

AVALIAÇÃO ANALÍTICA DO USO DE *DENOISING* EM RECEPTORES DIGITAIS PARA MODULAÇÃO BPSK E CANAIS AWGN

Juraci F. Galdino† Ernesto L. Pinto† Marcelo S. Alencar

†Departamento de Engenharia Elétrica, Instituto Militar de Engenharia – IME
Laboratório de Comunicações, DEE, COPELE – Universidade Federal da Paraíba
{galdino,malencar}@dee.ufpb.br ernesto@aquarius.ime.eb.br

RESUMO

Neste trabalho avalia-se analiticamente o desempenho de sistemas de comunicações digitais que empregam *denoising* no processamento de entrada de seus receptores. A análise contempla sistemas que envolvem canais AWGN e modulação BPSK. Os resultados analíticos, validados por simulação computacional, demonstram o sucesso da técnica proposta, motivando a investigação de seu uso em cenários mais complexos.

1. INTRODUÇÃO

O efeito do ruído branco em sistemas de comunicações digitais pode ser minimizado com o uso de filtro casado, o qual permite otimizar a razão sinal-ruído (SNR, *signal-to-noise ratio*) nos pontos de amostragem.

Em alguns casos é, no entanto, praticamente inviável utilizar essa abordagem. Importantes cenários em que isto ocorre são recepção cega e comunicação através de canais seletivos e desconhecidos, como, por exemplo, em comunicações móveis. Nessas situações geralmente adota-se filtro de recepção com resposta impulsional (RI) casada com a RI do filtro de transmissão, conjuntamente atendendo ao primeiro critério de Nyquist [1]. Filtros projetados dessa forma não maximizam a SNR nos instantes de amostragem, mas garantem que a IES nesses instantes resulte unicamente da ação dispersiva do canal.

Em [2] foi proposto o uso de técnicas de *denoising* para remover ruído em sistemas de comunicações digitais que operam em canais seletivos. No entanto, face à dificuldade de uma abordagem analítica, nesse trabalho avaliou-se o desempenho desses esquemas mediante simulação computacional.

As técnicas de *denoising* são computacionalmente simples e reduzem o nível de ruído sem requererem o conhecimento da RI do canal de comunicação, o que é importante em aplicações para canais seletivos e/ou variantes. Além disso, mostrou-se em [2] que essas ferramentas permitem melhorar sensivelmente o desempenho dos sistemas de comunicações digitais.

Neste trabalho, motivado pelas interessantes propriedades das técnicas de *denoising* e, principalmente, pelos resultados de desempenho documentados em [2], avalia-se analiticamente o desempenho de esquemas que empregam técnicas de *denoising* no processamento de entrada de receptores digitais. Os estudos aqui realizados contemplam canais AWGN e modulação BPSK.

A análise realizada elucida aspectos importantes relacionados com o tipo de transformada *wavelet* e parâmetros do procedimento de *denoising*. Ela representa um passo inicial no sentido de se abordar analiticamente modelos de sistemas mais complexos,

principalmente no que se refere ao canal, contemplando cenários em que o uso de filtros lineares previamente projetados não conseguem maximizar a SNR nos instantes de amostragem.

O trabalho é organizado como segue. Na Seção 2 apresenta-se o modelo do sistema de comunicação simulado e o procedimento de *denoising*. Na seção 3 obtém-se uma aproximação analítica da função densidade de probabilidade (fdp) do sinal na entrada do decisor. Na seção 4 avalia-se a probabilidade de erro do esquema proposto. Na Seção 5 são apresentados os resultados de simulações e, por fim, na Seção 6 são apresentadas as conclusões do trabalho.

2. *DENOISING* EM SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES DIGITAIS

O diagrama de blocos do modelo do sistema de comunicação simulado neste trabalho é mostrado na Figura 1. A fonte digital emite símbolos BPSK independentes e igualmente prováveis.

O receptor é composto de processamento de entrada e decisor. O processamento de entrada, por sua vez, é constituído de filtro limitador de faixa, amostrador na taxa T/P , células de memória, procedimento de *denoising* e decimador de P amostras. Conforme mostrado na Figura 1, o processamento de entrada é realizado em uma taxa P vezes maior do que a de transmissão, porém o equalizador é implementado na taxa de símbolos.

Denoising é uma técnica de filtragem não-linear, não-paramétrica e realizada no domínio *wavelet* e que tem por objetivo remover ruído. Essa técnica foi inicialmente proposta por Donoho para se beneficiar, principalmente, da propriedade de representação parcimoniosa das *wavelets* [3] [4].

