

# Um Método Analítico de Alinhamento dos Coeficientes Verticais da SA-DCT

Emilio Carlos Acocella e Abraham Alcaim

CETUC/PUC-Rio, 22453-900 Rio de Janeiro - RJ

tcemilio@gabcmt.eb.mil.br e alcaim@cetuc.puc-rio.br

## Resumo

Neste artigo, propõe-se um método analítico de alinhamento — baseado na preservação da fase — dos coeficientes das DCT verticais obtidos no primeiro passo da SA-DCT. É mostrado que, dessa forma, preserva-se a similaridade com o alinhamento dos coeficientes das DCT de imagens retangulares, cujos resultados são reconhecidamente eficientes em termos de compactação de energia. Os experimentos realizados comprovaram que o método proposto apresenta vantagens, que são mais significativas na medida em que as imagens se aproximem de um processo de Markov bidimensional de 1ª ordem com coeficiente de correlação elevado.

## 1 Introdução

É bem conhecida a eficiência da DCT (Discrete Cosine Transform) de blocos regulares de imagens bidimensionais — com dimensões horizontal e vertical fixas  $N_1 \times N_2$  — em termos de compactação de energia e decorrelação dos coeficientes. A bibliografia disponível apresenta suficientes estudos teóricos e experimentais que demonstram que a DCT, em casos típicos de imagens submetidas a compressão (TV, multimídia, etc.), proporciona resultados próximos aos da transformada Karhunen-Loève discreta, sobretudo quando a imagem apresenta as características de um processo de Markov bidimensional com alto coeficiente de correlação [1], [2].

Para objetos de forma arbitrária, entretanto, os estudos teóricos disponíveis são em número sensivelmente menor. A questão pode ser melhor compreendida a partir da descrição do método de codificação adaptativa à forma mais freqüentemente empregado, o da DCT Adaptativa à Forma (SA-DCT: Shape-Adaptive DCT), proposto em [3]. O algoritmo da SA-DCT é ilustrado pela Figura 1.

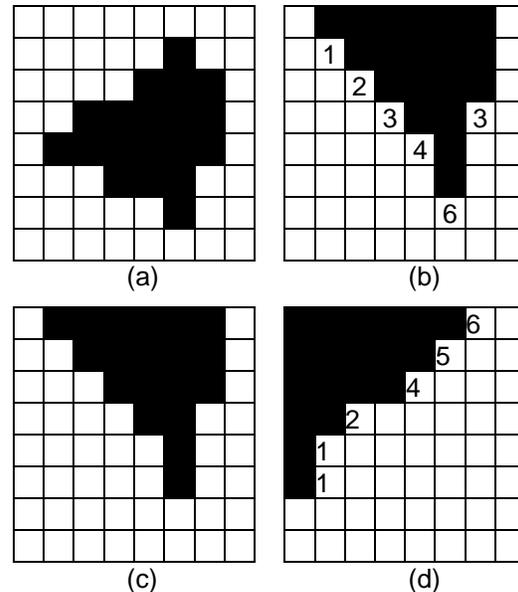


Figura 1: Transformações da região de suporte na aplicação da SA-DCT

O quadro (a) da Figura 1 representa o bloco original. Os pixels são, inicialmente, deslocados verticalmente para cima, até a coincidência de todas as colunas com a margem superior do bloco, conforme mostrado no quadro (b). Em seguida, aplica-se a cada coluna a DCT unidimensional adaptada à respectiva dimensão. A etapa seguinte é apresentada nos quadros (c) e (d) da Figura 1. As linhas são deslocadas para a esquerda até a coincidência com a margem respectiva. Aplica-se novamente, agora às linhas resultantes do deslocamento, a DCT unidimensional. O resultado dessa última operação corresponde aos coeficientes da SA-DCT.

O fato de que as dimensões das colunas são variáveis dentro de um mesmo bloco de imagem conduz ao questionamento quanto ao alinhamento ótimo — em termos de compactação de energia e decorrelação — dos coeficientes das DCT de colunas distintas. Sikora e Makai [3] propõem o alinhamento

diretamente pela ordem dos coeficientes (coeficientes de mesma ordem alinhados nas mesmas linhas), independentemente da dimensões das colunas, e afirmam que tal procedimento conduz aos resultados mais eficientes [3], [4]. Outros autores, por sua vez, discordam e apresentam trabalhos em que propõem outros alinhamentos, sempre assumindo que a imagem segue o modelo de cadeias de Markov 2-D de primeira ordem. Nesses trabalhos [5], [6], a partir da expressão do coeficiente de correlação entre dois coeficientes das DCT de colunas distintas do mesmo bloco de imagem, concluem que os coeficientes mais correlatados nem sempre são os de mesmo índice.

