

Estudo de Entrelaçadores para Códigos Convolucionais Não-Unicamente Decodificáveis no Canal Aditivo com Dois Usuários Binários

Romero de A. Braga, Márcio J. de C. Lima, Maria de Lourdes M.G. Alcoforado e Valdemar C. da Rocha Jr.

Resumo—Este artigo apresenta estudo comparativo entre classes de entrelaçadores, aplicados a pares de códigos convolucionais não necessariamente unicamente decodificáveis sobre o canal aditivo para dois usuários binários (2-BAC), em presença de ruído aditivo gaussiano branco (RAGB). São apresentadas curvas de desempenho com resultados de simulações computacionais com codificadores convolucionais para cada usuário na estrutura turbo, usando diferentes tipos de entrelaçadores. Verifica-se nos casos estudados para dois usuários que, para probabilidades de erro de bit da ordem de $P_b = 10^{-4}$, entrelaçadores do tipo DRP, S -aleatório e polinomial apresentaram um ganho de aproximadamente 1,0dB na relação sinal ruído em relação ao entrelaçador retangular de Berrou e Glavieux.

Palavras-Chave—Códigos convolucionais, canal aditivo com dois usuários binários, códigos turbo, entrelaçadores, decodificação iterativa.

Abstract—This paper presents a comparative study among distinct classes of interleavers, applied to non-uniquely decodable convolutional code pairs, over a two-user binary adder channel (2-BAC), in the presence of additive white Gaussian noise. Performance curves are presented with results of computer simulations, when using convolutional encoders for each user in the turbo structure, making use of different types of interleavers. It is observed that for two users a bit error probability around $P_b = 10^{-4}$ interleavers as DRP, S -random and polynomial presented a gain of approximately 1,0 dB in signal to noise ratio with respect to the rectangular interleaver of Berrou and Glavieux.

Keywords—Convolutional codes, 2-user binary adder channel, turbo codes, interleavers, iterative decoder.

I. INTRODUÇÃO

O canal aditivo com dois usuários binários (2-BAC) [1] é um modelo de canal sem memória o qual aceita em cada intervalo de tempo duas entradas binárias, uma para cada usuário. Considera-se que as entradas do 2-BAC, para cada usuário, pertencem ao alfabeto $\{0, 1\}$ e que, na ausência de ruído, a saída do 2-BAC é dada pela soma aritmética das entradas e seus símbolos pertencem ao alfabeto $\{0, 1, 2\}$. No caso ruidoso a saída do 2-BAC é descrita por uma distribuição de probabilidade condicional [1], [2].

Márcio J. de Carvalho Lima e Valdemar C. da Rocha Jr., Grupo de Pesquisa em Comunicações - CODEC, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Caixa Postal 7800, 50711-970, Recife, PE, Brasil, E-mail: vcr@ufpe.br, marcio.lima@ee.ufpe.br, Maria de Lourdes M.G. Alcoforado e Romero de A. Braga, Núcleo de Pesquisas em Telecomunicações - NPT, Departamento de Engenharia Elétrica, Escola Politécnica de Pernambuco, Recife, PE, Brasil, E-mail: mlmga@poli.br, rppges@poli.br.

Durante anos as pesquisas em codificação para o canal 2-BAC concentraram-se em casos sem ruído, com o objetivo de construir pares de códigos unicamente decodificáveis com altas taxas de transmissão, geralmente fazendo uso de busca computacional exaustiva [3], [4]. Nestes casos, os códigos obtidos não têm estrutura que permita simplificar a decodificação. Em 2004, foi introduzida uma técnica de construção de códigos de treliça para o canal aditivo com dois usuários binários [5], [6], a partir da introdução de uma condição de decodibilidade única para códigos convolucionais no 2-BAC. Desde então houve um avanço no estudo desta construção e posteriormente foi discutido um esquema de codificação para o 2-BAC ruidoso (RAGB), empregando um par de códigos convolucionais turbo distintos [7], [8], não necessariamente formando um par de códigos unicamente decodificáveis. Neste caso o decodificador é capaz de separar os dados binários para cada usuário explorando a estrutura do código para combater ruído e resolver ambiguidades. Também foram apresentados resultados de simulação computacional em [7] e [8]. Em todas estas simulações foram utilizados os entrelaçadores de Berrou e Glavieux (BG), conforme apresentado no artigo original sobre códigos turbo [9].