Considerando-se que o sinal recebido na entrada do receptor no n -ésimo intervalo de sinalização é dado por

$$y_n(k) = g_n(k) + \eta_n(k), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, P, \quad (1)$$

sendo P o fator de superamostragem, $\eta_n(k)$ ruído gaussiano branco com média nula e variância σ^2 e $g_n(k) = s_n h(k)$, em que $h(\cdot)$ representa a RI do filtro de transmissão, que no caso em questão assume-se que possui duração igual ou inferior ao intervalo de sinalização. Além disso, s_n é o símbolo transmitido no n -ésimo intervalo de sinalização. Neste trabalho assume-se que $s_n \in \{-1, 1\}$.

As técnicas de *denoising* tomam a transformada *wavelet* discreta (DWT) de $\mathbf{y}_n = (y_n(1), \dots, y_n(P))'$, sendo que $(\cdot)'$ denota o operador transposto, e excluem do processo de síntese componentes que possuam amplitudes inferiores a um determinado limiar, λ . Isso é feito com o intuito de eliminar coeficientes que decorrem da

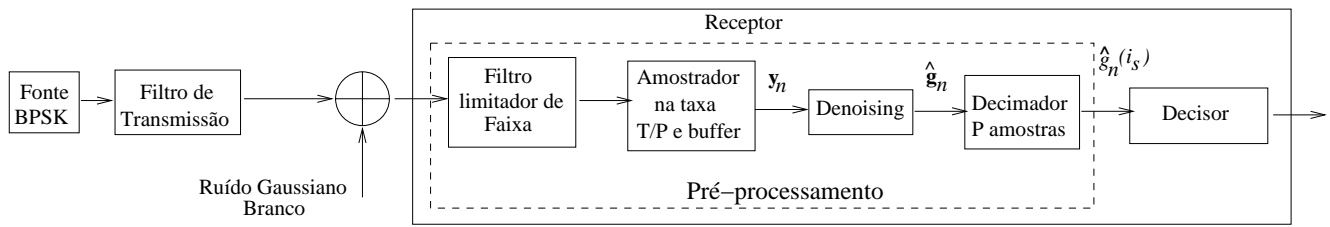


Figura 1: Diagrama de blocos do sistema simulado.

decomposição do ruído ou da conjunção de ruído e de porções de sinal com pouca energia.

Por outro lado, os coeficientes com amplitudes maiores do que λ podem ser mantidos inalterados ou terem seus valores reduzidos, de acordo com o tipo de *denoising*. A estimativa de $\mathbf{g}_n = (g_n(1), \dots, g_n(P))'$, aqui denotada por $\hat{\mathbf{g}}_n = (\hat{g}_n(1), \dots, \hat{g}_n(P))'$, é obtida realizando a transformada inversa (IDWT) dos coeficientes resultantes.

Denotando-se $\boldsymbol{\alpha}_n = (\alpha_n(1), \dots, \alpha_n(Q))'$ como a DWT de \mathbf{y}_n , o mapeamento pode ser representado por

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{W} \mathbf{y}_n, \quad (2)$$

na qual \mathbf{W} denota uma matriz de dimensão $Q \times P$ representando o operador linear que realiza o mapeamento do sinal no domínio do tempo para o domínio *wavelet* [3]. Em *denoising*, geralmente emprega-se transformadas *wavelets* ortogonais, portanto a IWDT pode ser representada por \mathbf{W}' .

Denotando-se $\boldsymbol{\theta}_n = (\theta_n(1), \dots, \theta_n(Q))'$ e $\boldsymbol{\eta}_n = (\eta_n(1), \dots, \eta_n(Q))'$, como as DWTs de \mathbf{g}_n e $\boldsymbol{\eta}_n$, respectivamente¹, a Equação 1 pode ser reescrita no domínio *wavelet* da seguinte maneira

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\theta}_n + \boldsymbol{\eta}_n. \quad (3)$$

Existem várias abordagens para obter os coeficientes na saída do procedimento de comparação contra o limiar λ . Esses coeficientes são aqui denotados por $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\hat{\theta}_n(1), \dots, \hat{\theta}_n(Q))'$. Dentre essas abordagens destacam-se os mapeamentos suave e abrupto.

Antes de discutir esses mapeamentos cabe aqui uma observação. Para simplificar a notação, doravante o sub-índice que denota o intervalo de sinalização será omitido, sendo utilizado apenas quando esta informação for importante. Em sua posição será empregado o índice que especifica a posição da amostra dentro do intervalo de símbolos.

No procedimento com limiar abrupto, aqui denotado por T_A , se a amplitude de um determinado coeficiente da transformada da observação estiver abaixo do limiar λ , ele será eliminado da expansão, do contrário, ele é mantido inalterado. Dessa forma tem-se

$$\hat{\theta}_i = T_A(\alpha_i, \lambda) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{se } |\alpha_i| > \lambda \\ 0, & \text{se } |\alpha_i| \leq \lambda \end{cases}, \quad (4)$$

para $i \in [1, \dots, Q]$.

