóticos. Possivelmente uma solução seja a incorporação ao sistema de um procedimento de modulação em fase ou frequência. No caso de transmissão digital resultados mais animadores foram publicados em diversos artigos como [6].

3.2. Análise da limitação de banda no canal

A Figura 7 mostra o resultado obtido para a relação sinal-ruído¹ final obtida no receptor (obtenção de $m'(k)$ na Figura 3) em função da banda rejeitada pelo canal $(1 - f_{cs}) \times 100$, para os sistemas das Figuras 3 e 10 quando $f_{ci} = 0$. Vê-se que a limitação da banda do canal realmente prejudica o sincronismo tornando problemática a recuperação do sinal de informação $m(k)$ mesmo quando o espectro deste está todo contido na faixa de passagem do canal. Como ilustração, a Figura 8 mostra os sinais do sistema quando $f_{cs} = 0, 70$.

A situação é ainda mais drástica quando o corte do canal é realizado nas baixas frequências. Neste caso, mesmo sendo f_{ci} da ordem de 2% da frequência de amostragem, o erro quadrático médio resulta maior do que a ordem de grandeza de $m(k)$. A Figura 9 ilustra esta situação.

3.3. Sistema utilizando sinais caóticos limitados em banda

Para tentar diminuir os problemas resultantes da limitação de banda, foi inserido na malha do transmissor um filtro passa-faixas de fase linear com o objetivo de limitar o espectro do sinal antes da transmissão. Para que continue ocorrendo o sincronismo, um filtro idêntico foi colocado no receptor. O diagrama de blocos da Figura 10 mostra o sistema proposto. Estes filtros têm frequência

¹ Aqui deve-se observar que o erro provocado pela limitação de banda tem características mais próximas de ruído do que de distorção. Daí utilizar-se também neste caso de uma relação sinal-ruído para descrever o efeito do erro causado.

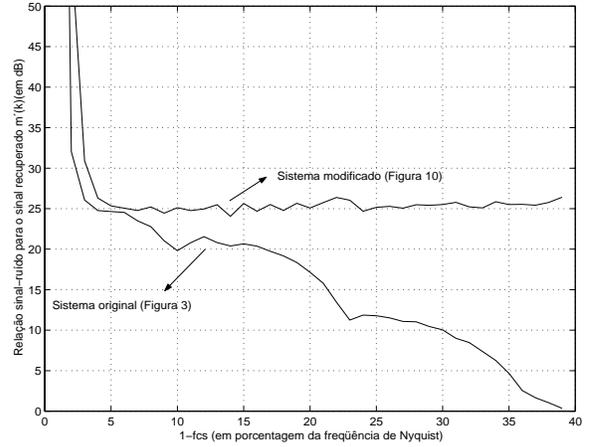


Figura 7. Relação sinal-ruído na obtenção de $m'(k)$ em função da porcentagem de banda rejeitada pelo canal, $(1 - f_{cs}) \times 100$, para os sistemas das Figuras 3 e 10 quando $f_{ci} = 0$. No sistema da Figura 10 foi utilizado $H_s(z)$ com $f_{ss} = 0,9f_{cs}$ para cada valor de f_{cs} .

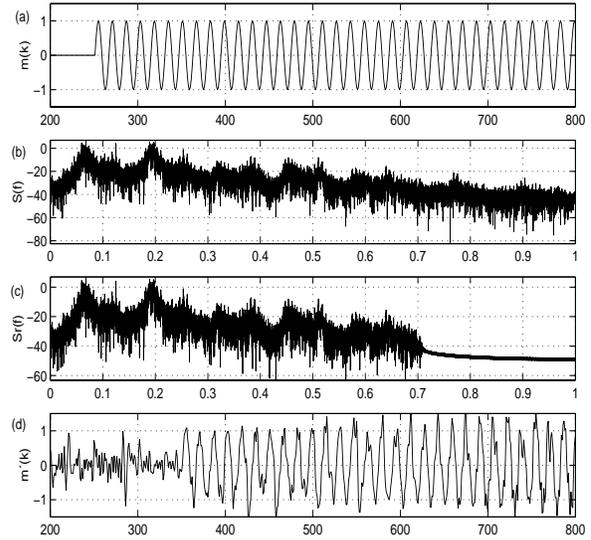


Figura 8. Sinais do sistema da Figura 3 para $f_{ci} = 0$ e $f_{cs} = 0,7$. (a) Trecho do sinal de informação. (b) Densidade espectral de potência em dB do sinal na saída do transmissor. O eixo das frequências está normalizado com relação a $f_a/2$. (c) Densidade espectral de potência em dB do sinal na entrada do receptor. (d) Trecho do sinal recuperado. Note o atraso de 100 amostras causado pelo canal.

de corte inferior e superior variáveis. Estas frequências de corte, normalizadas com relação à frequência de Nyquist, são indicadas respectivamente por f_{si} e f_{ss} .