Um componente crucial para que os códigos turbo atinjam desempenho próximo da capacidade do canal é o entrelaçador. Apesar de terem sido introduzidos primeiramente como simples permutações aleatórias, atualmente existem várias classes de entrelaçadores, tais como, s -random, DRP, casados aos códigos, polinomiais e quasi-cíclicos, que produzem melhor desempenho para códigos turbo em um canal RAGB e/ou são mais simples de serem armazenados [10] [11].

O objetivo desse artigo é apresentar resultados da realização de testes para comparação de desempenho de códigos convolucionais, não necessariamente unicamente decodificáveis, para dois usuários, utilizando diferentes esquemas de entrelaçamento já propostos na literatura. A eficiência dos vários esquemas testados é ilustrada através de exemplo computacional, em que são feitas simulações usando o algoritmo BCJR [12] para dois usuários com ou sem o uso da decodificação iterativa.

Na Seção II são revistos os fundamentos da codificação para o canal aditivo com dois usuários binários, seus algoritmos de codificação e decodificação, bem como os principais aspectos do canal 2-BAC ruidoso [7], [8]. Na Seção III são abordados os entrelaçadores usados em códigos turbo, revendo as diversas classes de entrelaçadores já propostas na literatura. Na Seção IV descreve-se o método utilizado

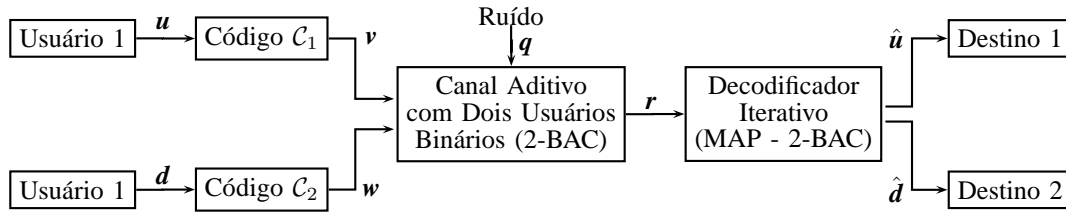


Fig. 1. Diagrama em blocos de um sistema de acesso múltiplo no canal aditivo com dois usuários binários (2-BAC).

para a realização de comparação de desempenho utilizando diferentes entrelaçadores, além de apresentar-se os resultados destas comparações. O artigo é finalizado na Seção V com a apresentação de resultados de simulação em computador e alguns comentários.

II. CODIFICAÇÃO PARA O CANAL ADITIVO COM DOIS USUÁRIOS BINÁRIOS

A. Codificador

Considere um par de códigos (C_1, C_2) associados respectivamente aos usuários 1 e 2 e dispostos conforme ilustrado na Figura 1. Suponha que o codificador para C_1 utiliza o esquema de concatenação paralela apresentado em [9]. Desta forma, o codificador para C_1 é formado pela concatenação paralela de dois códigos convolucionais recursivos componentes, C_1^- e C_1^+ , não necessariamente iguais. As entradas de ambos os codificadores componentes utilizam os mesmos bits de informação u_k , mas em uma ordem diferente, devido à presença do entrelaçador. O papel do entrelaçador é o de fazer uma permutação de cada bloco de bits de entrada, de forma que os dois codificadores operem sobre versões permutadas de um mesmo bloco de informação. Similarmente, o codificador para C_2 é formado pela concatenação paralela de dois códigos convolucionais recursivos componentes, C_2^- e C_2^+ , não necessariamente iguais. As entradas de ambos os codificadores componentes utilizam os mesmos bits de informação d_k , mas em uma ordem diferente, devido à presença do entrelaçador, que deve ser idêntico ao entrelaçador utilizado para C_1 . A taxa de transmissão de C_1 deve ser igual à taxa de transmissão de C_2 . Considere, sem perda de generalidade, que cada codificador recursivo sistemático tem taxa de transmissão assintótica $1/n$ e M estados, para ambos usuários. A seqüência de símbolos de informação para o usuário 1, denotada por \mathbf{u} , é representada por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1^N = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_N\},$$

