

Algoritmo Rápido Para Estimação de Vetores de Movimento

Renê Togni Del Pietro e Max H. M. Costa

Departamento de Comunicações - FEEC - Unicamp
Caixa Postal 6101 – CEP 13083-970 – Campinas, SP
togni@decom.fee.unicamp.br, max@decom.fee.unicamp.br

RESUMO

Neste artigo apresenta-se um algoritmo rápido para estimação dos vetores de movimento em codificação de vídeo. O algoritmo proposto é uma modificação do algoritmo SEA apresentado por Li e Salari [10], que atua pré-selecionando os blocos da região de pesquisa antes das operações de casamento de blocos. Como resultado, tem-se a melhor estimativa do vetor de movimento, igual à obtida por busca exaustiva, aliada a uma redução significativa no custo computacional da operação. O algoritmo proposto melhora a pré-seleção dos blocos através da definição de novos critérios de descarte e da ordem de leitura dos blocos da região de pesquisa. Resultados das simulações demonstram uma sensível redução no custo computacional em relação ao SEA, com a vantagem que a solução ótima obtida para todos os vetores de movimento é conservada.

1. INTRODUÇÃO

No processo de codificação de seqüências de vídeo, uma considerável parte da redundância temporal presente entre os quadros da seqüência pode ser reduzida por técnicas de estimação e compensação de movimento, permitindo a transmissão e armazenamento da seqüência a uma taxa de *bits* mais reduzida. A eficiência do processo de extração desta redundância está diretamente ligada ao tipo de método de estimação dos vetores de movimento utilizado, que pode ser baseado em blocos de *pixels* (*block matching algorithms* - BMA [1][2]) ou nos *pixels* individuais (*pel-recursive algorithms* - PRA [3]). Em face da simplicidade de implementação, os algoritmos da classe BMA são adotados por vários padrões de vídeo, tais como o CCITT H.261 [4], ITU-T H263 [5] e o MPEG [6].

Nos algoritmos BMA, cada quadro é fracionado em blocos retangulares de comprimento fixo e para cada bloco é estimado um vetor de movimento. O vetor de movimento indica a posição, com relação a uma dada região do quadro anterior, do bloco mais semelhante obtido segundo um critério de casamento (medida de distorção). O emprego da pesquisa exaustiva (ESA - *Exhaustive Search Algorithm*) resulta no vetor de movimento ótimo (mínimo global), já que são calculadas as distorções para todos os possíveis candidatos a vetores de movimento. Embora resulte no vetor de movimento ótimo, o alto custo computacional do ESA limita sua aplicação prática. Como alternativa a complexidade computacional do ESA, surgiram vários outros algoritmos da classe BMA, tais como

2-D log search [3], *three-step search* [7], *cross-search* [8], etc. Estes algoritmos, que primam pela rapidez, supõem que a função que resulta do erro de distorção entre os blocos é convexa, embora isto raramente ocorra [9]. Como resultado, temos a convergência destes métodos para um mínimo local em vez do mínimo global, como obtido pelo ESA.

O algoritmo de eliminação sucessiva (SEA - *Successive Elimination Algorithm* [10]), proposto por Li e Salari [10] reduz o custo computacional do ESA ao mesmo tempo em que conserva sua solução ótima. Neste trabalho modificaremos o SEA para reduzir ainda mais a sua complexidade computacional mantendo a solução ótima.

2. ALGORITMO DE ELIMINAÇÃO SUCESSIVA

2.1 Algoritmo de eliminação sucessiva - SEA

Seja \mathbf{X} um bloco no quadro atual cujo vetor de movimento deseja-se estimar e $\mathbf{Y}(i,j)$ um bloco no quadro anterior localizável pelo índice (i,j) . A determinação do vetor de movimento ocorre escolhendo o índice (i,j) que minimiza a norma MAE (*Mean Absolute Error*) definido por[†]:

$$MAE = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}(i, j)\| \quad (1)$$

onde $\|\mathbf{X}\| = \sum_k |x_k|$. Tipicamente, os blocos têm dimensão de 16 x 16 *pixels*, sendo o índice (i,j) do vetor de movimento obtido em uma região retangular de pesquisa, definida pelo intervalo $i,j \in [-15,15]$ com relação às coordenadas centrais do bloco \mathbf{X} no quadro atual.