Neste caso, observou-se uma diminuição bastante acentuada no erro entre os sinais $m'(k)$ e $m(k)$ com relação ao sistema da Figura 3 como atesta a Figura 7. Para a obtenção desses dados, tomou-se $f_{ss} = 0,9f_{cs}$ e o sistema da Figura 10. Para comparação, a Figura 11 mostra uma situação como a da Figura 8, exceto pela introdução de $H_s(z)$ no transmissor e no receptor.

Os dados obtidos mostram que o erro mantém-se praticamente constante com a variação das frequências de corte do canal desde que as frequências de corte dos filtros das malhas sejam convenientemente ajustadas. Grande parcela desse erro deve-se às

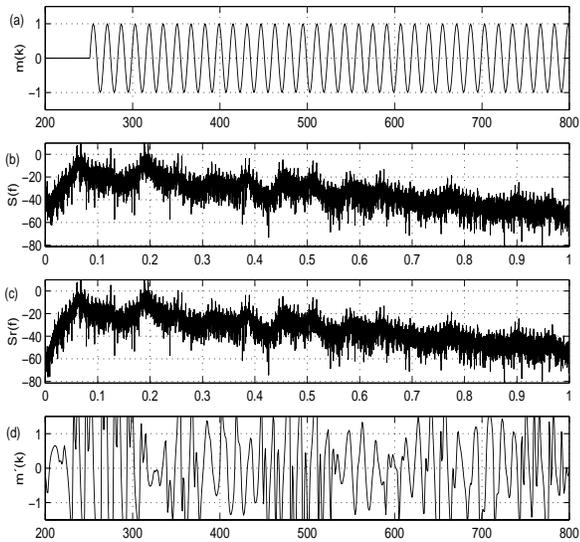


Figura 9. Sinais do sistema da Figura 3 para $f_{ci} = 0,02$ e $f_{cs} = 1$. (a) Trecho do sinal de informação. (b) Densidade espectral de potência em dB do sinal na saída do transmissor. O eixo das frequências está normalizado com relação a $f_a/2$. (c) Densidade espectral de potência em dB do sinal na entrada do receptor. (d) Trecho do sinal recuperado.

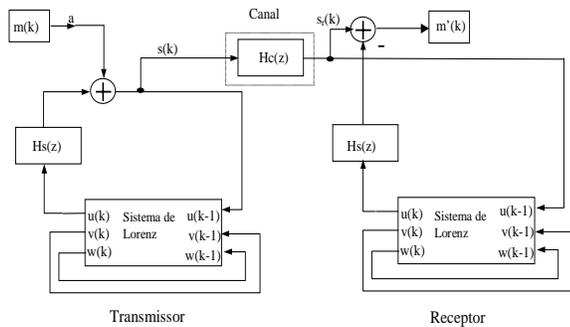


Figura 10. Diagrama de blocos do sistema proposto para diminuir os efeitos da limitação de banda do canal de comunicação no sincronismo dos sistemas.

ondulações da faixa de passagem do filtro $H_c(z)$ utilizado para simular o canal. Este erro não é alterado pela introdução dos filtros $H_s(z)$ e é equivalente à introdução de um ruído correlacionado ao sinal na linha de transmissão. Porém, os resultados atestam que os erros causados pela limitação de banda no canal foram bastante atenuados. Tudo indica que a inserção dos filtros não destrói a característica caótica dos osciladores (não-periodicidade, dependência sensível às condições iniciais) e nem sua estabilidade. A Figura 12 ilustra este fato mostrando sinais de saída do receptor nos sistemas sem e com inserção de $H_s(z)$ (Figuras 3 e 10), sendo o último caso com $f_{si} = 0,1$ e $f_{ss} = 0,8$. A Figura 13 mostra projeções dos atratores dos sistemas transmissores nos dois casos. Com a inserção dos filtros o atrator parece apresentar uma estrutura bem mais complexa. Finalmente a Figura 14 procura ilustrar que com a inserção do filtro no sistema (Figura 10) também é possível recuperar o sinal $m(k)$ mesmo quando o canal filtra baixas frequências.