e a seqüência de símbolos de informação para o usuário 2, denotada por \mathbf{d} , é representada por:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1^N = \{d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_N\}.$$

A seqüência de palavras-código associadas ao usuário 1, denotada por \mathbf{v} , é representada por:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1^N = \{v_1, v_2, \dots, v_k, \dots, v_N\},$$

e a seqüência de palavras-código associadas ao usuário 2, denotada por \mathbf{w} , é representada por:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1^N = \{w_1, w_2, \dots, w_k, \dots, w_N\},$$

em que

$$\mathbf{v}_k = (v_k^{(0)}, v_k^{(1)}, \dots, v_k^{(n-1)}) = (u_k, v_k^{(1)}, \dots, v_k^{(n-1)}),$$

$1 \leq k \leq N$, denota a saída associada a cada símbolo de informação do usuário 1 e similarmente,

$$\mathbf{w}_k = (w_k^{(0)}, w_k^{(1)}, \dots, w_k^{(n-1)}) = (d_k, w_k^{(1)}, \dots, w_k^{(n-1)})$$

$1 \leq k \leq N$, denota a saída associada a cada símbolo de informação do usuário 2. Os símbolos $v_k^{(0)}$ e $w_k^{(0)}$ denotam as saídas sistemáticas dos codificadores para o usuário 1 e para o usuário 2, respectivamente.

B. O canal 2-BAC ruidoso

As seqüências de palavras-código \mathbf{v}_1^N e \mathbf{w}_1^N são as entradas para um canal aditivo ruidoso com dois usuários binários, sem memória. O ruído aqui considerado é o RAGB. É feito uso da construção de Peterson e Costello [13], de uma treliça para o 2-BAC, a partir das treliças individuais de cada usuário, denominada *treliça para dois usuários*.

A seqüência de sub-blocos na treliça para dois usuários é dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1^N = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_N\},$$

em que $\mathbf{x}_k = (x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n-1)})$. A variável aleatória $x_k^{(j)}$, $j = 0, \dots, n-1$, no instante de tempo k , é definida por meio da seguinte igualdade

$$x_k^{(j)} = (2v_k^{(j)} - 1) + (2w_k^{(j)} - 1), \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (1)$$

A saída do canal representa a seqüência recebida

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1^N = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k, \dots, \mathbf{r}_N\},$$

em que $\mathbf{r}_k = (r_k^{(0)}, r_k^{(1)}, \dots, r_k^{(n-1)})$. A variável aleatória $r_k^{(j)}$, $j = 0, \dots, n-1$, no instante de tempo k , é definida pela seguinte igualdade

$$r_k^{(j)} = x_k^{(j)} + q_k^{(j)} \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (2)$$

em que os valores $q_k^{(j)}$ representam amostras independentes de RAGB com a mesma variância σ^2 e média zero.

C. O Decodificador

O decodificador utilizado, conforme ilustrado na Figura 2, emprega a decodificação iterativa [14] para detectar os pares de símbolos de informação binários mais prováveis: (u_k, d_k) . O algoritmo iterativo empregado faz uso da técnica conhecida como BCJR [12], adaptado para uso no 2-BAC,

fazendo uso da treliça para dois usuários [8]. São calculadas as razões de log-verossimilhança $\Lambda_1(u_k, d_k)$, $\Lambda_2(u_k, d_k)$ e $\Lambda_3(u_k, d_k)$ associadas ao par dos símbolos de informação (u_k, d_k) , relativos ao usuário 1 e ao usuário 2, respectivamente, em que