Aplicando a desigualdade $\|A - B\| \geq \|A\| - \|B\|$ [11], com $A = \mathbf{X}$ e $B = \mathbf{Y}(i,j)$, temos

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}(i, j)\| \geq \left| \|\mathbf{X}\| - \|\mathbf{Y}(i, j)\| \right| \quad (2)$$

A Equação (2) estabelece um limite mínimo para o MAE, sendo ele sempre superior ao módulo da diferença da soma dos elementos dos blocos. No ESA, o erro MAE entre os blocos é determinado para cada possível combinação das variáveis i,j dentro da região de pesquisa. No processo, cada bloco tem o seu MAE calculado e comparado com um valor

[†] A rigor, a Equação [1] define o erro absoluto cumulativo, conquanto não se divide a soma pelo número de elementos do bloco. Esta divisão é omitida por não ser relevante para o processo de busca.

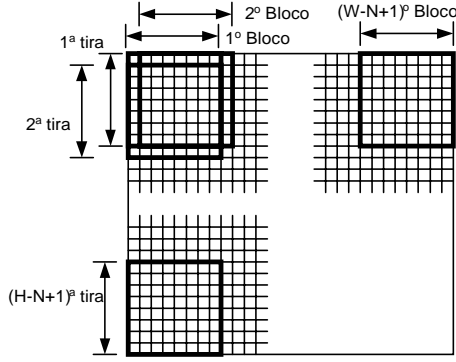


Figura 1 – Geometria do quadro para o cálculo das normas.

mínimo. Sendo inferior ao valor mínimo, o índice (i,j) deste bloco é armazenado e o valor mínimo atualizado com o valor do MAE calculado. Sendo superior, avança-se para o próximo bloco. O vetor de movimento é dado pelo índice (i,j) armazenado, depois de varrida a toda a região de pesquisa.

No SEA, as normas $\|\mathbf{X}\|$ e $\|\mathbf{Y}(i,j)\|$ são computadas usando o procedimento descrito a seguir [10]. Seja uma imagem de comprimento $W \times H$, com blocos de dimensão $N \times N$ e $f(i,j)$ a representação do *pixel* na posição (i,j) . Dividindo a imagem em linhas e colunas, como mostrado na Figura 1, aplicamos os seguintes passos:

- **Passo 1:** Somam-se de todos os *pixels* em tiras verticais de N elementos para todas as W colunas do quadro. A soma destes N elementos para todas as colunas assume a forma $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1w}$. Para as tiras verticais subseqüentes, deslocadas para baixo *pixel a pixel*, não se necessita efetuar novamente a soma dos N elementos, já que muitos deles já foram computados no passo anterior. Assim, o deslocamento da tira vertical $C_{i-1,j}$ de uma *pixel* para baixo leva à soma $C_{ij} = C_{i-1,j} - f(i-1,j) + f(N+i-1,j)$, com $i = 2,3,\dots,H-N+1$ e $j = 1,2,\dots,W$.
- **Passo 2:** Efetuando a soma das somas parciais representadas pelas tiras verticais obtidas ao longo da direção horizontal, determinamos as normas $\|\mathbf{X}\|$ e $\|\mathbf{Y}(i,j)\|$. Inicialmente somam-se as N primeiras tiras verticais na direção horizontal para todas as $(H-N+1)$ linhas, obtendo-se os valores SN_{i1} que correspondem às normas para os blocos de localização $(i,1)$, com $i = 1,2,\dots,H-N+1$. Analogamente ao Passo 1, não há necessidade de novamente somar os N elementos das colunas subseqüentes, pois muitos dos cálculos já foram realizados na soma da coluna anterior. Logo, o valor da norma para a j -ésima coluna na i -ésima linha passa a ser dado por $SN_{ij} = SN_{i,j-1} - C_{i,j-1} + C_{i,N+j-1}$, para $i = 1,2,\dots,H-N+1$ e $j = 2,3,\dots,W-N+1$.