Em [5], Bi *et al* contradizem a afirmação de Sikora e Makai em [3, pp. 61] de que "os coeficientes  $c_l(i)$  e  $c_k(j)$ , das DCT de duas colunas  $l$  e  $k$ , com o mesmo índice ( $i = j$ ) apresentam de fato uma maior correlação que os coeficientes com índices diferentes ( $i \neq j$ )". Argumentam que isso nem sempre é verdadeiro, pois a conclusão de Sikora e Makai baseia-se no valor da correlação cruzada entre os coeficientes da DCT de duas colunas de dimensões distintas, isto é,

$$\sigma^2(c_l(i), c_k(j)) = E\{c_l(i) \cdot c_k(j)\} \quad (1)$$

quando o correto seria empregar como parâmetro de medida o que chamam de covariância normalizada, que é, na verdade, o coeficiente de correlação:

$$\rho(c_l(i), c_k(j)) = \frac{E\{c_l(i) \cdot c_k(j)\}}{\sqrt{E\{c_l^2(i)\}} \cdot \sqrt{E\{c_k^2(j)\}}} \quad (2)$$

Em seguida, procuram provar sua assertiva, sempre com base num modelo de Markov 2-D de primeira ordem com coeficiente  $\alpha=0.95$  (como Sikora e Makai), por meio de diversos exemplos em que variam as dimensões das colunas e seus deslocamentos relativos. Finalmente, propõem o emprego de uma tabela contendo todas as possíveis correspondências entre os coeficientes da DCT de duas colunas de dimensões diferentes que apresentam o máximo valor de correlação, incluindo-se ainda todas as possibilidades de deslocamento relativo. Os coeficientes das DCT das colunas (primeiro passo da SA-DCT) seriam então alinhados conforme essa tabela, como passo prévio ao cálculo das DCT das linhas (último passo da SA-DCT). Isto resultaria na obtenção das máximas compactação de energia e decorrelação dos coeficientes. Deve-se ressaltar, todavia, que não é apresentado nenhum resultado experimental com imagens

reais ou sintéticas em [5].

Em [6], Xie *et al* reiteram a restrição apresentada em [5] ao método de SA-DCT proposto por Sikora e Makai e propõem um outro esquema, em duas versões — EA-DCT (Expanded Arbitrary-shaped DCT) e SEA-DCT (Simplified EA-DCT) — empregando transformadas por extrapolação. Nesta solução, atribuem-se valores apropriados aos pixels do bloco não pertencentes ao objeto e empregam-se os algoritmos consagrados de cálculo de uma DCT de imagem retangular. Com base em resultados experimentais, os autores concluem que os esquemas das EA-DCT e SEA-DCT apresentam desempenhos similares ao da SA-DCT, em termos de taxa-distorção, mas com complexidade computacional reduzida e melhor adequação para implementação com ASIC.

Uma possível restrição às análises apresentadas, tanto por Sikora e Makai [3], [4] como em [5] e [6], é a particularização de um modelo para a imagem nem sempre válido, em particular para segmentos de imagem de forma arbitrária.

Na seqüência, desenvolve-se uma análise alternativa, independente das características estatísticas da imagem e, a partir dela, propõe-se um método de alinhamento dos coeficientes verticais pela fase. A segunda seção deste artigo trata da análise do problema do alinhamento dos coeficientes das DCT verticais. Tem-se em vista estabelecer aquele que proporciona melhor desempenho quanto à concentração de energia e decorrelação dos coeficientes finais da transformada. São apresentados os fundamentos conceituais e de implementação do método proposto.

Na terceira seção, o método de alinhamento dos índices pela fase é avaliado. Seu desempenho é comparado com o de Sikora/Makai para imagens reais e sintéticas.

A quarta seção conclui sobre as vantagens e a eficiência do método proposto neste artigo.