$$\Lambda_1(u_k, d_k) = \log \frac{P\{u_k = 1, d_k = 0 | \mathbf{r}\}}{P\{u_k = 0, d_k = 0 | \mathbf{r}\}}, \quad (3)$$

$$\Lambda_2(u_k, d_k) = \log \frac{P\{u_k = 1, d_k = 1 | \mathbf{r}\}}{P\{u_k = 0, d_k = 1 | \mathbf{r}\}}, \quad (4)$$

$$\Lambda_3(u_k, d_k) = \log \frac{P\{u_k = 0, d_k = 1 | \mathbf{r}\}}{P\{u_k = 0, d_k = 0 | \mathbf{r}\}}, \quad (5)$$

e $P\{u_k = i, d_k = s | \mathbf{r}\}$, $i \in \{0, 1\}$, $s \in \{0, 1\}$ denota a probabilidade *a posteriori* do par dos símbolos de informação (u_k, d_k) .

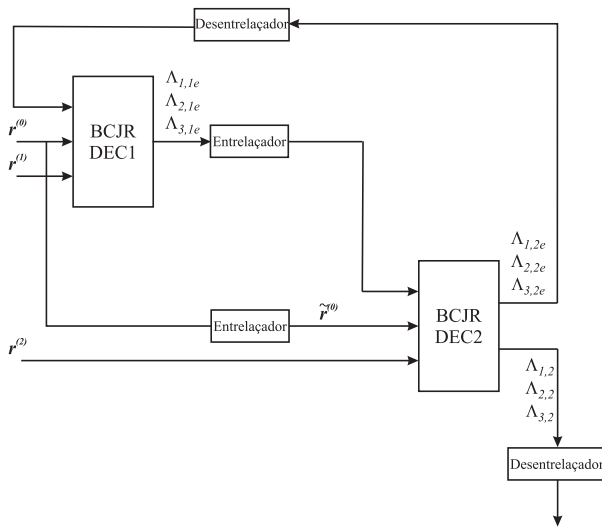


Fig. 2. Decodificador que utiliza o princípio da decodificação iterativa, formado por dois decodificadores componentes concatenados em série.

III. ENTRELAÇADORES

A construção de códigos turbo ainda é um tema em constante desenvolvimento. Contudo, existem regras simples, já sedimentadas na literatura acerca do tema, para o desenvolvimento dos mesmos [10]:

- Escolhem-se codificadores constituintes realimentados;
- Escolhem-se polinômios primitivos para a realimentação;
- Escolhem-se entrelaçadores com fatores de dispersão apropriados.

Um entrelaçador é um dispositivo de única entrada e única saída, cuja função é rearranjar a sequência de entrada em uma ordem temporal diferente na saída. O inverso desse processo é realizado pelo desentrelaçador, sendo este, responsável por restaurar a sequência de entrada.

A escolha de entrelaçadores trás um dilema: Entrelaçadores com padrões muito regulares podem apresentar fatores de espalhamento altos (isto é, mapeiam para posições afastadas *bits* que originalmente se encontravam em posições próximas), entretanto não possuem bom desempenho devido a multiplicidades altas do seu espectro de distâncias. Entrelaçadores

puramente aleatórios, por sua vez, resultam em códigos com baixas distâncias mínimas (d_{free}) sendo necessário se fazer então um compromisso entre estrutura e a aleatoriedade na criação de entrelaçadores.

A. Tipos de Entrelaçadores

É possível classificar os entrelaçadores propostos na literatura em categorias, a saber: entrelaçadores puramente aleatórios, entrelaçadores determinísticos e entrelaçadores aleatórios estruturados.

