

# ANÁLISE DE CÓDIGOS DE BLOCO EM CANAIS COM DESVANECIMENTO CORRELACIONADO NÃO-SELETIVO EM FREQUÊNCIA

CECILIO PIMENTEL, RODRIGO P. RAMOS E JULIO A. DE OLIVEIRA FILHO

Grupo de Pesquisas em Comunicações - CODEC  
 Departamento de Eletrônica e Sistemas - UFPE  
 Caixa Postal 7800 - CEP 50711-970 - Recife  
 E-mail: {cecilio,rramos}@npd.ufpe.br, juliofil@nlink.com.br

## RESUMO

Avaliaremos o desempenho de códigos de bloco entrelaçados (com nível de entrelaçamento finito) em canais modelados como canais de estados finitos (CEF), utilizando um método analítico. Usaremos um modelo CEF que caracteriza um canal discreto que compreende um modulador FSK (*frequency shift keying*) binário, um canal com desvanecimento Rayleigh não seletivo em frequência e correlacionado no tempo com uma densidade espectral de potência conhecida, e um demodulador não coerente. Será desenvolvida uma nova metodologia para a identificação de uma classe de modelos CEF a partir do conhecimento de um conjunto de seqüências de erros produzidas pelo canal discreto. Para um dado conjunto de parâmetros do canal, como por exemplo, máxima frequência Doppler e relação sinal ruído, investigaremos o compromisso entre a capacidade de correção do código e o nível de entrelaçamento para se obter um certo nível de desempenho.

## 1. INTRODUÇÃO

Em um canal de comunicações móveis típico, o sinal transmitido sofre atenuação e distorção causadas por propagação multipercursiva e sombreamento. O canal com desvanecimento Rayleigh não seletivo em frequência distorce o sinal transmitido com dois ruídos independentes: um ruído multiplicativo Gaussiano complexo, variante no tempo com média zero, e um ruído aditivo Gaussiano branco. Como consequência, mudanças abruptas na energia do sinal recebido podem acontecer, levando à ocorrência de surtos de erros na seqüência recebida. A obtenção de comunicação confiável em um canal com surtos de erros depende fortemente da construção de esquemas de codificação eficientes.

A aplicação conjunta de entrelaçamento e códigos corretores de erros projetados para corrigir erros aleatórios tem sido proposta na literatura para possibilitar o emprego destes códigos em canais com surtos [1]-[7]. Denominaremos canal entrelaçado o bloco em cascata composto pelo entrelaçador, pelo canal discreto e pelo desentrelaçador. Entenda-se por canal discreto o bloco composto pelo modulador digital FSK, pelo canal físico e pelo demodulador,

cujos símbolos de entrada e saída pertencem a um alfabeto finito. Utilizamos modelos matemáticos denominados canais de estados finitos (CEF) para descrever o comportamento destes canais discretos. O entrelaçamento e o correspondente desentrelaçamento torna a seqüência de erros aleatória, separando os dígitos de erro por uma quantidade chamada nível de entrelaçamento, denotada por  $I_d$ . No receptor, dois dígitos recebidos consecutivos são corrompidos por dois dígitos de erro separados de  $I_d$  intervalos entre si. Se o valor de  $I_d$  é suficientemente grande (também chamado entrelaçamento com nível infinito) o canal pode ser considerado sem memória e a teoria de códigos corretores de erros aleatórios é efetiva neste caso. Uma importante consideração prática consiste em determinar o valor do nível de entrelaçamento para que este seja considerado infinito (após este valor, não há melhoria de desempenho com o aumento de  $I_d$ ).

Em vários trabalhos analíticos anteriores a respeito do desempenho de esquemas de codificação em canais com desvanecimento, tem-se assumido entrelaçamento com nível infinito. Em diversas aplicações móveis [2], entretanto, restrições de atraso podem limitar o máximo valor de  $I_d$ . Portanto, não é possível eliminar totalmente a memória do canal, mas apenas reduzir a severidade do surto.

O objetivo deste artigo é analisar teoricamente o desempenho de códigos de bloco (usamos como exemplo códigos BCH), utilizando um entrelaçamento finito em um canal com desvanecimento correlacionado. A degradação do desempenho resultante do entrelaçamento finito será investigada. Também será observado o compromisso entre a capacidade de correção do código e o nível de entrelaçamento necessário para se obter uma probabilidade de erro desejada.