## 2 Análise do Problema e Fundamentos do Método Proposto

Para a análise da questão do melhor alinhamento dos coeficientes das DCT verticais, segundo passo da aplicação do algoritmo da SA-DCT, considere um objeto de forma arbitrária situado num bloco de imagem. Seja  $N_j$  a dimensão da  $j$ -ésima coluna do objeto, onde  $x_j(n)$  denota o valor do pixel na  $n$ -ésima posição dessa coluna e  $N_{max}$  o tamanho

da coluna de dimensão máxima. Os coeficientes da DCT de  $x_j(n)$  são dados por:

$$c_j(k) = S_{N_j} \cdot p_0(k) \sum_{n=0}^{N_j-1} x_j(n) \cos \left[ \frac{\pi k(n+0,5)}{N_j} \right] \quad (3)$$

onde

$$S_{N_j} = 2/N_j, p_0(0) = 1/\sqrt{2}, p_0(k) = 1 \text{ para } k \neq 0.$$

Completando-se as últimas posições de  $x_j(n)$  com zeros, de modo que  $N_{max}$  possa ser considerada como a dimensão da  $j$ -ésima coluna, a expressão dos coeficientes da DCT de  $x_j(n)$  torna-se:

$$c_j'(k') = S_{N_{max}} p_0(k') \sum_{n=0}^{N_{max}-1} x_j(n) \cos \left[ \frac{\pi k'(n+0,5)}{N_{max}} \right] \quad (4)$$

A motivação para o método proposto vem do fato de que a DCT é uma transformada eficiente em termos de compactação de energia e decorrelação de coeficientes para blocos de imagem retangulares. Assumindo-se que todas as colunas do objeto considerado tivessem dimensão  $N_{max}$ , reduzindo-se dessa forma a um bloco regular, todas as DCT das colunas teriam também a mesma dimensão  $N_{max}$ , os seus respectivos coeficientes seriam dados pela equação (4) e o alinhamento ótimo desses coeficientes corresponderia ao dos índices idênticos. Assim, os coeficientes  $c_i'(k')$  e  $c_j'(l')$  das DCT das  $i$ -ésima e  $j$ -ésima colunas com o mesmo índice ( $k' = l'$ ) apresentariam uma maior correlação que os coeficientes com índices diferentes ( $k' \neq l'$ ).

Constata-se que, nesse caso em que as dimensões das colunas são idênticas, o alinhamento dos coeficientes pelos mesmos índices equivale a uma estratégia de alinhamento pela fase. De fato, as fases das funções cosseno dos termos do somatório da equação (4) serão idênticas para  $c_i'(k')$  e  $c_j'(l')$  (e para cada valor de  $n$ , o índice do somatório) quando  $k' = l'$ . Todavia, no algoritmo da SA-DCT as dimensões das colunas não são as mesmas (sendo  $N_j$  a dimensão da  $j$ -ésima coluna). Logo, para seguir a estratégia de alinhamento pela fase empregada nas DCT para blocos retangulares, os coeficientes de duas DCT verticais de dimensões  $N_j$  e  $N_{max}$  devem ser agrupados de tal forma que a fase dos termos em (3) e (4) sejam iguais, isto é,

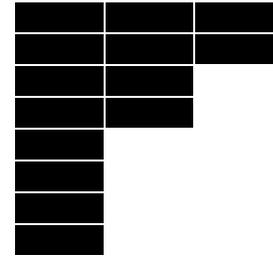
$$[\pi k(n+0,5)] / N_j = \pi k'(n+0,5) / N_{max} \quad (5)$$

o que equivale a que a ordem  $k$  de um coeficiente da  $j$ -ésima coluna seja substituída por

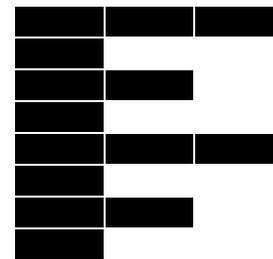
$$k' = k N_{max} / N_j \quad (6)$$

O método proposto, então, alinha os coeficientes das DCT verticais pelo cálculo de  $k'$  a partir de (6), aproximando o valor obtido para o inteiro mais próximo. Note-se que tal procedimento independe de qualquer suposição quanto ao modelo estatístico da imagem. Ademais, é idêntico aos resultados experimentais apresentados em [5] e [6] nos casos em que as colunas não necessitam ser deslocadas na vertical (todas as colunas apresentam-se alinhadas com a margem superior do retângulo circunscrito ao segmento do objeto contido no bloco de imagem considerado).