¹Para o ruído utilizou-se a mesma notação nos domínios do tempo e *wavelets*. Isto pode ser realizado sem incorrer em ambigüidade devido ao uso de transformação ortonormal que mantém inalteradas as propriedades estatísticas do ruído.

No procedimento com limiar suave, aqui denotado por T_S , os coeficientes são zerados se estiverem abaixo e reduzidos se estiverem acima do limiar. Neste caso, $\hat{\theta}_i$ fica dado por

$$\hat{\theta}_i = T_S(\alpha_i, \lambda) = \begin{cases} \text{sign}(\alpha_i) (|\alpha_i| - \lambda), & |\alpha_i| > \lambda \\ 0, & |\alpha_i| \leq \lambda \end{cases}, \quad (5)$$

sendo que $\text{sign}(\cdot)$ denota a função sinal. Independentemente do mapeamento o sinal estimado, $\hat{\mathbf{g}}$, é dado por

$$\hat{\mathbf{g}}_n = \mathbf{W}' \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (6)$$

Admitindo-se que o índice do instante ótimo de amostragem dentro do intervalo de símbolo é i_s , então o sinal digital na entrada do equalizador no n -ésimo intervalo de sinalização é dado por $\hat{g}_n(i_s)$. Que pode ser expresso por

$$\hat{g}_n(i_s) = \mathbf{W}(:, i_s) \boldsymbol{\theta}_n \quad (7)$$

sendo que $\mathbf{W}(:, i_s)$ denota a i_s -ésima coluna da matriz \mathbf{W} .

O desempenho das técnicas de *denoising* depende de vários fatores, dentre os quais de λ , da estratégia de mapeamento e da transformada *wavelet* utilizada.

Foi mostrado em [5] que a função densidade de probabilidade, fdp, da variável aleatória, VA, $\hat{\theta}_i$ é dada por

$$f_{\hat{\theta}_i}(\zeta) = (1 - p_i) \delta(\zeta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\zeta - \hat{\theta}_i + \lambda)^2}{2\sigma^2}} u(\zeta) + e^{-\frac{(\zeta - \hat{\theta}_i - \lambda)^2}{2\sigma^2}} u(-\zeta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}, \quad (8)$$

na qual $u(\cdot)$ representa a função degrau unitário e $\delta(\cdot)$ o impulso unitário. Além disso,

$$p_i = \Pr(|\xi_i| > \lambda) \text{ e } \xi_i \sim \mathcal{N}(g_i, \sigma^2), \quad (9)$$

sendo que $\mathcal{N}(a, b)$ denota uma fdp gaussiana com média a e variância b . Prova-se também em [5] que os $\{\hat{\theta}_i\}$ são estatisticamente independentes e que seus momentos são dados por:

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{\theta}_i}(0) &= 1 \text{ e} \\ \mu_{\hat{\theta}_i}(m) &= \mu_m^1 + \mu_m^2 \text{ e para } m \geq 1 \end{aligned} \quad (10)$$

com

$$\begin{aligned} \mu_m^1 &= (m-1)\sigma^2 \mu_{m-2}^1 + (\hat{\theta}_i - \lambda) \mu_{m-1}^1, \\ \mu_m^2 &= (m-1)\sigma^2 \mu_{m-2}^2 + (\hat{\theta}_i + \lambda) \mu_{m-1}^2. \end{aligned} \quad (11)$$

As equações recorrentes apresentadas acima são válidas para $m \geq 2$ e possuem as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned}\mu_0^1 &= q_i, & \mu_0^2 &= p_i - q_i, \\ \mu_1^1 &= (g_i - \lambda) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\hat{\theta}_i - \lambda)^2}{2\sigma^2}\right] e \\ \mu_1^2 &= (\hat{\theta}_i + \lambda) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(g_i + \lambda)^2}{2\sigma^2}\right].\end{aligned}\quad (12)$$

É importante verificar que para $\lambda = 0$, tem-se $p_i = 1$ e $f_{\hat{\theta}_i}(\cdot)$ é dada por uma gaussiana com média $\hat{\theta}_i = \theta_i$ e variância σ^2 , para todo i , que é o resultado esperado. Por outro lado, quando $\lambda \rightarrow \infty$, tem-se que $p_i \rightarrow 0$ e $f_{\hat{\theta}_i}(\cdot) \rightarrow \delta(\cdot)$, que também é o resultado esperado, pois, para sinais de energia, que são os de interesse neste trabalho, é impossível que algum coeficiente supere λ .