O método que propomos para analisar este sistema de comunicações tem dois passos. Primeiramente, modelaremos o canal discreto de comunicações entre a entrada do modulador FSK e a saída do demodulador (quantizada em dois níveis) como uma seqüência aditiva de erros binária produzida por uma classe particular de modelos CEF com dois estados, conhecida como canal Gilbert-Elliott (CGE). Mostraremos uma nova metodologia para a parametrização do CGE, que expressa os parâmetros do modelo como uma função simples de seqüências binárias de erro produzidas pelo canal discreto. Desta forma, usaremos a fórmula da probabilidade multidimensional de uma seqüência de erro

Este trabalho recebeu suporte parcial do Conselho Nacional para o Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), No. 300987/96-0.

apresentada em [8] para parametrizar o canal CGE. Em seguida, apresentaremos uma fórmula de recorrência para determinar a probabilidade de seqüências de erros com peso de Hamming  $m$  e comprimento  $n$  para o canal CGE entrelaçado. Uma descrição detalhada da técnica combinatorial proposta para desenvolver esta fórmula recursiva para canais não entrelaçados é mostrada em [10]. Neste artigo, mostraremos como o nível de entrelaçamento pode ser facilmente incorporado na fórmula de recorrência.

## 2. MODELO DO SISTEMA

Uma palavra de um código BCH binário  $(n, k)$  de comprimento  $n$  e taxa  $R_c = k/n$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ , é a entrada de um entrelaçador de bloco com parâmetros  $(I_d, n)$ . Este entrelaçador consiste de um arranjo matricial com  $n$  colunas (comprimento do código) e  $I_d$  linhas (nível de entrelaçamento). Os dígitos são escritos no arranjo em linhas e lidos em colunas. O desentrelaçador faz a operação inversa. Cada linha do desentrelaçador é uma palavra recebida  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ , onde  $r_i = c_i + e_i$ , com adição módulo 2, e  $e_i$  denota um símbolo de erro binário produzido por um CGE parametrizado que modela a seqüência de erros produzida por um canal com desvanecimento correlacionado. Note que dois dígitos consecutivos de uma mesma palavra recebida são corrompidos por dois dígitos de erro separados por  $I_d$ . Uma breve descrição do CGE é dada a seguir.

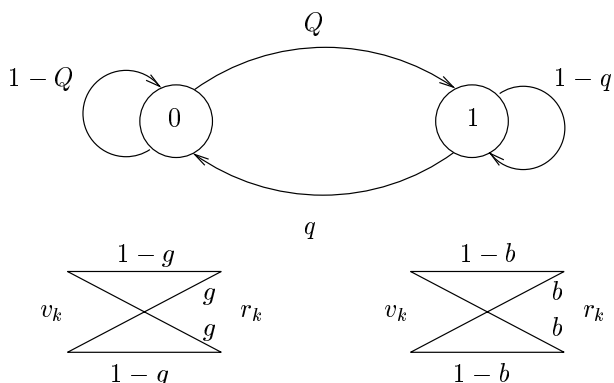


Figura 1: Modelo Gilbert-Elliott para canais com memória.

O modelo CGE mostrado na Fig. 1 é descrito por uma cadeia de Markov  $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ , estacionária, com dois estados. Seja  $\mathbf{P}$  a matriz de transição de probabilidades e  $\mathbf{\Pi} = [\pi_0, \pi_1]^T$  a matriz coluna de probabilidades estacionárias (onde  $[\cdot]^T$  indica a transposta de uma matriz). Quando a cadeia se encontra no estado 0, o símbolo de erro no  $k$ -ésimo intervalo,  $e_k$ , é igual a um (erro) com probabilidade  $g$ , ou zero (sem erro) com probabilidade  $1-g$ . Quando a cadeia se encontra no estado 1, o símbolo  $e_k$  é igual a um com probabilidade  $b$ , ou zero com probabilidade  $1-b$ . Como  $g < b$ , por definição, os estados 0 e 1 são ditos estado bom e estado ruim, respectivamente. Defina duas matrizes,  $\mathbf{P}(0)$  e  $\mathbf{P}(1)$ , onde o  $(i, j)$ -ésimo elemento de  $\mathbf{P}(e_k)$  é a probabilidade da cadeia transicionar do estado  $i$  para o  $j$  e gerar um símbolo

de erro  $e_k$ . O modelo CGE é especificado pelas seguintes matrizes:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-Q & Q \\ q & 1-q \end{bmatrix}; \quad (1)$$

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} (1-Q)(1-g) & Q(1-b) \\ q(1-g) & (1-q)(1-b) \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} (1-Q)g & Qb \\ qg & (1-q)b \end{bmatrix}; \quad (3)$$

$$\mathbf{\Pi} = [\pi_0 \quad \pi_1]^T = \left[ \frac{q}{Q+q} \quad \frac{Q}{Q+q} \right]^T, \quad (4)$$

onde  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(0) + \mathbf{P}(1)$ . A probabilidade de uma seqüência de erros de comprimento  $n$ ,  $\mathbf{e}_n = (e_1 e_2 \dots e_n)$ , gerada pelo modelo, é dada por:

$$P(\mathbf{e}_n) = \mathbf{\Pi}^T \left( \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(e_k) \right) \mathbf{1}, \quad (5)$$

onde  $\mathbf{1}$  é um vetor coluna com todos os elementos iguais a 1. O sistema de comunicações binário que será modelado pelo CGE será descrito a seguir.