O seguinte exemplo demonstra o procedimento, sendo Q um quadro de dimensões 4×4 e \mathbf{X} um bloco deste quadro de dimensões 2×2 (Figura 2).

Para cada bloco dentro da região de pesquisa calcula-se o valor da expressão $|\|\mathbf{X}\| - \|\mathbf{Y}(i,j)\||$. Este valor é comparado com o valor do MAE mínimo obtido até o momento (inicialmente o MAE mínimo assume o valor do MAE calculado no índice $(0,0)$). Caso este valor seja superior ao valor do MAE mínimo,

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

6	8	10	12
14	16	18	20
22	24	26	28

14	18	22
30	34	38
46	50	54

(a) (b) (c)

Figura 2 – Exemplo da obtenção da norma $\|\mathbf{X}\|$. (a) Quadro de dimensões 4×4 ; (b) Aplicação do 1º passo do algoritmo com $N=2$; (c) Aplicação do segundo passo do algoritmo.

o bloco é descartado, de acordo com a Desigualdade (2). Caso o valor seja inferior, calcula-se o MAE para o bloco e procede-se a sua comparação como o MAE mínimo como feito no ESA. O descarte dos blocos antes de se efetuar a medida de distorção aumenta a eficiência computacional do algoritmo e ainda assegura os mesmos resultados do ESA.

3. MODIFICAÇÕES NO ALGORITMO

Pelo exposto até o momento, o algoritmo SEA possui as seguintes características:

- Redução do custo computacional em relação ao ESA através da utilização de um critério para a seleção dos blocos candidatos à minimização do MAE. Blocos com norma $|\|\mathbf{X}\| - \|\mathbf{Y}(i,j)\||$ superior a um valor de MAE mínimo previamente calculado são descartados sem a necessidade do cálculo da distorção. Blocos com norma inferior necessitam do cálculo da distorção para que sejam descartados ou se mantenham como candidatos para determinação do vetor de movimento.
- O algoritmo é progressivo, no sentido da referência para a comparação das distorções (MAE mínimo) ser atualizada toda vez que o MAE calculado para um dado bloco for inferior ao valor corrente. Quanto menor o valor de MAE mínimo, mais rigorosa é a pré-seleção e maior a probabilidade de descarte dos blocos pelo critério baseado na norma de $|\|\mathbf{X}\| - \|\mathbf{Y}(i,j)\||$, economizando-se operações com o cálculo da distorção.

O algoritmo pode ter sua complexidade computacional reduzida com as seguintes modificações:

□ Incorporação de critérios para descarte dos blocos

Incorporam-se ao SEA novos critérios para descarte de blocos antes deste efetuar o cálculo da distorção. Estes critérios são organizados em ordem crescente de complexidade, de modo que um bloco será submetido a um critério de descarte somente se ele não foi descartado pelo critério anterior. Como estes critérios consomem menos operações que o cálculo da distorção, obtemos um ganho computacional.

Os novos critérios de descarte são derivados utilizando a definição do MAE e a seguinte desigualdade:

Teorema: *Sejam a,b,c e d números inteiros positivos. Então, vale a desigualdade*

$$|a - b| + |c - d| \geq |a + c| - |b + d| \quad (3)$$

Prova: Aplicando as desigualdades $|a| + |b| \geq |a + b|$ [12] e $|a - b| \geq |a| - |b|$ [11], tem-se

$$\begin{aligned} |a - b| + |c - d| &\geq |a - b + c - d| = |a + c - (b + d)| \geq \\ &\geq |a + c| - |b + d| \end{aligned} \quad (4)$$