O método proposto para alinhamento dos índices dos coeficientes baseia-se, assim, na equação (6). O coeficiente de ordem  $k$  da  $j$ -ésima coluna é alinhado com o coeficiente de ordem  $k'$  da coluna de dimensão máxima dentro do bloco considerado, para a obtenção das linhas às quais serão aplicadas as DCT horizontais. A Figura 2 exemplifica os alinhamentos adotados nos métodos de Sikora/Makai e no aqui proposto, para um bloco formado por três colunas: uma com dimensão 8, uma segunda com dimensão 4 e uma terceira com dimensão 2.



(a) Método de Sikora/Makai



(b) Método Proposto

Figura 2: Exemplo de alinhamento dos coeficientes das DCT verticais

Algumas observações podem ser formuladas em relação à análise apresentada:

(1) Quando ocorre deslocamento, a variação de fase passa a depender da variável discreta  $n$  (que é o índice do somatório em (3)) e, dessa forma, as relações tornam-se mais complexas, já que a correspondência dos coeficientes será dependente do sinal  $x_j(n)$ ;

(2) O fator  $S_{N_j}$  é dependente de  $N_j$  e, dessa

forma, a coincidência de fase não garante a coincidência da intensidade dos coeficientes obtidos em (3) com a dos obtidos na equivalente transformada regular resultantes de (4). De fato, a relação entre eles é dada por  $S_{Nj}/S_{Nmax} = N_{max}/N_j$ . Todavia, isso não altera a equivalência de máxima correlação cruzada entre coeficientes estabelecida em (6). Basta constatar que a troca de  $S_{Nj}$  por  $S_{Nmax}$  em (3) não modifica o valor obtido em (2).

### 3 Avaliação do Método Proposto

A partir da Equação (6), foram obtidas todas as possíveis equivalências de índices, variando-se as dimensões das colunas.

Nos experimentos empregaram-se segmentos sintéticos com características de um processo de Markov bidimensional de primeira ordem, separável e com coeficientes de correlação vertical e horizontal  $\alpha=0.95$  (Figura 3) e quadros das seqüências Weather e Children (Figuras 4 e 5). Foram comparados os desempenhos do método de Sikora/Makai e do aqui proposto. Para os segmentos sintéticos, o critério de comparação foi o da razão cumulativa de energia. Essa grandeza é dada por:

$$RCE(k) = \frac{\sum_{m=0}^{k-1} [\hat{c}(m)]^2}{\sum_{m=0}^{N-1} [\hat{c}(m)]^2} \quad (7)$$

onde  $\{\hat{c}(0) \hat{c}(1) \hat{c}(2) \dots \hat{c}(N-1)\}$  é o conjunto de todos os coeficientes do bloco de imagem em ordem decrescente de energia.

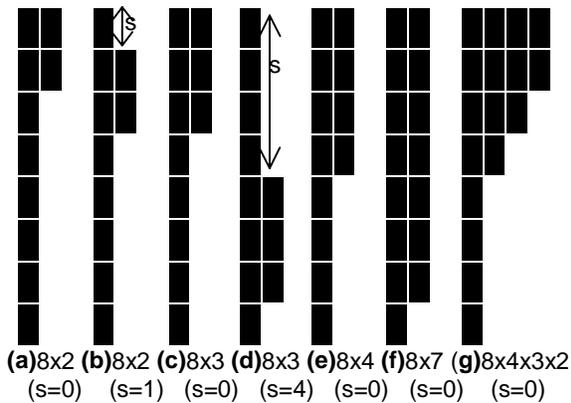


Figura 3: Segmentos sintéticos empregados nos experimentos

A Figura 6 apresenta a Razão Cumulativa de Energia (RCE) para alguns dos segmentos sintéticos empregados. Para todos os segmentos, a RCE do método proposto é

sempre igual ou maior que a do método de Sikora/Makai, o que demonstra maior compactação de energia para um determinado número de coeficientes.

No caso das seqüências reais, o parâmetro de avaliação foi a razão pico-ruído obtida quando se emprega quantização escalar não uniforme (exceto para o coeficiente DC, quantizado uniformemente com 256 níveis) e codificação por Huffman dos coeficientes da transformada. A razão pico-ruído é dada por

$$RPR = 10 \log_{10} \frac{x_p^2}{\sigma_x^2} \quad (8)$$

onde  $x_p$  é o valor pico-a-pico da imagem original (neste caso, 255) e

$\sigma_x^2$  é o erro médio quadrático introduzido no sinal pela quantização.