O modelo do sistema de comunicações é composto por três blocos: uma modulação FSK binária, um canal com desvanecimento Rayleigh correlacionado no tempo com espectro de potência conhecido e uma demodulação não coerente com quantização abrupta. O sinal recebido é corrompido por um desvanecimento Rayleigh não seletivo em frequência e por um ruído aditivo Gaussiano branco com densidade espectral de potência bilateral igual a  $N_0/2$ . A envoltória complexa do processo de desvanecimento,  $\tilde{G}(t)$ , é um processo Gaussiano complexo e estacionário, cuja função de covariância  $C(\tau)$  é dada por:

$$C(\tau) = \frac{1}{2} \mathbf{E}\{[\tilde{G}(t+\tau)][\tilde{G}^*(t)]\} = J_0(2\pi f_D \tau),$$

onde  $J_0(x)$  é a função de Bessel de primeira espécie de ordem zero e  $f_D$  é a máxima frequência Doppler. Seja  $E_k$  uma variável aleatória, tal que  $E_k = 0$  se o símbolo transmitido for recebido corretamente e  $E_k = 1$  se o símbolo transmitido for recebido incorretamente. É esta seqüência de erros que será modelada pelo CGE. A probabilidade de uma seqüência de erros de comprimento  $n$ ,  $\mathbf{e}_n = (e_1 e_2 \dots e_n)$ , para um canal com desvanecimento Rayleigh é [8]:

$$P(\mathbf{e}_n) = \sum_{l_1=e_1}^{M-1} \dots \sum_{l_n=e_n}^{M-1} \left( \prod_{k=1}^n \frac{\binom{M-1}{l_k} (-1)^{l_k+e_k}}{l_k+1} \right) \frac{1}{\det(\mathbf{I} + \frac{E_s}{N_0} \mathbf{C}\mathbf{F})}, \quad (6)$$

onde  $\mathbf{C}$  é a matriz  $n \times n$  de covariância normalizada do processo de desvanecimento, sendo seu  $(i, j)$ -ésimo elemento igual a  $J_0(2\pi f_D(i-j)T)$ , onde  $1/T$  a taxa de sinalização, e  $\mathbf{F}$  é uma matriz diagonal definida como  $\mathbf{F} = \text{diag}(\frac{l_1}{l_1+1}, \dots, \frac{l_n}{l_n+1})$ .

A Referência [1] apresenta um método para se determinar os parâmetros do modelo CGE que representa o canal com desvanecimento aqui considerado. Em [1] os parâmetros da cadeia de Markov são obtidos através da quantização do processo de desvanecimento em dois níveis, onde este nível é determinado de forma empírica. As probabilidades de

transição são obtidas usando uma expressão para a taxa de cruzamento de um processo Gaussiano em um certo nível. Na próxima seção, apresentaremos um método alternativo para modelar diretamente a seqüência de erro binária do canal discreto (seqüência obtida pela adição módulo 2 entre a seqüência transmitida na entrada do modulador e a seqüência recebida na saída do demodulador). O canal com desvanecimento tem dois parâmetros: a relação sinal-ruído ( $E_s/N_0$ ) e a densidade espectral de potência que é descrita pela máxima freqüência Doppler normalizada  $f_D T$ . Para um valor fixo de  $f_D T$ , encontraremos os parâmetros do modelo CGE para vários valores de  $E_s/N_0$ .

### 3. ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DO CGE

Seja o CGE descrito pelas matrizes  $\mathbf{P}(0)$  e  $\mathbf{P}(1)$ , dadas em (2) e (3). Defina  $\epsilon$  e  $\delta$  símbolos binários e  $\sigma$  qualquer seqüência binária de comprimento finito. Considere  $\phi$  uma seqüência vazia, ou seja, uma seqüência de comprimento zero com a seguinte propriedade  $\phi\sigma = \sigma\phi$ .