Devido à independência das VAs $\{\theta_i\}$ na Equação 7, a fdp de $\hat{g}_n(i_s)$ é dada pela convolução das VAs $\kappa_i \triangleq \mathbf{W}(i, i_s) \theta_i$, cada qual com a seguinte fdp

$$f_{\kappa_i}(\zeta) = P_i \delta(\zeta) + f_i(\zeta), \quad (13)$$

sendo que $P_i \triangleq 1 - p_i$, com w_i extraído dentre os elementos não nulos da i_s -coluna da matriz *wavelet* e

$$\begin{aligned}f_i(\zeta) &\triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi w_i^2} \sigma} e^{-\frac{(\zeta - (\hat{\theta}_i - \lambda) w_i)^2}{2\sigma^2 w_i^2}} u(\zeta) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi w_i^2} \sigma} e^{-\frac{(\zeta - (\hat{\theta}_i + \lambda) w_i)^2}{2\sigma^2 w_i^2}} u(-\zeta).\end{aligned}\quad (14)$$

Dessa forma a fdp de $\hat{g}_n(i_s)$ pode ser escrita por

$$\begin{aligned}f_{\hat{g}}(\zeta) &= (P_0 \delta(\zeta) + f_0(\zeta)) \otimes \cdots \otimes (P_{K-1} \delta(\zeta) + f_{K-1}(\zeta)) \\ &= \bigotimes_{i=0}^{K-1} (P_i \delta(\zeta) + f_i(\zeta)),\end{aligned}\quad (15)$$

na qual K denota a quantidade de entradas não nulas da i_s -ésima coluna de \mathbf{W} , portanto, $K \leq P$ e \otimes denota a operação de convolução.

É difícil determinar analiticamente a fdp de $\hat{g}_n(i_s)$. Diante disso, é interessante usar uma aproximação analítica baseada em seus momentos, os quais podem ser obtidos analiticamente.

Definindo Z_k como a soma parcial as VAs κ_i ,

$$Z_k \triangleq \sum_{i=1}^k \kappa_i, \quad 1 \leq k \leq P \quad (16)$$

e

$$\begin{aligned}\mu_Z^m(k) &= E(Z_k^m), & \mu_{\kappa_i}(m) &= E(\kappa_i^m), \\ \mu_g(m) &= E(\hat{g}_{i_s}^m) e \mu_{\theta_i}(m) &= E(\hat{\theta}_i^m)\end{aligned}\quad (17)$$

como sendo os momentos de ordem m de Z_k , κ_i , \hat{g}_{i_s} e $\hat{\theta}_i$, respectivamente, pode-se expressar os momentos de Z_k em função dos momentos de κ_i , da seguinte maneira

$$\mu_Z^m(k) = \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \mu_Z^p(k-1) \mu_{\kappa}(m-p) \quad \text{para } k > 1. \quad (18)$$

A Equação 18 fornece, de forma recursiva, os momentos da soma de k VAs estatisticamente independentes em termos dos momentos da soma de $k-1$ dessas VAs e dos momentos da k -ésima VA. Em particular, tem-se que

$$\mu_g(m) = \mu_Z^m(N). \quad (19)$$

Combinando as Equações 18 e 19 com

$$\mu_{\kappa_i}(m) = W(i, i_s)^m \mu_{\theta_i}(m), \quad (20)$$

vê-se como os momentos de $\hat{g}_n(i_s)$ são determinados pelos momentos das VAs $\{\theta_n(i)\}$.

3. APROXIMAÇÃO ANALÍTICA DA FDP A PARTIR DOS MOMENTOS DA ENTRADA DO RECEPTOR

Existem várias técnicas para aproximar a fdp de uma VA a partir de seus momentos. Dentre estas destacam-se a regra da quadratura de Gauss, série de Edgeworth, série de Gram-Charlier e maximização da entropia². Contudo, essas técnicas não funcionam bem quando a fdp alvo é mista e, principalmente, quando ela apresenta descontinuidade, inconvenientes esses que ocorrem conjuntamente na fdp de $\hat{g}_n(i_s)$.

Portanto, antes de aplicar uma das técnicas dos momentos para aproximar a fdp de $\hat{g}_n(i_s)$ é preciso manipulá-la, no sentido de separar, em termos de seus momentos, os efeitos da descontinuidade e impulso.

O impulso em $\hat{g}_n(i_s)$ pode ser facilmente isolado tendo em vista que sua localização e peso podem ser determinados analiticamente e que afeta apenas o momento de ordem zero. No entanto, a descontinuidade não pode ser tratada da mesma forma, por afetar todos os momentos de forma diferenciada e desconhecida. Diante do exposto, optou-se por expandir as convoluções e identificar os termos relacionados com o descontinuidade.