1) *Entrelaçadores Puramente Aleatórios*: Os códigos turbo originais [15] foram construídos utilizando-se de entrelaçadores que realizam uma permutação aleatória na sequência de entrada. Os codificadores aleatórios apresentam três desvantagens. A primeira é que permitem o mapeamento de índices próximos na entrada para índices próximos na saída, por exemplo, a sequência $(\dots u_6, u_7, u_8, u_9 \dots)$ pode ser mapeada para $(\dots u_6, u_{32}, u_{86}, u_9 \dots)$. Isto permite o aparecimento de palavras-código de baixo peso de Hamming, fazendo com que a distância mínima do código (d_{free}) seja baixa. Outra desvantagem é a necessidade de se armazenar todos os N índices do entrelaçador no codificador e todos os N índices do desentrelaçador no decodificador.

2) *Entrelaçadores Determinísticos*: Uma forma simples de evitar o mapeamento de índices próximos na sequência de entrada para índices próximos na sequência de saída, além de evitar a necessidade de se armazenar os N elementos do entrelaçador, é através de um entrelaçador retangular [9] ou polinomial [16].

a. Entrelaçadores Retangulares [9]

Sejam m e n dois números inteiros tais que $N = m \times n$. Forma-se uma matriz com m linhas e n colunas e escreve-se os índices da sequência de entrada na matriz preenchendo-a linha a linha e faz-se a leitura na saída do entrelaçador lendo-a coluna a coluna. Por exemplo, para o caso $N = 18$ pode-se usar uma matriz 3×6 como a seguir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \end{bmatrix}.$$

Representando a sequência $(u_0, u_1, \dots, u_{17})$ pelos seus índices, a permutação utilizada é:

$$\pi = (0, 6, 12, 1, 7, 13, 2, 8, 14, 3, 9, 15, 4, 10, 16, 5, 11, 17).$$

b. Entrelaçadores Polinomiais [16]

Estes utilizam polinômios de permutação sobre o anel \mathbb{Z}_N dos números inteiros, para a geração de sequências de permutações a partir dos índices das sequências de entrada. Por exemplo, para um comprimento $N = 256$, pode-se fazer uma permutação utilizando-se o polinômio:

$$P(x) = 8x^2 + 3x \pmod{256}.$$

É importante salientar que, para que os polinômios gerem permutações, existem algumas restrições para os coeficientes utilizados.

3) Entrelaçadores Aleatórios Estruturados:

a. Entrelaçadores S -aleatórios [11][18]

Os entrelaçadores S -aleatórios, propostos em 1995, diferem dos entrelaçadores puramente aleatórios por exigir que haja uma distância S (*spread factor*) entre os índices entrelaçados, isto é, índices próximos na seqüência de entrada do entrelaçador tem de ser separados por uma distância mínima na saída deste.

Cada número inteiro selecionado aleatoriamente como próximo membro da permutação é comparado com os S números inteiros previamente alocados. Caso o valor absoluto da diferença entre este número e qualquer um dos S números inteiros precedentes seja menor que S , então este é temporariamente descartado e outro é testado. Este processo é repetido até completar-se os N números inteiros do entrelaçador.

b. Entrelaçadores DRP [19]

Os entrelaçadores DRP (*Dithered Relative Primes*), introduzidos por Crozier e Guinand, são construídos em três etapas:

- 1. O vetor de entrada (seqüência crescente de números inteiros de 0 a $N - 1$) é segmentado em partes de comprimento n_i (em que n_i divide N) e o conteúdo em cada uma destas partes é permutado localmente usando um vetor i ;
- 2. O vetor resultante da operação do item anterior é então permutado utilizando-se um entrelaçador RP (relativamente primo), que consiste na permutação:

$$\pi(u) = s + Pu \pmod{N},$$

em que s é um número inteiro menor do que N e P é um número inteiro relativamente primo em relação ao comprimento N do entrelaçador;

- 3. Separa-se então em segmentos de comprimento n_j (em que n_j divide N) o vetor que resulta do entrelaçamento RP e o conteúdo em cada um destes segmentos é permutado localmente usando um vetor j .

Esta classe também é interessante do ponto de vista da economia de memória pois só é necessário o armazenamento do mínimo múltiplo comum dos comprimentos de i e j , denotado por M , o valor de P , além de um valor de inicialização [19].