Expandindo a fórmula do MAE dada pela Equação (1), considerando as dimensões padrão de 16 x 16 elementos para os blocos, temos:

$$MAE = \sum_{l=1}^{16} \sum_{k=1}^{16} |x_{l,k} - y_{i+l,j+k}| \quad (5)$$

Reordenando o somatório e aplicando recursivamente a Desigualdade (3), tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{16} \sum_{k=1}^{16} |x_{l,k} - y_{i+l,j+k}| &\geq \sum_{l=1}^8 \sum_{k=1}^8 |a_{(l,k)}^{(2)} - b_{(l,k,i,j)}^{(2)}| \geq \\ &\geq \sum_{l=1}^4 \sum_{k=1}^4 |a_{(l,k)}^{(4)} - b_{(l,k,i,j)}^{(4)}| \geq \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^2 |a_{(l,k)}^{(8)} - b_{(l,k,i,j)}^{(8)}| \geq \\ &\geq |a_{(1,1)}^{(16)} - b_{(1,1,i,j)}^{(16)}| \end{aligned} \quad (6)$$

Sendo os coeficientes $a_{(p,q)}^{(M)}$ e $b_{(p,q,r,s)}^{(M)}$ dados por

$$a_{(p,q)}^{(M)} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M x_{m+Mp,n+Mq} \quad (7)$$

$$b_{(p,q,r,s)}^{(M)} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M x_{m+Mp+r,n+Mq+s} \quad (8)$$

Como exemplo, considere \mathbf{X} um bloco de dimensões de 8 x 8. Aplicando a Equação (7), obtemos os seguintes agrupamentos, utilizados nos cálculos das desigualdades (Figura 3).

Observando as desigualdades em (6), concluímos que o MAE, definido como a diferença entre os elementos dos blocos \mathbf{X} e $\mathbf{Y}(i,j)$ é sempre igual ou superior ao MAE calculado para estes mesmos blocos quando os seus elementos adjacentes são agrupados pelas somas, definidas pelas equações (7) e (8). Assim, o MAE calculado para os *pixels* individuais dos blocos \mathbf{X} e $\mathbf{Y}(i,j)$ é sempre igual ou superior ao MAE calculado para agrupamentos 2 a 2 destes *pixels*, sendo igual ou superior ao MAE calculado para os *pixels* agrupados 4 a 4, etc, até o último agrupamento, 16 a 16, que corresponde ao critério de descarte, definido pelo SEA, baseado na norma $\|\mathbf{X}\| - \|\mathbf{Y}(i,j)\|$.

A soma dos elementos dos blocos formando os vários agrupamentos dos blocos $\mathbf{Y}(i,j)$ são efetuada numa fase de pré-processamento. Utiliza-se o algoritmo de soma do SEA para $N = 2$ para formar o primeiro agrupamento (2 x 2), somando-se a seguir estes valores para formar os agrupamentos superiores. Desta forma evita-se o cálculo direto da Equação (8), economizando operações. As somas dos agrupamentos do bloco \mathbf{X} são efetuadas no momento da estimação utilizando-se o mesmo procedimento.

□ Pré-ordenação dos blocos antes do cálculo da distorção

No SEA, quanto menor o valor de MAE mínimo, mais rigoroso

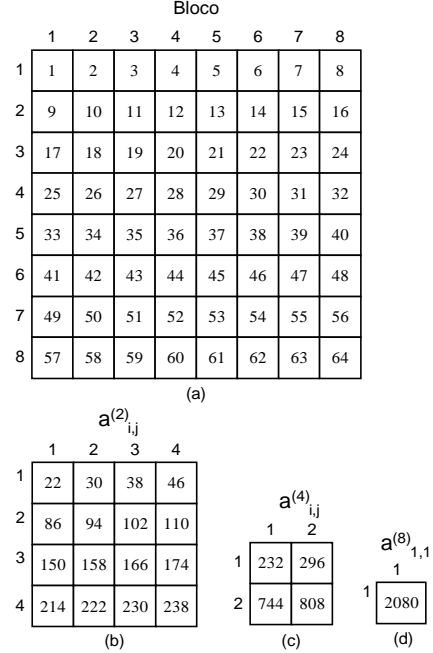


Figura 3 – Exemplo de cálculo dos agrupamentos definidos pela Equação (7). (a) Bloco de dimensões 8 x 8 ; (b) Agrupamentos 2 x 2 ; (c) Agrupamento 4 x 4 ; (d) Agrupamento 8 x 8 (último).