Utilizando a propriedade de distributividade e de linearidade do operador convolução, a Equação 15 pode ser reescrita da seguinte maneira

$$f_{\hat{g}}(\zeta) = A \delta(\zeta) + \sum_{i=0}^{K-1} A_i f_i(\zeta) + r(\zeta). \quad (21)$$

sendo

$$\begin{aligned}r(\zeta) &= \sum_{i=1}^{l_2(K)} A_{V_2(i)} \bigotimes_{i=V_2(i,1)}^{V_2(i,2)} f_i(\zeta) + \cdots + \\ &\sum_{i=1}^{l_{K-1}(K)} A_{V_{K-1}(i)} \bigotimes_{i=V_{K-1}(i,1)}^{V_{K-1}(i,K-1)} f_i(\zeta) + \bigotimes_{i=0}^{K-1} f_i(\zeta), \\ A &= \prod_{i=0}^{K-1} P_i \text{ e } A_i = \prod_{j=0, j \neq i}^{K-1} P_j,\end{aligned}\quad (22)$$

e $l_j(m)$ um inteiro que denota a quantidade de termos formados pela convolução de j funções considerando $K = m$. Existe uma fórmula de recorrência envolvendo estes inteiros que é dada por [5]

$$l_j(k) = l_{j-1}(k-1) + l_j(k-1), \quad (24)$$

²Em [5] apresenta-se uma discussão sumária destas técnicas e diversas referências nesse assunto.

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} l_k(k) &= 1, \text{ para } \forall k, k \leq K; \\ l_1(k) &= 1, \text{ para } \forall k, k \leq K \text{ e} \\ l_j(k) &= 0, \text{ para } \forall k, j \text{ com } k > j \text{ e } k \leq K. \end{aligned} \quad (25)$$

Por fim, V_j é uma matriz de índices de dimensão $l_j(k) \times n$. Cujas linhas contêm os índices das funções que compõem a convolução.

O primeiro termo do lado direito da Equação 21 representa um impulso em zero com amplitude conhecida, o segundo é uma soma ponderada das funções $\{f_i(\cdot)\}$, na qual tanto as funções quanto os termos de ponderação são conhecidos, este termo é responsável pela presença da descontinuidade na fdp da VA na entrada do decisor e $r(\cdot)$ é uma função contínua.

Verifica-se que a função característica de $f_{\hat{g}}(\cdot)$, $C_{\hat{g}}$, pode ser dada por

$$C_{\hat{g}}(w) = S(w) + R(w) \quad (26)$$

sendo,

$$S(w) = A + \sum_{i=0}^{K-1} A_i C_i(w), \quad (27)$$

e

$$C_i(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x) e^{jwx} dx. \quad (28)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} R(w) &= \sum_{i=1}^{l_2(K)} \left(A_{V_2(i)} \prod_{i=V_2(i,1)}^{V_2(i,2)} C_i(w) \right) + \dots \\ &+ \sum_{i=1}^{l_{K-1}(k)} \left(A_{V_{K-1}(i)} \prod_{i=V_{K-1}(i,1)}^{V_{K-1}(i,K-1)} C_i(w) \right) \\ &+ \prod_{i=0}^{K-1} C_i(w). \end{aligned} \quad (29)$$

Admitindo-se que $C_i(w)$ pode ser representado por

$$C_i(w) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(jw)^l \mu_i(l)}{l!}, \quad (30)$$

com

$$\mu_i(n) = \begin{cases} \mu_{\kappa_i}(n) & \text{se } n \geq 1, \\ 1 - P_i & \text{se } n = 0. \end{cases} \quad (31)$$

pode-se escrever

$$S(w) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(jw)^l \mu_s(l)}{l!}, \quad (32)$$

com

$$\mu_s(l) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{K-1} A_i \mu_i(l) & \text{se } l \geq 1 \\ A + \sum_{i=0}^{K-1} A_i \mu_i(0) & \text{se } l = 0 \end{cases}. \quad (33)$$

Considerando-se que $C_{\hat{g}}(w)$ admite uma série do tipo

$$C_{\hat{g}}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jw)^k \mu_g(k)}{k!}, \quad (34)$$

então, $R(\cdot)$ pode ser expressa da seguinte maneira

$$R(w) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(jw)^l \mu_r(l)}{l!}, \quad (35)$$

com

$$\mu_r(l) = \mu_g(l) - \mu_s(l). \quad (36)$$

A partir das equações dadas acima $R(\cdot)$ e $S(\cdot)$ podem ser vistas como funções características das VAs r e s , a menos de multiplicação por constantes. Tomando a transformada inversa obtém-se novamente a Equação 21 na qual $r(\cdot)$ pode ser interpretada como uma fdp ponderada por uma constante.

Como A , os coeficientes $\{A_i\}$ e as funções $\{f_i(\cdot)\}$ são conhecidas, vê-se, a partir da Equação 21, que a fdp de $\hat{g}_n(i_s)$ fica determinada com a especificação da fdp da VA r e como esta VA é contínua e seus momentos foram obtidos analiticamente, espera-se conseguir boas aproximações.