Em [20] observou-se que um entrelaçador determinístico, quando utilizado na codificação turbo para um único usuário, resulta em um desempenho inferior se comparado a entrelaçadores com padrões de entrelaçamento irregulares, como é o caso dos entrelaçadores aleatório e aleatório estruturado. Contudo, em 2005 [16] os entrelaçadores determinísticos polinomiais apresentaram desempenho igual ou melhor se comparado os entrelaçadores puramente aleatórios e aleatórios com estrutura (Entrelaçadores S -aleatórios).

IV. RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta seção trata da apresentação de curvas de desempenho de códigos convolucionais não-unicamente decodificáveis no canal aditivo com dois usuários binários, que utilizam

entrelaçadores pertencentes a certas classes definidas na seção anterior. O objetivo é estudar o comportamento de diferentes entrelaçadores nos códigos turbo componentes, apresentando uma análise comparativa destas classes de entrelaçadores.

Sejam C_1^- e C_1^+ dois codificadores convolucionais idênticos recursivos sistemáticos com taxa $1/2$ e matriz geradora polinomial dada em (6).

$$G_1(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1 + D^2}{1 + D + D^2} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

De modo semelhante, sejam C_2^- e C_2^+ dois codificadores convolucionais idênticos recursivos sistemáticos com taxa $1/2$ e matriz geradora polinomial dada em (7).

$$G_2(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{D + D^2}{1 + D + D^2} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Estes codificadores estão dispostos conforme indicado na Figura 1 e descrito na seção II A. As curvas obtidas, relacionando a probabilidade de erro por *bit* e a relação sinal ruído para o usuário 1 e para o usuário 2, sobre o 2-BAC, com codificadores possuindo dois elementos de memória, são ilustradas nas figuras 3 e 4, respectivamente, para 1 iteração e para 10 iterações. Os entrelaçadores utilizados possuem comprimento de bloco de 512 e são: o BG (entrelaçador retangular) [15], [9]; o S -aleatório utilizando $S = 10$ [11],[18]; o aleatório [15]; o entrelaçador polinomial, com polinômio $32x^2 + 15x \pmod{512}$; o entrelaçador DRP [19] com parâmetros $s = 401$ e $i = j$.

Devido ao seu bom fator de dispersão, assim como entrelaçadores para códigos turbo para um único usuário, a classe de entrelaçadores polinomiais apresentou desempenho melhor ou igual aos que utilizam entrelaçadores aleatórios e S -aleatórios para dois usuários, com a vantagem de armazenar apenas os coeficientes do polinômio (contra toda a seqüência N necessária em entrelaçadores S -aleatórios).

Nas figuras 3 e 4, pode-se observar que para $\text{SNR} > 1,7$ dB o entrelaçador S -aleatório apresenta melhor desempenho se comparado ao entrelaçador puramente aleatório. Isto é justificado pelo fato do entrelaçador S -aleatório possuir um fator de dispersão melhor. Contudo, para um BER de 10^{-4} , o uso do entrelaçador puramente aleatório apresenta ganho aproximado de 1,0 dB comparando-se o uso do entrelaçador BG, para os dois usuários. Observa-se também que, para 10 iterações, não há como distinguir as curvas relacionadas ao uso dos entrelaçadores DRP, S -aleatório e polinomial, uma vez que estas estão sobrepostas.

Os resultados, que podem ser vistos nas figuras 3 e 4, mostram que para $P_b = 10^{-4}$ as classes de entrelaçadores DRP, S -aleatórios e polinomiais, embora sobrepostos, são as que apresentam melhor desempenho em relação aos determinístico retangular (BG), com uma relação sinal ruído 1,0 dB menor em relação ao limite de Shannon de 0,6308¹, a uma taxa de 10^{-4} , para os dois usuários em um esquema com dez iterações. Assim como os entrelaçadores polinomiais,

¹Limite de Shannon teórico calculado para o canal aditivo com dois usuários binários (2-BAC).