Figura 4: Quadro da seqüência Weather segmentado

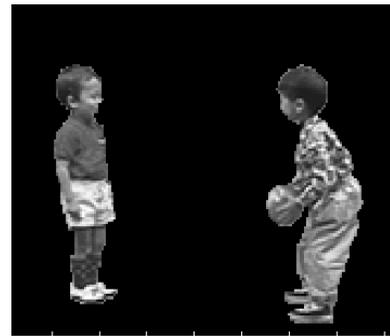


Figura 5: Quadro da seqüência Children segmentado

A alocação do número de níveis de quantização aos coeficientes AC foi função das respectivas energias, atribuindo-se maior número de níveis aos coeficientes com maior energia. O código de Huffman foi estabelecido

para cada coeficiente, a partir da frequência relativa dos respectivos níveis de quantização obtida sobre todos os quadros da seqüência. No tocante à seqüência Weather, foram empregados os 38 primeiros quadros, um objeto por quadro, totalizando 1828 blocos de fronteira e 65067 pixels. A razão pico-ruído foi medida apenas para esses blocos de fronteira. A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos. Da seqüência Children, foram processados os 11 primeiros quadros, com 2 objetos por quadro, totalizando 844 blocos de fronteira e 28710 pixels. Os resultados são mostrados na Tabela 2.

Analisando-se os resultados mostrados nas Tabelas 1 e 2, constata-se que, para baixas taxas, o método de Sikora/Makai é mais eficiente. Para aplicações que empregam taxas mais elevadas (a partir de 3,5 bpp para Weather e 4,0 bpp para Children), como as que priorizam a qualidade da imagem, o método de alinhamento dos índices pela fase é mais eficiente. Uma possível explicação para esse fato é o efeito de alteração da correlação cruzada pela quantização escalar dos coeficientes da SA-DCT. Aquela é tanto mais alterada quanto menor a taxa empregada ou, equivalentemente, quanto menor o número de níveis de quantização utilizados. Ocorrem, assim, erros de quantização maiores, bem como a eliminação de vários coeficientes (aqueles aos quais a estratégia de quantização empregada atribui zero bits).

Tabela 1: Resultados relativos à imagem Weather

Taxa (bit/pixel)	P1=RPR (dB)	P2=RPR(dB)	P2-P1 (dB)
	Sikora/Makai	<b>Alinhamento pela fase</b>	
0,70	25,2378	24,8799	-0,3579
1,33	29,2682	28,7666	-0,5016
2,09	33,4795	33,2228	-0,2567
2,88	38,2536	38,1179	-0,1357
3,77	43,1991	43,2594	0,0603
4,60	47,9242	48,3331	0,4089
5,39	51,9888	52,0937	0,1049

Tabela 2: Resultados relativos à imagem Children

Taxa (bit/pixel)	P1=RPR (dB)	P2=RPR(dB)	P2-P1 (dB)
	Sikora/Makai	<b>Alinhamento pela fase</b>	
0,65	19,3953	19,1839	-0,2114
1,33	23,3308	23,1281	-0,2027
2,14	27,9748	27,7904	-0,1844
2,90	32,5430	32,5045	-0,0385
3,80	37,8115	37,7099	-0,1016
4,70	43,2280	43,2641	0,0361
5,53	48,3151	48,4011	0,0860