Admitindo-se que uma aproximação analítica para $r(\cdot)$, aqui denotada por $\hat{r}(\cdot)$ tenha sido obtida, a aproximação da fdp de $\hat{g}_n(i_s)$ fica dada por

$$\hat{f}_{\hat{g}}(\zeta) = A \delta(\zeta) + \sum_{i=0}^{K-1} f_i(\zeta) A_i + \hat{r}(\zeta) \quad (37)$$

Na próxima seção será avaliado o desempenho do sistema de comunicação, usando este procedimento para obter a aproximação da fdp.

4. DETERMINAÇÃO DA PROBABILIDADE DE ERRO

Pode-se verificar a partir da definição da VA θ_i que

$$\mu_{\theta_i|1}(m) = \begin{cases} \mu_{\theta_i|-1}(m) & \text{para } m \text{ par e,} \\ -\mu_{\theta_i|-1}(m) & \text{para } m \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (38)$$

Como consequência disto tem-se que

$$\mu_{\kappa_i|1}(m) = \begin{cases} \mu_{\kappa_i|-1}(m) & \text{para } m \text{ par e,} \\ -\mu_{\kappa_i|-1}(m) & \text{para } m \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (39)$$

Em função das Equações 38 e 39, pode-se verificar que

$$\mu_{Z|1}^1(1) = -\mu_{Z|-1}^1(1). \quad (40)$$

Com argumentos similares verifica-se também que

$$\mu_{Z|1}^1(2) = \mu_{Z|-1}^1(2). \quad (41)$$

Os sub-índices -1 e 1 especificam o símbolo transmitido. Cabe notar que, em particular, na Equação 40, $\mu_{Z|1}^m(k)$ é o m -ésimo momento de Z obtido a partir da soma de k VAs κ_i condicionada a transmissão do símbolo 1 , ao passo que $\mu_{Z|-1}^m(k)$ representa esse mesmo momento, considerando a transmissão do símbolo -1 . Admitindo-se que

$$\mu_{Z|1}^n(k-1) = \begin{cases} \mu_{Z|-1}^n(k-1) & \text{para } n \text{ par e,} \\ -\mu_{Z|-1}^n(k-1) & \text{para } n \text{ ímpar,} \end{cases} \quad (42)$$

mostrou-se em [5] que os momentos pares da VA $\hat{g}_n(i_s)$ são iguais, independente do símbolo transmitido e que os momentos

ímpares, condicionando-se ao símbolo 1, são iguais em módulo e com sinal contrário, aos momentos dessa VA condicionando-se a símbolo -1.

Portanto, para k par verifica-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{g|s=1}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{g|s=-1}(x) dx, \quad (43)$$

sendo $f_{g|s=1}(\cdot)$ e $f_{g|s=-1}$ fdps da VA $g_n(i_s)$ condicionada à transmissão do símbolo $s_n = 1$ e $s_n = -1$, respectivamente. Como x^k é uma função par, $f_{g|s=1}(\cdot) - f_{g|s=-1}(\cdot)$ deve ser uma função ímpar.

Com argumentação similar para k ímpar, chega-se à conclusão de que $f_{g|s=1}(\cdot) + f_{g|s=-1}(\cdot)$ deve ser uma função par.

Diante destas constatações, pode-se concluir que o limiar de decisão ótimo no sentido de minimizar a probabilidade de erro é zero. Este resultado é importante, pois como o procedimento de *denoising* é não-linear e polarizado, não é possível estabelecer a priori o limiar ótimo de decisão.

Para o limiar de detecção estabelecido acima, a probabilidade de erro do sistema é definida como

$$Pe = \Pr(\hat{g}_n(i_s) > 0 | s_n = -1). \quad (44)$$

Considerando-se a Equação 37 a estimativa da probabilidade de erro, $\hat{P}e$, fica dada por

$$\hat{P}e = \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{K-1} A_i \Phi_G \left(\frac{h_i + \lambda}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \int_0^{\infty} \hat{f}_r(x) dx, \quad (45)$$

sendo $\Phi_G(\cdot)$ definida por

$$\Phi_G(x_0) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{\infty} \exp(-x^2) dx, \quad (46)$$

e $\{h_i\}$ a DWT da RI do filtro de transmissão. É importante ressaltar que, dependendo das técnicas de aproximação empregada, a integral do lado direito da Equação 45 pode ser determinada analiticamente. Isto é possível, por exemplo, com a série de Gram-Charlier, série de Edgeworth e com a regra da quadratura de Gauss.

De acordo com a equação apresentada acima, verifica-se que a probabilidade de erro do sistema fica explicitamente determinada em função do limiar de *denoising* e implicitamente pelas funções de base da transformada *wavelet*, por meio de $\{h_i\}$, $\{A_i\}$ e A . Em decorrência disto, pode-se estabelecer um problema de otimização com restrições, no qual a função custo a ser otimizada é a probabilidade de erro do sistema e as restrições são especificadas de tal sorte que a matriz \mathbf{W} atenda as condições para que ela represente uma matriz *wavelet* [3].