torna-se o critério para descarte dos blocos baseado na norma de $\|\mathbf{X}\| - \|\mathbf{Y}(i,j)\|$. Deste modo, ordenando-se os blocos de modo que valores pequenos de MAE sejam encontrados no começo da pesquisa do vetor de movimento, reduzimos o número de operações efetuadas pelo algoritmo.

A ordenação deve seguir a ordem crescente de probabilidade de se obterem valores de MAE pequenos. Pela Equação (2), notamos que esta probabilidade é diretamente proporcional a norma $\|\mathbf{X}\| - \|\mathbf{Y}(i,j)\|$, já que o MAE para estes blocos é sempre superior a este valor. Para uma dada estimação do vetor de movimento, a norma $\|\mathbf{X}\|$ é fixa. Portanto, a ordenação recai sobre os valores da norma $\|\mathbf{Y}(i,j)\|$ (soma dos agrupamentos 16 x 16 dos elementos dos blocos), efetuada na fase de pré-processamento. A pesquisa do vetor de movimento deve-se iniciar no bloco $\mathbf{Y}(i,j)$ cuja norma $\|\mathbf{Y}(i,j)\|$ seja a mais próxima da norma de $\|\mathbf{X}\|$ avançando no sentido de sempre manter o valor da norma $\|\mathbf{X}\| - \|\mathbf{Y}(i,j)\|$ o mínimo possível. Notamos que a ordenação possui dupla função, pois além de definir a ordem de pesquisa dos blocos, automaticamente estabelece o primeiro critério de descarte. Selecionado-se o bloco $\mathbf{Y}(i,j)$ tal que a norma $\|\mathbf{Y}(i,j)\|$ seja a mais próxima possível na norma $\|\mathbf{X}\|$, e calculando-se o valor do MAE para estes blocos, os blocos cujo MAE tem possibilidade de ser inferior a este valor estão contidos na faixa delimitada por

$$|MAE_{\min} - \|\mathbf{X}\| \leq \|\mathbf{Y}(i,j)\| \leq MAE_{\min} + \|\mathbf{X}\| \quad (9)$$

Como exemplo da desigualdade dada em (9), consideremos um universo de 5 blocos de dimensões 4 x 4 numerados de (a) a (e), do qual será selecionado o bloco que mais se assemelha ao bloco (f) segundo o critério de distorção definido pelo MAE. Os resultados do cálculo da norma e da pré-ordenação podem

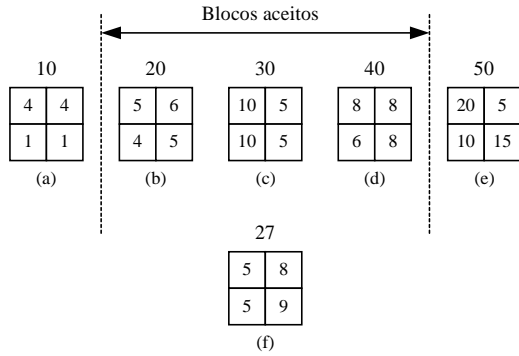


Figura 4 – Aplicação da Desigualdade (9) para pré-seleção dos blocos.

ser vistos na Figura 4, onde o valor da norma aparece na parte superior de cada bloco. Como observamos, o bloco (f) tem norma 27, sendo mais semelhante ao bloco (c) com norma 30. Calculando-se o MAE entre estes blocos, obtemos um valor de 17. Portanto, blocos com norma superior a 47 ou inferior a 13 podem ser rejeitados, pois apresentam um valor de MAE superior ao valor calculado entre os blocos (c) e (f). Blocos não rejeitados são considerados aceitos, sendo submetidos aos outros critérios de descarte definido em (6) até o bloco mais semelhante ser encontrado.