**Lema 1** *A probabilidade de qualquer seqüência  $\sigma$  gerada pelo CGE satisfaz a seguinte relação de recorrência:*

$$P(\sigma\epsilon\delta) = c(\epsilon, \delta)P(\sigma\epsilon) + d(\epsilon, \delta)P(\sigma), \quad (7)$$

onde

$$\begin{aligned} c(0, 0) &= (1-g)(1-Q) + (1-b)(1-q); \\ c(1, 1) &= g(1-Q) + b(1-q); \\ d(0, 0) &= -(1-q-Q)(1-g)(1-b); \\ d(1, 1) &= -(1-q-Q)gb; \\ c(1, 0) &= 1 - c(1, 1), \quad c(0, 1) = 1 - c(0, 0); \\ d(0, 1) &= -d(0, 0), \quad d(1, 0) = -d(1, 1). \end{aligned} \quad (8)$$

□

O Lema 1 é provado no Apêndice A. Uma conseqüência imediata deste lema é que, fazendo-se  $\sigma = \phi$ , podemos escrever  $P(\epsilon\delta) = c(\epsilon, \delta)P(\epsilon) + d(\epsilon, \delta)$ . Portanto, usando-se (7), podemos determinar a probabilidade de qualquer seqüência de comprimento finito de forma recursiva, a partir do conhecimento de  $P(0)$  ou  $P(1)$ , e das constantes  $c(\epsilon, \delta)$  e  $d(\epsilon, \delta)$ . O resultado apresentado no lema nos permite chegar a valores para  $c(\epsilon, \delta)$  e  $d(\epsilon, \delta)$  e conseqüentemente para  $b$ ,  $g$ ,  $q$  e  $Q$  como função das seqüências de erro produzidas pelo canal. Substituindo  $\sigma = \phi$  em (7) e em seguida  $\sigma = \epsilon$ , obtemos, respectivamente:

$$P(\epsilon\delta) = c(\epsilon, \delta)P(\epsilon) + d(\epsilon, \delta); \quad (9)$$

$$P(\epsilon\epsilon\delta) = c(\epsilon, \delta)P(\epsilon\epsilon) + d(\epsilon, \delta)P(\epsilon). \quad (10)$$

que é representado matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} P(\epsilon) & 1 \\ P(\epsilon\epsilon) & P(\epsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(\epsilon, \delta) \\ d(\epsilon, \delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\epsilon\delta) \\ P(\epsilon\epsilon\delta) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Resolvendo este sistema chegamos às expressões:

$$c(\epsilon, \delta) = \frac{P(\epsilon\epsilon\delta) - P(\epsilon\delta)P(\epsilon)}{P(\epsilon\epsilon) - P^2(\epsilon)}, \quad (12)$$

e

$$d(\epsilon, \delta) = \frac{P(\epsilon\delta)P(\epsilon\epsilon) - P(\epsilon\epsilon\delta)P(\epsilon)}{P(\epsilon\epsilon) - P^2(\epsilon)}. \quad (13)$$

O Apêndice B apresenta a prova da seguinte proposição que sumariza a estimação dos parâmetros do canal CGE, usando um conjunto de seqüências de erro produzidas pelo canal de comprimento no máximo 3.

**Proposição 1** *Se  $P(01) \neq P(0)P(1)$ , os parâmetros do canal Gilbert-Elliott são univocamente determinados pelas quatro probabilidades  $P(0)$ ,  $P(00)$ ,  $P(000)$  e  $P(111)$ . Os parâmetros  $b$  e  $g$  são as raízes da equação quadrática:*

$$\begin{aligned} &[-1 + c(1, 1) + c(0, 0)]x^2 \\ &+ [1 - c(1, 1) - c(0, 0) + d(1, 1) - d(0, 0)]x - d(1, 1) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

e os parâmetros  $Q$  e  $q$  são dados por:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{c(0, 0)b - c(1, 1)(1-b) + (g-b)}{g-b}; \\ q &= \frac{c(0, 0)g - c(1, 1)(1-g) + (b-g)}{b-g}. \end{aligned} \quad (15)$$

□

A partir do conhecimento de  $c(\epsilon, \epsilon)$  e  $d(\epsilon, \epsilon)$ , onde  $\epsilon \in \{0, 1\}$ , que são obtidos substituindo as expressões da probabilidade de de seqüências de erro em (12) e (13), podemos usar os resultados da Proposição 1 para determinar os parâmetros do modelo CGE.

### 4. ANÁLISE DE DESEMPENHO

Nesta seção, consideraremos a probabilidade de uma decodificação incorreta de uma seqüência codificada transmitida em um CGE entrelaçado. A probabilidade de erro após a decodificação (PED) é definida como a probabilidade de ocorrência de uma palavra recebida com mais de  $t$  símbolos errados, onde  $t$  é a capacidade de correção do código. Assim:

$$\text{PED} = \sum_{m=t+1}^n P(m, n), \quad (16)$$

onde  $P(m, n)$  é a probabilidade de  $m$  símbolos errados em uma palavra recebida de comprimento  $n$ .