4. CONCLUSÕES

Neste artigo foi feita uma análise da influência da adição de ruído branco gaussiano e da limitação de banda no canal de transmissão no desempenho do sistema proposto por Wu e Chua em [4]. Os resultados apresentados permitem concluir que este esquema de comunicação, pelo menos na forma analógica, não é robusto com relação a ruído introduzido no canal. Mesmo ruídos de potência baixa geram baixas relações sinal-ruído na saída do transmissor. Este problema pode ser minorado transmitindo-se uma versão modulada do sinal original ou utilizando técnicas digitais do tipo CPSK [6].

Quanto à limitação em banda, os resultados mostram que este sistema, na forma como foi proposto também não é robusto com relação a esta limitação, especialmente quando o canal atua sobre as componentes em baixas frequências do sinal transmitido. Porém, este problema pode ser contornado com a modificação apresentada na Figura 10, ou seja, o acréscimo de um filtro passa-banda na malha do oscilador de modo eliminar as componentes que são rejeitadas pelo canal de transmissão.

Aqui considerou-se que na banda de transmissão o canal não distorce o sinal transmitido. Esta degradação normalmente é tratada por meio de equalizadores. Como incorporar este tipo de solução aos osciladores caóticos no transmissor e no receptor é tópico de pesquisa atual.

5. REFERÊNCIAS

- [1] L. M. Pecora e T. L. Carroll, "Synchronization in Chaotic Systems", *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 8, pág. 821-824, 1990.
- [2] T. L. Carroll e L. M. Pecora, "Synchronizing Chaotic Circuits", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 38, pág. 453, 1991.
- [3] L. M. Pecora e T. L. Carroll, "Driving Systems with Chaotic Signals", *Physical Review*, vol. A44, pág. 2374, 1991.
- [4] C. W. Wu e L. O. Chua, "A Simple Way to Synchronize Chaotic Systems With Applications to Secure Communication Systems", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 3, pág. 1619-1627, 1993.
- [5] T. Ushio, T. Innani e S. Kodama, "Digital Communication Systems Based on In-Phase and Anti-Phase Chaotic Synchronization", *IEICE Transactions on Fundamentals*, vol. E79-A, pág. 1689, 1996.
- [6] C. L. Koh e T. Ushio, "Digital Communication Method Based on M-Synchronized Chaotic Systems", *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, vol. 44, pág. 383, 1997.
- [7] K. M. Cuomo e A. V. Oppenheim, "Chaotic Signal and Systems for Communications", *Proceedings of 1993 IEEE ICASSP III*, vol. 3, pág. 137, 1993.
- [8] E. Lorenz, "Deterministic non-periodic flows", *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, pág. 130, 1963.
- [9] M. F. Gameiro e H. M. Rodrigues, "Synchronization in Communication Systems. Robustness with Respect to Parameter Variation", *Separatas do 49o. Simpósio Brasileiro de Análise*, pág. 435, 1999.

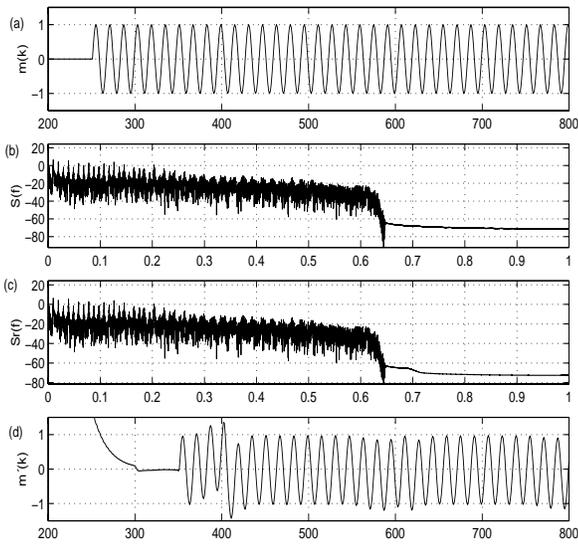


Figura 11. Sinais do sistema da Figura 10 para $f_{ci} = 0$, $f_{cs} = 0$, $f_{si} = 0$ e $f_{ss} = 0$, $9f_{cs} = 0$, 63 . (a) Trecho do sinal de informação. (b) Densidade espectral de potência em dB do sinal na saída do transmissor. O eixo das frequências está normalizado com relação a $f_a/2$. (c) Densidade espectral de potência em dB do sinal na entrada do receptor. (d) Trecho do sinal recuperado.