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados os resultados da avaliação de desempenho do sistema em investigação, obtidos pelo procedimento de aproximação analítica proposto e por simulação de Monte Carlo, admitindo-se que a RI do filtro de transmissão é dada pelo formato do pulso de Hanning e a SNR foi expressa pela razão entre a potência do sinal e a potência do ruído, ambas medidas na entrada do receptor. Em particular, para gerar os resultados analíticos utilizou-se a série de Gram-Charlier com seis momentos. É importante lembrar que em todos os casos foi considerado *denoising* com mapeamento suave.

Os desempenhos foram avaliados em termos de alguns parâmetros importantes do procedimento de *denoising*. Dentre os quais destacam-se o fator de superamostragem P , o limiar de *denoising* λ , o tipo de funções de base e a quantidade de níveis de decomposição da transformada *wavelet*, aqui representado por J . É importante destacar que a quantidade de níveis de decomposição é igual a quantidade de subespaços funcionais utilizados na decomposição *wavelet*.

Na Figura 2 são mostradas curvas desempenho em função do limiar de *denoising*, admitindo-se SNR=4 dB, $P = 32$, DWT com três níveis de decomposição, ($J = 3$), e as *wavelets* de Daubechies-1 e Daubechies-2, aqui são denotadas por Db1 e Db2, respectivamente [6].

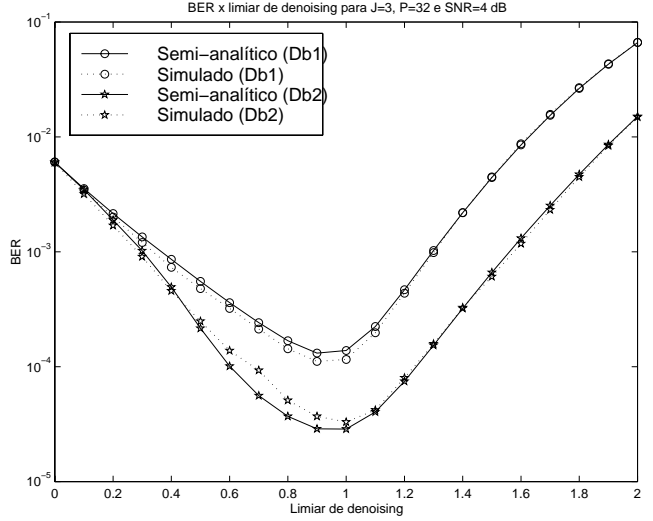


Figura 2: BER x limiar de *denoising* para as funções de base Db1, Db2 e Db3 considerando $J = 2$, $P = 32$ e SNR=4 dB.

Para as *wavelets* Db1 as RIs dos filtros das *wavelets*, aqui denotada por \mathbf{h}_H , e de escalonamento, \mathbf{l}_H são:

$$\mathbf{l}_H = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)' \quad (47)$$

$$\mathbf{h}_H = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)' \quad (48)$$

Para as *wavelets* Db2 as RIs dos filtros das *wavelets*, denotada por \mathbf{h}_{D2} , e de escalonamento, \mathbf{l}_{D2} são:

$$\mathbf{l}_{D2} = (-0.1294, 0.2241, 0.8365, 0.489)' \quad (49)$$

$$\mathbf{h}_{D2} = (-0.483, 0.8365, -0.2241, -0.1294)' \quad (50)$$

Na Figura 3 são apresentadas curvas de desempenho em função do limiar de *denoising* considerando-se $P = 16$, *wavelet* Db1, $J = 2$ e três valores de SNR.

Por fim, na Figura 4 são apresentadas curvas de desempenho em função do limiar de *denoising* considerando-se $P = 32$, *wavelet* Db1, SNR=4 e $J = 2, 3$ e 5.

A análise global destas figuras revela um bom ajuste entre os resultados obtidos por simulação com os obtidos analiticamente, apesar de se ter utilizado apenas 6 momentos na aproximação da fdp da VA r .

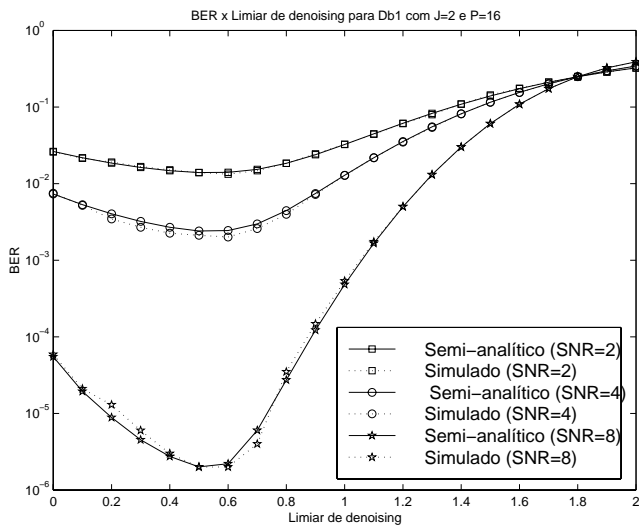


Figura 3: BER x limiar de *denoising* para SNR de 2, 4 e 8 dB considerando Db1, $J = 2$ e $P = 16$.