Empregaremos o método descrito em [10] para canais não entrelaçados para encontrar uma fórmula de recorrência para  $P(m, n)$  válida para modelos CEF entrelaçados descritos por duas matrizes  $\mathbf{P}(0)$  e  $\mathbf{P}(1)$ . Se  $s$  e  $z$  são indeterminantes que enumeram o número de símbolos errados e o comprimento de uma seqüência recebida, respectivamente, então a probabilidade  $P(m, n)$  pode ser expressa como um coeficiente do termo  $s^m z^n$  da série de potências  $H(s, z)$ , onde  $H(s, z)$  é expressa como a razão entre dois polinômios, podendo ser escrita da seguinte forma [10]:

$$H(s, z) = \mathbf{\Pi}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}(0)z - \mathbf{P}(1)sz)^{-1} \mathbf{1}, \quad (17)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Usando o denominador de (17), podemos encontrar uma fórmula de recorrência para  $P(m, n)$  que é computacionalmente viável.

Quando um entrelaçamento com nível  $I_d$  é incorporado ao sistema, dois dígitos recebidos consecutivos são corrompidos por dois dígitos de erro separados de  $I_d$  intervalos entre si, ou seja,  $I_d - 1$  símbolos de erro entre dois símbolos recebidos não são relevantes para a decodificação. Este comportamento é expressado no modelo matemático inserindo-se um termo em (17), que se torna:

$$H(s, z) = \mathbf{\Pi}^T [\mathbf{I} - z(\mathbf{P}(0) - \mathbf{P}(1)s)\mathbf{P}^{I_d-1}]^{-1} \mathbf{1}. \quad (18)$$

A Fig. 2 mostra uma curva numérica para o desempenho PED de um código BCH (127, 64) entrelaçado sobre modelos CGE que descrevem o canal com desvanecimento Rayleigh. Os gráficos mostram o comportamento da PED em função da relação sinal-ruído por símbolo binário, onde  $E_s = R_c E_b$ , para vários valores do nível de entrelaçamento. A Equação (18) foi usada para calcular a PED destes códigos. Em particular,  $I_d = 1$  indica que não há entrelaçamento. Consideramos um esquema de modulação FSK binária, com  $f_D T = 10^{-3}$ . Utilizando os resultados obtidos em (7) e (15), obtivemos os parâmetros de cada CGE que modela o canal com desvanecimento referente a cada valor de  $E_b/N_0$ . Várias combinações de  $E_b/N_0$  e  $I_d$  podem ser escolhidas para se obter um certo valor de desempenho. Por exemplo, para  $PED = 10^{-3}$ , pode-se usar um entrelaçamento com  $I_d = 200$  se não houver restrição severa de atraso, onde se tem  $E_b/N_0 = 15\text{dB}$ , ou pode-se optar por não utilizar entrelaçamento, sendo necessário um acréscimo de energia da ordem de 6dB.

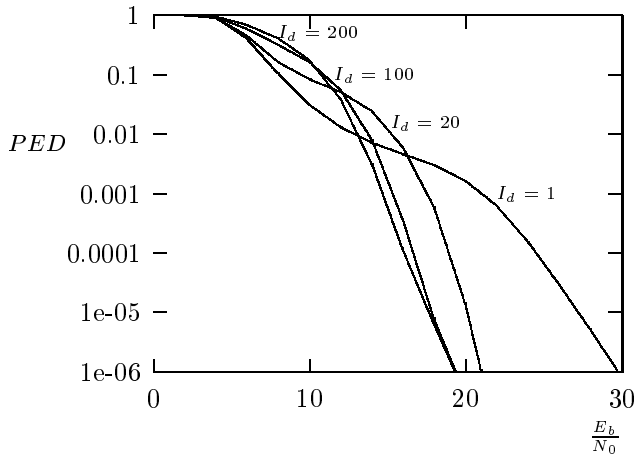


Figura 2: Gráfico de PED em função de  $E_b/N_0$ , tendo como parâmetro o nível de entrelaçamento  $I_d$ .

A Fig. 3 mostra como a PED varia com a frequência Doppler normalizada, para vários valores do nível de entrelaçamento. É importante salientar que para cada valor de  $f_D T$  existe um modelo CGE com parâmetros específicos. Para valores mais altos de  $f_D T$ , por exemplo valores maiores que  $10^{-2}$ , diz-se que o desvanecimento é rápido (*fast fading*) [2]. Neste caso, a cadeia que modela estes canais tem um maior transicionamento entre estados, o que é uma característica típica dos canais sem memória. Para valores

mais baixos de  $f_D T$ , digamos menores que  $10^{-4}$ , diz-se que o desvanecimento é muito lento (*very slow fading*) [2]. Nestes casos, a cadeia transiciona menos, causando a ocorrência de surtos, o que caracteriza canais com memória. A curva mostra que para um valor de  $f_D T$  aproximadamente igual a 0,006 não há diferença significativa em se aplicar um entrelaçamento com  $I_d = 100$  e com  $I_d = 200$  e, à medida em que  $f_D T$  aumenta, este comportamento torna-se cada vez mais claro, pois o canal tem características cada vez mais próximas às dos canais sem memória, fazendo com que o nível de entrelaçamento possa ser reduzido sem perda de desempenho, como por exemplo, para  $f_D T = 0,02$  um entrelaçamento com  $I_d = 20$  é suficiente para se obter o mesmo desempenho que  $I_d = 200$ . Para valores de  $f_D T$  menores que 0,006, como o canal tem em média surtos muito longos, a utilização de um entrelaçador com  $I_d = 200$  não tem mais o efeito desejado. É interessante notar também, a partir do gráfico, que, de acordo com as características do canal, podemos dimensionar um valor ótimo para o nível de entrelaçamento  $I_d$ .