Modificando o algoritmo do SEA, através da incorporação dos critérios de descarte e da pré-ordenação dos blocos, derivamos um algoritmo denominado SEA modificado. Este algoritmo é comparado com o SEA e o ESA, com relação à qualidade e a velocidade do processo de estimação de movimento. Os resultados das simulações encontram-se na seção a seguir.

4. SIMULAÇÕES

Nesta seção, analisamos o desempenho dos algoritmos ESA, SEA e SEA modificado. Utilizamos quadros monocromáticos no formato CCIR 601 de dimensões 720 x 480, 8bpp correspondentes às seqüências de vídeo “Flower Garden”, “Mobile Calendar”, “Kiel” e “Tennis”. Na estimação do vetor de movimento considera-se a predição do segundo quadro de cada seqüência com base no primeiro quadro, blocos com dimensões 16 x 16 pixels e região de pesquisa que abrange toda a área do quadro. A Tabela 1 mostra os custos computacionais de cada algoritmo.

TABELA 1
Ganho de velocidade de processamento.

Algoritmo	Seqüências			
	Kiel	Mobile	Flower	Tennis
ESA	1,0	1,0	1,0	1,0
SEA	5,3	6,4	24,9	5,5
SEA modificado	66,8	82,4	319,1	32,7

Utilizamos o algoritmo ESA como padrão de comparação, normalizando o tempo de processamento em uma unidade. Com a utilização do SEA, obtemos redução no tempo de processamento na ordem de 5 a 6 vezes, sendo mais acentuada para os quadros da seqüência “Flower”, cujo modelo de movimento dos objetos de cena aparentemente se adapta melhor ao modelo de estimação de movimento baseado em

blocos. Observamos a superioridade do algoritmo SEA modificado, com ganhos de processamento na faixa de 12 vezes em relação ao SEA para todas as seqüências, com exceção da “Tennis”, cujo ganho ficou em torno de 6 vezes.

Na Tabela 2, temos a redução conseguida pelos algoritmos no número de blocos testados segundo o critério de distorção efetuado pelo ESA que testa um total de 466,56 milhões de blocos.

TABELA 2

Redução do número de blocos testados segundo o critério da distorção.

Algoritmo	Seqüências			
	Kiel	Mobile	Flower	Tennis
SEA	6,0	7,5	35,4	6,4
SEA modificado	1413,3	2346,9	1641,3	327,7

Observamos uma redução significativa no número de cálculos efetuados segundo o critério de distorção com a utilização do SEA modificado. Os resultados não refletem exatamente a redução no tempo de processamento, já que são realizados vários outros cálculos baseados nos critérios de descarte.

Na Tabela 3 temos os detalhes da redução do número de blocos, em relação ao ESA, do SEA modificado quando são aplicados todos os critérios de descarte (agrupamentos 16 x 16, 8 x 8, 4 x 4, 2 x 2 e o critério de distorção MAE).

TABELA 3

Redução do número de cálculos de distorção utilizando os critérios de descarte.

Agrupamentos	Seqüências			
	Kiel	Mobile	Flower	Tennis
16 x 16	4,3	4,4	34,7	3,7
8 x 8	9,0	11,2	35,8	8,9
4 x 4	32,7	52,8	427,8	16,1
2 x 2	174,4	337,1	760,3	38,5
MAE	1413,3	2347,0	38,5	327,8

Os *overheads* dos algoritmos, decorrente do pré-processamento, são mostrados na Tabela 4, tendo como base o tempo de processamento dos algoritmos.

TABELA 4

Overhead do pré-processamento.