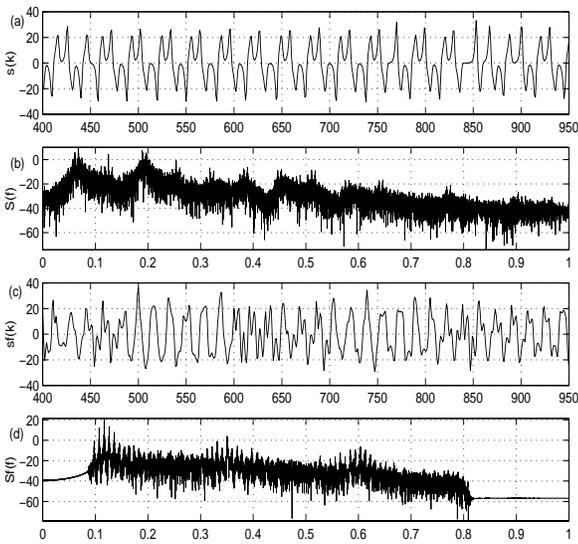


Figura 12. Comparação entre os sinais $s(k)$ e $s_F(k)$, respectivamente saídas do transmissor da Figura 3 e do transmissor da Figura 10 para $f_{ci} = 0$, 1 e $f_{cs} = 0$, 8 . (a) Aspecto temporal de $s(k)$. (b) Densidade espectral de potência em dB de $s(k)$. (c) Aspecto temporal de $s_F(k)$. (d) Densidade espectral de potência em dB de $s_F(k)$. Note que $s_F(k)$ apesar de possuir banda limitada possui características caóticas.

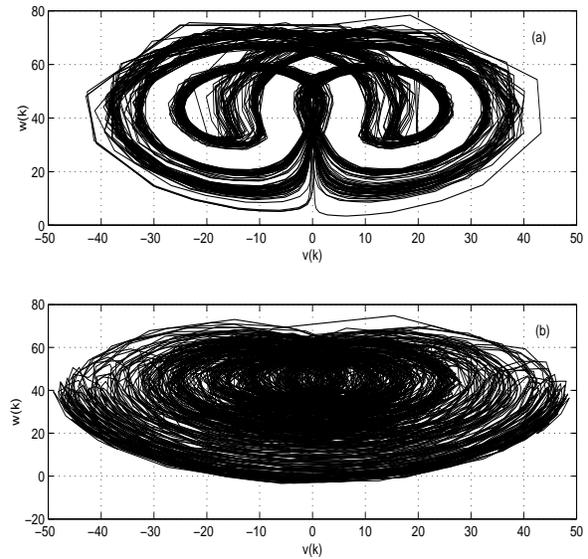


Figura 13. Atratores caóticos dos transmissores com e sem a inserção do filtro $H_s(z)$. (a) Projeção do atrator do transmissor da Figura 3. (b) Projeção do atrator do transmissor da Figura 10 para $f_{ci} = 0$, 1 e $f_{cs} = 0$, 8 . A estrutura aqui parece ser bem mais complexa.

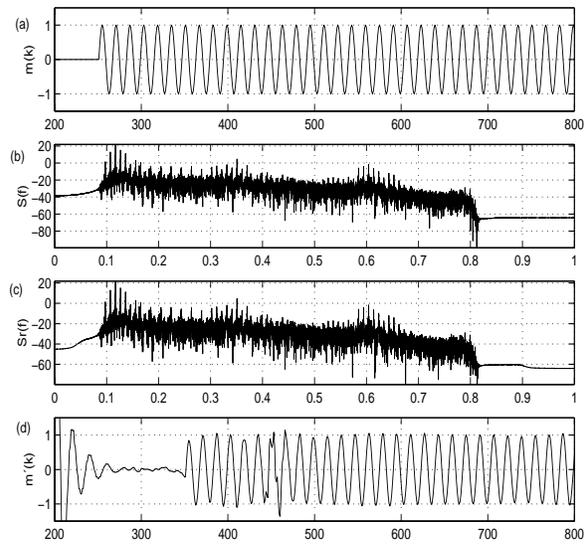


Figura 14. Sinais do sistema da Figura 10 para $f_{ci} = 0$, 05 , $f_{cs} = 0$, 9 , $f_{si} = 0$, 1 e $f_{ss} = 0$, 8 . (a) Trecho do sinal de informação. (b) Densidade espectral de potência em dB do sinal na saída do transmissor. O eixo das frequências está normalizado com relação a $f_a/2$. (c) Densidade espectral de potência em dB do sinal na entrada do receptor. (d) Trecho do sinal recuperado.