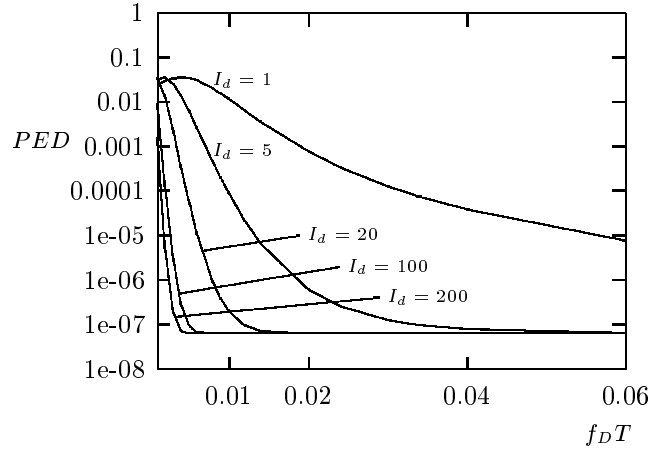


Figura 3: Gráfico de PED em função de  $f_D T$ , tendo como parâmetro  $I_d$ .

A Fig. 4 mostra a probabilidade de erro após a decodificação em função do nível de entrelaçamento, comparando o desempenho do CGE obtido através do modelamento utilizado nas Seções 3 e 4 e o valor de PED obtido através de (6). Utilizamos uma modulação FSK com  $E_s/N_0 = 20\text{dB}$ ,  $f_D T = 10^{-2}$  e um código BCH (7,4). Os parâmetros do modelo CGE obtidos são  $g = 0,0018$ ,  $b = 0,3355$ ,  $q = 0,01244$  e  $Q = 0,00304$ . Podemos observar no gráfico que, se usarmos um código entrelaçado, o CGE pode ser usado para modelar este tipo de canal com desvanecimento Rayleigh.

## 5. CONCLUSÕES

Neste artigo, analisamos o modelamento de canais com desvanecimento utilizando o modelo CGE, bem como calculamos o desempenho dos códigos de bloco nestes canais. Adotamos como critério de desempenho a probabilidade de

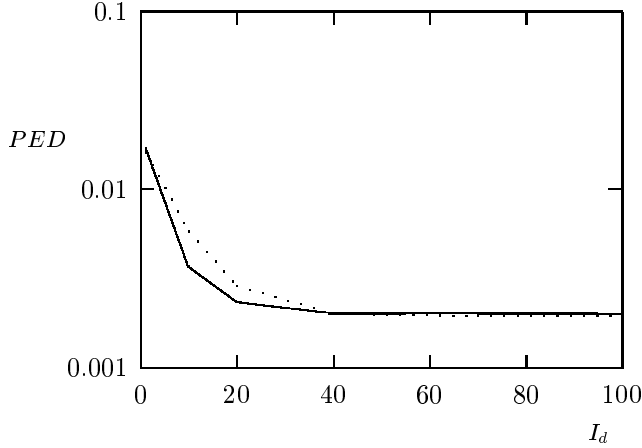


Figura 4: Gráfico de PED em função de  $I_d$ , para o modelo CGE (linha pontilhada) e o canal discreto (linha sólida).

erro após a decodificação. Desenvolvemos um método para estimar os parâmetros do CGE e estimamos a melhoria de desempenho do código quando é aplicado o entrelaçamento. A partir destas análises, foi possível também dimensionar um valor ótimo para o nível de entrelaçamento  $I_d$ , para vários parâmetros do canal discreto, tais como,  $E_b/N_0$  e  $f_D T$ . Por fim, demonstramos a precisão da utilização do modelo CGE para canais com desvanecimento, comparando seu desempenho com o desempenho do canal real.