Algoritmo	Seqüências			
	Kiel	Mobile	Flower	Tennis
SEA	0,01%	0,02%	0,06%	0,01%
SEA modificado	2,51%	3,41%	12,09%	1,23%

A fase de pré-processamento representa um custo computacional fixo, dependente somente das dimensões dos quadros da seqüência. Por este motivo, seqüências onde o algoritmo apresenta melhor desempenho são as que apresentam maior *overhead* de pré-processamento. O *overhead* superior do SEA modificado em relação ao SEA se dá em virtude dos cálculos dos agrupamentos e da ordenação dos blocos utilizados nos critérios de descarte. O erro de predição obtido entre os algoritmos ESA, SEA e SEA modificado foi o mesmo, ou seja, o SEA modificado não introduz erros no processo de estimação; apenas reduz o custo computacional do processo.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresenta-se uma modificação do algoritmo SEA [10] para estimação de vetores de movimento e comparam-se os desempenhos dos algoritmos ESA, SEA e SEA modificado na compensação de movimento em codificação de vídeo. O algoritmo ESA produz o mínimo erro segundo o critério do erro absoluto médio (MAE) entre os quadros, na medida em que varre todas os possíveis blocos a procura do melhor vetor de movimento. Por efetuar uma busca exaustiva, apresenta um alto custo computacional, o que o torna muitas vezes proibitivo na prática. Como alternativa, foi desenvolvido por Li e Salari [10] o algoritmo SEA, que reduz o custo computacional da estimação de movimento sem entretanto alterar o erro obtido pelo método ESA. O SEA modificado, objeto deste trabalho, vem complementar o SEA, melhorando o seu desempenho. São acrescentados outros critérios de descarte dos blocos baseados em desigualdades modulares, derivadas da definição do MAE. Sendo alinhados em ordem crescente de complexidade computacional, estes critérios de descarte atuam pré-selecionando os blocos candidatos a geradores dos vetores de movimento, dispensando o cálculo do MAE nesta fase de pré-seleção. Como o cálculo do MAE apresenta um alto custo computacional, consegue-se uma redução significativa do tempo de processamento. Define-se ainda, no SEA modificado, uma ordem pelo qual os blocos são pesquisados. Esta ordem baseia-se na probabilidade de obtenção de blocos com MAE pequeno, já que o menor valor de MAE obtido ao longo do processamento serve como ponto de comparação para a eliminação dos blocos, num processo adaptativo, pelos critérios de descarte.

Como resultado, com a utilização do SEA modificado, consegue-se uma redução significativa do tempo computacional comparado com o ESA e o SEA, além de também atingir o valor mínimo para o erro de predição.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. G. Musmann, P. Pirsh, and H. J. Gilbert, "Advanced in picture coding," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 4 pp. 105-107, Jan. 1995.
- [2] J. R. Jain and A. K. Jain, "Displacement measurement and its application in interframe coding," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COMM-29, pp.1799-1808, Dec. 1981.
- [3] N. Natravali and J. D. Robbins, "Motion compensated television coding: Part I," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 58, pp. 631-670, Mar. 1979.
- [4] CCITT Standard H.261, "Video coding for audiovisual services at px64kbits/s," ITU, 1990.
- [5] ITU-T DRAFT Standard H.263, "Video coding for narrow telecommunication channel at (below) 64kbit/s," ITU, Apr. 1995.
- [6] ISO-IEC JTC1/SC2/WG11, "Preliminary text for MPEG video coding standard," ISO. Aug. 1990.
- [7] T. Koga, K. Iinuma, A. Hirano, Y. Iijima, and T. Ishiguro, "Motion compensated interframe coding for vídeo conferencing," *Proc. Nat. Telecommun. Conf.*, Nov. 29-Dec. 3, pp. G5.3.1-G.5.3.5.
- [8] M. Ghanbari, "The cross-search algorithm for motion estimation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 38, pp. 950-953, July 1990.
- [9] K. H. K. Chow and M. L. Liou, "Generic motion search algorithm for video compression," *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol.*, vol. 3, pp.440-446, Dec. 1993.
- [10] W. Li and E. Salari, "Sucessive elimination algorithm for motion estimation," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 4, pp 105-07, Jan. 1995.
- [11] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Reading MA: Addison-Wesley, 1975.
- [12] J. L. Boldrini, S. I. Rodrigues, V. L. Figueiredo, H. G. Wetzler, *Álgebra Linear*, Harper & Row do Brasil, 1980.