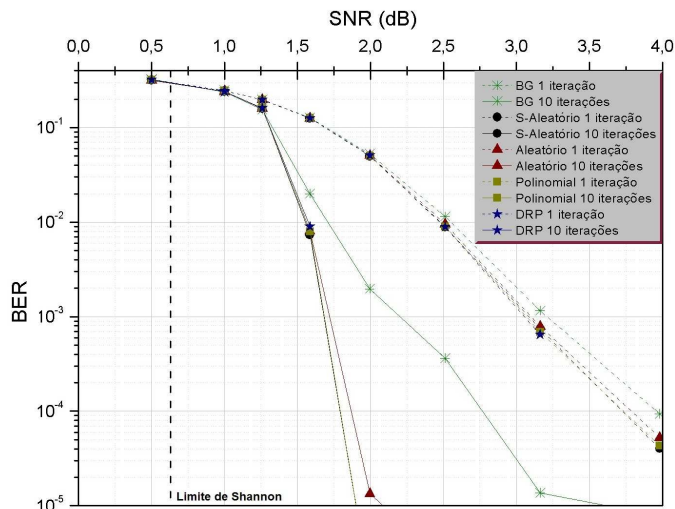


Fig. 3. Curvas relacionadas ao usuário 1. Probabilidade de erro por bit versus relação sinal ruído em dB para um código convolucional de taxa 1/2 e matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & 1+D^2 \\ 1+D & D^2 \end{bmatrix}$, sobre o canal aditivo para dois usuários binários.

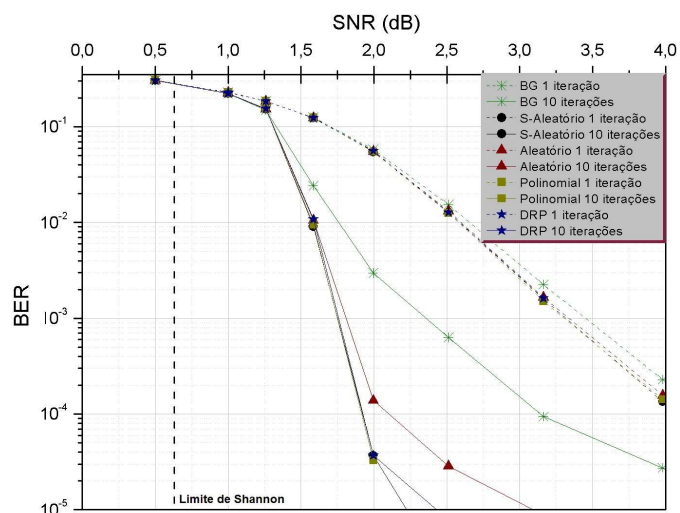


Fig. 4. Curvas relacionadas ao usuário 2. Probabilidade de erro por bit versus relação sinal ruído em dB para um código convolucional de taxa 1/2 e matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & D+D^2 \\ 1+D & D^2 \end{bmatrix}$, sobre o canal aditivo para dois usuários binários.

os entrelaçadores DRP são interessantes do ponto de vista da economia de memória pois só é necessário o armazenamento de três números inteiros: M (mínimo múltiplo comum dos comprimentos de i e j), o valor de P e um valor de inicialização para a geração do entrelaçador através de um algoritmo iterativo [19].

Seguindo as conclusões dos códigos turbo para um único usuário [16], de maneira qualitativa, conclui-se que o entrelaçador indicado para códigos convolucionais não-unicamente decodificáveis no canal aditivo com dois usuários binários, deva apresentar uma estrutura irregular e um bom fator de dispersão.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho recebeu apoio parcial da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), projetos 306612/2007-0, 555046/2008-7 e 141346/2008-6.