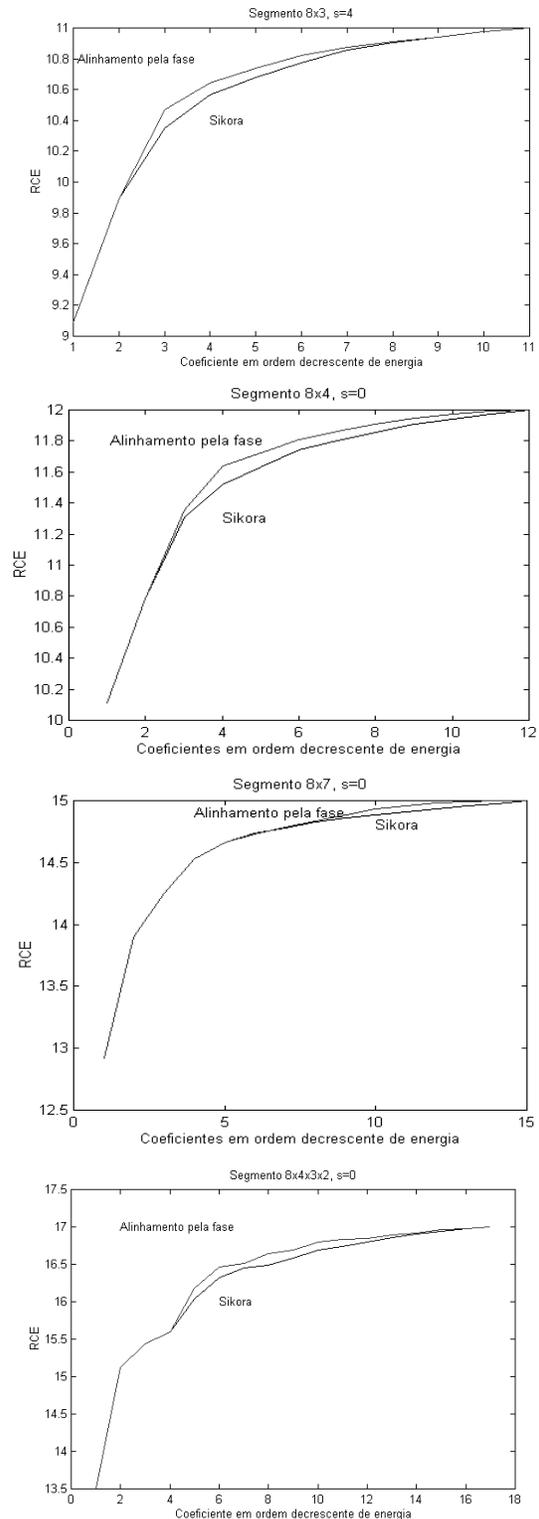


Figura 6: Gráficos da Razão Cumulativa de Energia para alguns dos segmentos testados

(\* por questão de clareza, os valores de RCE foram multiplicados pela potência total dos coeficientes do respectivo segmento

O método de alinhamento dos índices pela fase é claramente superior para imagens que se aproximem de um processo de Markov bidimensional de 1ª ordem com coeficiente de correlação alto. Tal conclusão está de acordo com os resultados descritos em [5] e [6] que, todavia, foram obtidos somente a base de análise experimental. Um procedimento geral para agrupar os coeficientes não pode ser extraído daqueles resultados. Além disso, eles são restritos a uma classe específica de sinais. Já o método proposto neste trabalho proporciona um procedimento analítico para o alinhamento dos coeficientes das transformadas verticais e é válido para toda classe de sinais.

Para as outras classes de sinais de imagem testadas, os desempenhos dos dois métodos avaliados mostraram-se similares. O método proposto, porém, mostra-se sempre mais eficiente para médias e altas taxas de bits. Para baixas taxas, resta ainda verificar o desempenho obtido pelo emprego do método de alinhamento pela fase combinado com outras estratégias de quantização, como a vetorial.

#### **4 Conclusão**

Este capítulo apresentou um método de alinhamento dos coeficientes das DCT verticais de uma SA-DCT que proporciona aumento da eficiência de codificação de objetos de forma arbitrária. O método proposto

adota, por similaridade com o caso retangular, uma estratégia baseada na fase das funções cosseno. Ao contrário de outras propostas assinaladas, ela não se restringe a uma classe específica de sinais e seu emprego independe das características estatísticas da imagem.

#### **Referências**

- [1] A. K. Jain, *Fundamentals of digital image processing*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1989.
- [2] N. Ahmed, T. Natarajan and K. R. Rao, "Discrete cosine transform", *IEEE Trans. Comput.*, pp. 90-93, Jan. 1974.
- [3] T. Sikora and B. Makai, "Shape-adaptive DCT for generic coding of video", *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol.*, Vol. 5, No. 1, pp. 59-62, Feb. 1995.
- [4] T. Sikora, S. Bauer and B. Makai, "Efficiency of shape-adaptive transforms for coding of arbitrarily shaped image segments", *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol.*, Vol. 5, pp. 254-258, June 1995.
- [5] M. Bi, S. H. Ong and Y. H. Ang, "Comment on 'Shape Adaptive DCT for generic coding of video'", *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Tech.*, Vol. 6, No. 6, pp. 686-688, Dec. 1996.
- [6] T. Xie, C. Weng, Y. He and C. Feng, "A new approach to arbitrary shaped DCT", *Proc. PCS 97*, pp. 97-101, Sep. 1997.