Além disso, as curvas mostram que a técnica proposta apresenta um bom desempenho quando utilizada com um valor de limiar ajustado, porém mostra-se uma grande variação de desempenho em função do tipo de funções de base utilizadas na decomposição *wavelet* e da quantidade de níveis de decomposição.

Essas dependências são qualitativamente esperadas, tendo em vista que de acordo com as funções de base *wavelets*, com a RI do filtro de transmissão e com a quantidade de níveis de decomposição, varia-se o grau de concentração de energia no domínio *wavelet*. Por outro lado, o grau de concentração de energia do ruído não é afetado por esses fatores.

6. CONCLUSÕES

Este trabalho propôs o uso de técnicas de *denoising* para remover ruído em sistemas de comunicação digitais. O trabalho contempla a avaliação de desempenho através de uma aproximação analítica de sistemas para canais AWGN e modulação BPSK. A abordagem aqui adotada representa um ponto de partida para uma discussão mais abrangente desse tema, principalmente no que tange ao modelo de canal.

Os resultados analíticos, que mostraram um bom desempenho para a técnica proposta, foram corroborados por resultados de simulações obtidas pela técnica de Monte Carlo.

Diante da quantidade de variáveis envolvida na otimização do projeto do esquema de recepção aqui proposto, evidencia-se a importância da análise matemática realizada, visto que, a partir dos resultados obtidos, pode-se caracterizar rapidamente o desempenho do receptor para uma determinada combinação da resposta impulsional do filtro de transmissão, transformada *wavelet*, limiar de *denoising* e níveis de decomposição, o que é praticamente inviável através de simulação de Monte Carlo, principalmente em função das taxas de erros observadas.

Pretende-se continuar este trabalho investigando outros procedimentos de *denoising*, principalmente os que adotam limiares diferentes de acordo com o nível de decomposição da transformada

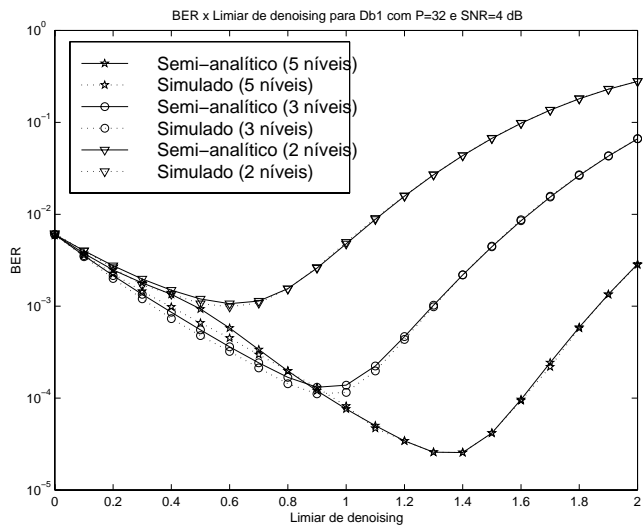


Figura 4: BER x limiar de *denoising* para $J = 2, 3$ e 5 considerando Db1, $P = 32$ e SNR=4 dB.

wavelet. Pretende-se expandir os resultados aqui obtidos para avaliar cenários mais complexos, no que tange principalmente ao modelo do canal adotado. Além disso, a partir da equação de probabilidade de erro aqui obtida, pretende-se realizar busca de funções de base *wavelets* no sentido de minimizar a probabilidade de erro do esquema de recepção.

7. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de expressar os agradecimentos ao CNPq pelo apoio financeiro ao trabalho.

8. REFERÊNCIAS

- [1] J. G. Proakis. “*Digital Communications*”. McGraw-Hill, 1995.
- [2] J. F. Galdino and M. S de Alencar. The denoising technique applied to frequency selective channels. *IEEE ICC 2001*, 2001.
- [3] G. Strang and T. Nguyen. “*Wavelets and Filter Banks*”. Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [4] D. L. Donoho. De-noising by soft-thresholding. *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 41(N0. 3):613–627, May 1995.
- [5] J. F. Galdino. Receptores de alto desempenho para canais com desvanecimento rápido e seletivo. *Relatório técnico, UFPB, Campus II, DEE, LabCom*, 2001.
- [6] I. Daubechies. “*Ten Lectures on Wavelets*”. SIAM, 1992.