## Apêndice A

Este apêndice demonstra os resultados obtidos em (7). Seja  $S_n$  o estado da cadeia de Markov após o a  $n$ -ésima transição e  $\mathbf{e}_n$  a seqüência de tamanho finito  $n$  de símbolos gerados pelo modelo CGE. Definimos  $Q(\boldsymbol{\sigma}, i) = P(\mathbf{e}_n = \boldsymbol{\sigma}, S_n = i)$ . Seja  $b_{i,\epsilon}$  a probabilidade do canal gerar o símbolo  $\epsilon$  dado que a cadeia se encontra no estado  $i$ , ou seja,  $b_{i,\epsilon} = P(E_n = \epsilon | S_k = i)$ , por exemplo,  $b_{0,1} = g$  e  $b_{1,1} = b$ . Considere ainda  $p_{i,j}$  a probabilidade de transição ao estado  $j$ , dado que a cadeia se encontra no estado  $i$ , a saber,  $p_{i,j} = P(S_{k+1} = j | S_k = i)$ , por exemplo,  $p_{0,1} = Q$ .

Denominando  $i^*$  o estado complementar de  $i$ , por exemplo quando  $i = 0$  implica  $i^* = 1$  e vice-versa, podemos escrever a probabilidade de uma seqüência qualquer na forma:

$$P(\boldsymbol{\sigma}) = Q(\boldsymbol{\sigma}, i^*) + Q(\boldsymbol{\sigma}, i). \quad (19)$$

A seguinte razão também é válida para o modelo CGE:

$$P(\boldsymbol{\sigma}\epsilon) = Q(\boldsymbol{\sigma}, i^*)b_{i^*,\epsilon} + Q(\boldsymbol{\sigma}, i)b_{i,\epsilon}. \quad (20)$$

De (19) e (20), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b_{i^*,\epsilon} & b_{i,\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(\boldsymbol{\sigma}, i^*) \\ Q(\boldsymbol{\sigma}, i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\boldsymbol{\sigma}) \\ P(\boldsymbol{\sigma}\epsilon) \end{bmatrix},$$

ou

$$\begin{bmatrix} Q(\boldsymbol{\sigma}, i^*) \\ Q(\boldsymbol{\sigma}, i) \end{bmatrix} = \frac{1}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}} \begin{bmatrix} b_{i,\epsilon} & -1 \\ -b_{i^*,\epsilon} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\boldsymbol{\sigma}) \\ P(\boldsymbol{\sigma}\epsilon) \end{bmatrix}.$$

O que nos leva, de imediato, às equações:

$$Q(\boldsymbol{\sigma}, i) = \frac{-b_{i^*,\epsilon}}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}P(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}P(\boldsymbol{\sigma}\epsilon); \quad (21)$$

$$Q(\boldsymbol{\sigma}, i^*) = \frac{b_{i,\epsilon}}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}P(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}P(\boldsymbol{\sigma}\epsilon). \quad (22)$$

Partindo do modelo CGE, podemos deduzir que:

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\sigma}\epsilon\delta) &= Q(\boldsymbol{\sigma}, i^*)b_{i^*,\epsilon}[p_{i^*,i^*}b_{i^*,\delta} + p_{i^*,i}b_{i,\delta}] \\ &+ Q(\boldsymbol{\sigma}, i)b_{i,\epsilon}[p_{i,i^*}b_{i^*,\delta} + p_{i,i}b_{i,\delta}]. \end{aligned} \quad (23)$$

Substituindo (21) e (22) em (23), obtemos:

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\sigma}\epsilon\delta) &= \left( \frac{b_{i,\epsilon}b_{i^*,\epsilon}}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}P(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{b_{i^*,\epsilon}}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}P(\boldsymbol{\sigma}\epsilon) \right) \\ &\quad (p_{i^*,i^*}b_{i^*,\delta} + p_{i^*,i}b_{i,\delta}) \\ &+ \left( \frac{-b_{i^*,\epsilon}b_{i,\epsilon}}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}P(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{b_{i,\epsilon}}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}P(\boldsymbol{\sigma}\epsilon) \right) \\ &\quad (p_{i,i^*}b_{i^*,\delta} + p_{i,i}b_{i,\delta}). \end{aligned} \quad (24)$$

Rearrmando os termos, concluímos:

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\sigma}\epsilon\delta) &= \left\{ \frac{b_{i,\epsilon}b_{i^*,\epsilon}}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}(p_{i^*,i^*}b_{i^*,\delta} + p_{i^*,i}b_{i,\delta}) \right. \\ &- \left. \frac{b_{i^*,\epsilon}b_{i,\epsilon}}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}(p_{i,i^*}b_{i^*,\delta} + p_{i,i}b_{i,\delta}) \right\} P(\boldsymbol{\sigma}) \\ &+ \left\{ \frac{b_{i,\epsilon}}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}(p_{i,i^*}b_{i^*,\delta} + p_{i,i}b_{i,\delta}) \right. \\ &- \left. \frac{b_{i^*,\epsilon}}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}(p_{i^*,i^*}b_{i^*,\delta} + p_{i^*,i}b_{i,\delta}) \right\} P(\boldsymbol{\sigma}\epsilon), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} c(\epsilon, \delta) &= \frac{b_{i,\epsilon}}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}(p_{i,i^*}b_{i^*,\delta} + p_{i,i}b_{i,\delta}) \\ &- \frac{b_{i^*,\epsilon}}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}(p_{i^*,i^*}b_{i^*,\delta} + p_{i^*,i}b_{i,\delta}); \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} d(\epsilon, \delta) &= \frac{b_{i,\epsilon}b_{i^*,\epsilon}}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}(p_{i^*,i^*}b_{i^*,\delta} + p_{i^*,i}b_{i,\delta}) \\ &- \frac{b_{i^*,\epsilon}b_{i,\epsilon}}{b_{i,\epsilon} - b_{i^*,\epsilon}}(p_{i,i^*}b_{i^*,\delta} + p_{i,i}b_{i,\delta}). \end{aligned} \quad (26)$$

Portanto, encontrando-se  $b_{i,\epsilon}$  e  $p_{i,j}$  para todos os valores de  $i, j$  e  $\epsilon$  e substituindo-se em (26), chega-se finalmente à Equação (8).

## Apêndice B

Demonstraremos neste apêndice os resultados da Proposição 1 obtidos em (14) e (15). Manipulando-se as equações de  $c(\epsilon, \delta)$  e  $d(\epsilon, \delta)$ , podemos demonstrar estes resultados. Partindo-se de:

$$c(0, 0) = (1 - g)(1 - Q) + (1 - b)(1 - q); \quad (27)$$

$$c(1, 1) = g(1 - Q) + b(1 - q); \quad (28)$$

$$d(0, 0) = -(1 - q - Q)(1 - g)(1 - b); \quad (29)$$

$$d(1, 1) = -(1 - q - Q)gb, \quad (30)$$

e substituindo (28) em (27), obtemos:

$$1 - c(0, 0) - c(1, 1) = -\mu, \quad (31)$$

onde  $\mu = 1 - q - Q$  é a memória do canal CGE. Logo, substituindo-se (31) em (30), obtém-se:

$$gb = -\frac{d(1, 1)}{\mu}. \quad (32)$$

Por outro lado, substituindo (30) em (29):

$$gb\left(\frac{d(0, 0)}{d(1, 1)} - 1\right) = 1 - b - g. \quad (33)$$

Combinando as equações obtidas em (32) e (33) para  $b$  e  $g$ , chegaremos à equação quadrática (15):

$$-\mu b^2 + (\mu + d(0, 0) - d(1, 1))b + d(1, 1) = 0, \quad (34)$$

que é a mesma se derivada para  $g$ . Concluímos então que  $b$  e  $g$  são raízes desta equação.

De posse dos valores de  $b$  e  $g$ , podemos substituir o resultado de (31) em (27), obtendo:

$$q = \frac{c(0, 0)g - c(1, 1)(1 - g) + (b - g)}{b - g}, \quad (35)$$

e finalmente

$$Q = \frac{c(0, 0)b - c(1, 1)(1 - b) + (g - b)}{g - b}. \quad (36)$$

## REFERÊNCIAS

- [1] L. Wilhelmsson e L. B. Milstein, "On the effect of imperfect interleaving for the Gilbert-Elliott channel", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 47, pp. 681-688, Maio de 1999.
- [2] H. Bischl e E. Lutz, "Packet error rate in the non-interleaved Rayleigh channel", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 43, pp. 1375-1382, Abril de 1995.
- [3] A. I. Drukarev e K. P. Yiu, "Performance of error-correcting codes on channels with memory", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 34, pp. 513-521, Junho de 1986.
- [4] M. Zorzi, "Performance of FEC and ARQ error control in bursty channels under delay constraints", *Proc. VTC'98*, pp. 18-21 maio de 1998.
- [5] M. Zorzi e R. Rao, "Error statistics in data transmission over fading channels", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 46, pp. 1468-1477, Novembro de 1998.
- [6] M. Zorzi, "On the statistics of block errors in bursty channels", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 45, pp. 660-667, Junho de 1997.
- [7] J. R. Yee e E. J. Weldon, Jr., "Evaluation of the performance of error-correcting codes on a Gilbert channel", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 43, pp. 2316-2323, Agosto de 1995.
- [8] Cecilio Pimentel, "Developing Fritchman's Markov models for Rician fading channels", *Anais do XV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Recife, PE, pp.195-198, setembro de 1997.
- [9] "Interleaved coding for bursts channels", Cyclotomics' Final Report on Phase I, Small Business Inovation Research, NSF Grant No. ECS-8260180, Abril de 1983.
- [10] Cecilio Pimentel, "Generating series for error statistics of block codes on channels with memory", *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*, Vol. 13, pp. 74-82, Dezembro de 1998.