REFERÊNCIAS

- [1] T. Kasami and Shu Lin, "Coding for a multiple-access channel", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 22, Number 2, pp.129-137, March 1976.
- [2] C. E. Shannon, "Two-way communication channels", in *Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.*, vol. 1, pp.611-644, 1961. Reprinted in *Key Papers in the Development of Information Theory.*, D. Slepian, Ed. New York, IEEE Press, pp.339-372, 1974.
- [3] M. Mattas and P. R. J. Ostergard, "A new bound for the zero-error capacity region of the two-user binary adder channel", *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. 51, pp. 3289-3291, 1974.
- [4] L. Kiviluoto and P. R. J. Ostergard, "New uniquely decodable codes for the t-user binary adder channel with $3 \leq t \leq 5$ ", *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. 53, pp. 1219-1220, 2007.
- [5] V. C. da Rocha Jr. and M. L. M. G. Alcoforado, "Trellis code construction for the 2-user binary adder channel", in the Proceedings of 11th International Conference on Telecommunications, 1-5 August 2004, Fortaleza, Ceará, Brazil. Editors J. Neuman and P. Dini, Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, Germany, v. 3124, pp. 122-127, 2004.
- [6] V. C. da Rocha Jr. and M. L. M. G. Alcoforado, "Uniquely decodable trellis codes for the two user binary adder channel", *International Symposium on Information Theory and its Applications*, 10-13 October 2004, Parma, Italy.
- [7] M. L. M. G. Alcoforado, V. C. da Rocha Jr. and Márcio J. de C. Lima, "A Turbo Coding Scheme not necessarily uniquely decodable for the Two-User Binary Adder Channel". In: International Telecommunications Symposium, ITS, 2010, Manaus, Amazonas, Brazil. International Telecommunications Symposium, SBTr/IEEE, 2010.
- [8] M. L. M. G. Alcoforado, V. C. da Rocha Jr., G. Markarian and Márcio J. de C. Lima, "Iterative decoding of turbo convolutional codes over noisy two-user binary adder channel". *Electronics Letters*, v. 47, pp. 749 - 751, 2011.
- [9] C. Berrou and A. Glavieux, "Near optimum error correcting coding and decoding: turbo-codes", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, no.10, pp. 1261-1271, 1996.
- [10] M. J. e Silva, *Projeto de Entrelaçadores para Código Turbo*. Recife, 2006. Dissertação em Engenharia Elétrica - Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco.
- [11] S. Dolinar and D. Divsalar, "Weight distributions for turbo codes using random and nonrandom permutations", *JPL TDA Progress Report*, v. 42, p. 56-65, August 1995.
- [12] L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek and J. Raviv, "Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 20, pp. 284-287, 1974.
- [13] R. Peterson and D. J. Costello, Jr., "Binary convolutional codes for a multiple-access channel", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 25, no. 1, pp. 101-105, 1979.
- [14] J. Hagenauer, "Iterative decoding of binary block and convolutional codes", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, no. 2, pp. 429-445, 1996.
- [15] C. Berrou, A. Glavieux and P. Thitimajshima, "Near Shannon limit, error-correcting coding and decoding: turbo codes", *IEEE International Conference on Communications (ICC'93)*, vol. 2/3, pp. 1064-1071, 1993.
- [16] J. Sun and O. Y. Takeshita, "Interleavers for turbo codes using permutation polynomials over integer rings", *IEEE Trans. Inform. Theory*, v. 51, p. 101-119, January 2005.
- [17] S. Lin and D. Costello Jr., *Error Control Coding: Fundamentals and Applications*, 2nd Edition, Prentice-Hall, USA, 2004.
- [18] D. Divsalar and F. Pollara, "Turbo codes for pcs applications", *Proceedings of the IEEE International on Communications*, p. 54-59, 1995.
- [19] S. Crozier and P. Guinand, "High-performance low-memory interleaver banks for turbo-codes", *Proceedings of the 2001 IEEE Vehicular Technology Conference*, v. 4, p. 2394-2398, November 2001.
- [20] L. C. Perez, J. Seghers and D. J., Jr. Costello, "A distance spectrum interpretation of turbo codes", *IEEE Trans. Inform. Theory*, v. 42, p. 1698-1709, January 1996.