

# Detectores Guiados para Sistemas MIMO: Abordagens Esférica, Decomposição QR e *Greedy*

Yuri Mendes Mostagi, Taufik Abrão & Paul Jean E. Jeszensky

**Resumo**—O receptor convencional (filtro casado) torna-se ineficiente em sistemas com múltiplas antenas no transmissor e receptor (MIMO) que demandem alta vazão (throughput) de dados e/ou estejam sujeitos à interferência e/ou estejam operando sob canais correlacionados. A taxa de erro de bit ou a capacidade serão degradados substancialmente quando a diversidade espacial proporcionada pelas múltiplas antenas não puder ser totalmente aproveitada e o processo de detecção for incapaz de separar eficientemente o sinal em cada antena. A solução discutida neste trabalho analisa detectores eficientes para sistemas MIMO. Estes detectores utilizam informações dos sinais interferentes de forma a melhorar a detecção do sinal na antena de interesse, proporcionando assim vantagens sobre o sistema convencional, às custas de um incremento de complexidade. O foco deste trabalho consiste na comparação das características de três detectores sub-ótimos representativos, baseados na função de máxima verossimilhança e no princípio da busca guiada. Especialmente, neste trabalho é explorado o compromisso complexidade  $\times$  desempenho do detector esférico (SD), do detector baseado na decomposição QR (QRD - *QR decomposition*) e o de busca guiada "gulosa" (GSD - *greedy search detector*).

**Palavras-Chave**—Detector multiusuário, sistemas MIMO, detector de máxima verossimilhança, detecção sub-ótima, algoritmos de busca guiada.

**Abstract**—The matched filter in each receive MIMO system antenna becomes inefficient in high data throughput demanding systems. The performance or system capacity under conventional detection will be substantially degraded when the spatial diversity provided by multiple antennas can not be fully exploited and the detection process is unable to efficiently separate the signal from each antenna. The solution discussed in this paper seeks to establish more efficient detectors for MIMO systems. These detectors use information from the interfering signals in a way to improve the signal detection in the antenna of interest, thus providing advantages over the conventional system, at the expense of increasing complexity. The focus of this paper consists in comparing the characteristics of three representative sub-optimal detectors, based on the maximum-likelihood function and the guided search principle. Especially, the complexity  $\times$  performance trade-off for the sphere detector (SD), the QR decomposition-based detector (QRD) and the greedy search detector (GSD) are compared.

**Keywords**—Multiuser coherent detection, MIMO systems, ML estimation; sub-optimum detection, search algorithms

## I. INTRODUÇÃO

Para aumentar o *throughput* e/ou o desempenho BER em sistema MIMO, deve-se combinar à diversidade espacial outros tipos de diversidade, tais como a temporal, a

Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES (bolsa DS), CNPq (Processo: 303426/2009-8) e FAP-Araucária (Convênio nº: 045/2007).

Y. M. Mostagi e T. Abrão, Depto. de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Brasil; yuri.mostagi@gmail.com, taufik@uel.br.

P. J. E. Jeszensky, Depto. de Telecomunicações e Controle, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo; pj@lcs.poli.usp.br.

de frequência, a multiusuário, entre outras, além do aproveitamento das condições instantâneas de canal para alterar dinamicamente a ordem de modulação (modulação adaptativa).

Neste trabalho, explora-se a diversidade espacial combinada à diversidade de recepção multiusuário. Assim, utilizam-se versões sub-ótimas eficientes para o detector de máxima verossimilhança (MLD), os quais utilizam informações de todas as antenas de forma a melhorar a detecção do sinal individual em cada antena e assim combinar de forma eficiente os sinais de cada antena (diversidade espacial), proporcionando vantagens sobre o sistema convencional e MLD.

O detector ótimo, que consiste de um receptor convencional seguido de um detector de sequência de máxima verossimilhança (MLSD), é impraticável devido ao fato de sua complexidade aumentar exponencialmente em relação ao número de antenas (ou usuários). Por isso, novos métodos vêm sendo propostos a fim de contornar estas desvantagens, entre os quais os detectores sub-ótimos multiusuários baseados em estrutura lineares para canais MIMO [1], [2].

O foco de interesse deste trabalho são os detectores sub-ótimos de busca guiada para sistemas MIMO baseados na função de máxima verossimilhança. Entre estes, destacam-se o detector esférico (SD), o detector baseado na decomposição (QRD) e o algoritmo de busca *greedy* (GSD).

O SD-MIMO apresenta, em situações de interesse prático, desempenho equivalente ao do detector MLSD, mas com menor complexidade. No entanto, em situações de baixa relação sinal-ruído (SNR), a complexidade do SD resulta elevada. O princípio de funcionamento do SD foi mostrado em [3]; em [4] foi proposto a utilização do algoritmo SD na detecção em sistemas MIMO. Em [5] e [1] foi analisada a complexidade do SD e formas de reduzi-la sem comprometer substancialmente seu desempenho.

O detector para canais MIMO baseado na decomposição (QRD-M) foi analisado em [6], e modificações foram introduzidas em [7] a fim de se diminuir sua complexidade. Em [8], o detector *greedy* (GSD) foi empregado na detecção multiusuário em sistemas de múltiplo acesso. Em canais MIMO, o GSD foi empregado no problema de detecção sub-ótima em [9] e com saídas *soft* [10].

## II. MODELO DO SISTEMA

O canal MIMO linear é definido por um transmissor genérico que transmite simultaneamente (em um período de símbolo,  $T_s$ )  $m$  símbolos,  $s_1, \dots, s_m$ , de um alfabeto finito ou constelação  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ . No receptor, tem-se  $n$  sinais,  $y_1, \dots, y_n$ , um em cada antena receptora, recebidos como uma combinação linear dos  $m$  símbolos de entrada mais o ruído aditivo. Costuma-se assumir que a quantidade de sinais recebidos nas  $n$  antenas excede a quantidade dos símbolos

transmitidos nas  $m$  antenas, ou seja,  $n \geq m$ . Com isto, garante-se que as equações utilizadas no processo de detecção não serão subdeterminadas [11].

Convenientemente, o canal MIMO linear é descrito na forma matricial como

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{v} \quad (1)$$

sendo  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{n \times m}$  a matriz do canal e  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  o ruído aditivo. Os vetores  $\mathbf{s} \in \mathcal{D}^m$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$  representam os símbolos transmitidos e os sinais recebidos, respectivamente [2]. A eq. (1) pode ser expandida para melhor compreensão do sistema:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \dots & h_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n,1} & \dots & h_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Se  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{v}$  são matrizes e vetores de valores complexos, então podem ser convenientemente re-escritos como:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{H}\} & -\Im\{\mathbf{H}\} \\ \Im\{\mathbf{H}\} & \Re\{\mathbf{H}\} \end{bmatrix} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{s}\} \\ \Im\{\mathbf{s}\} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{y}\} \\ \Im\{\mathbf{y}\} \end{bmatrix} \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{v}\} \\ \Im\{\mathbf{v}\} \end{bmatrix}$$

sendo  $\Re\{\cdot\}$  e  $\Im\{\cdot\}$  os operadores partes real e imaginária, respectivamente [12].

Como o foco é a detecção, a matriz  $\mathbf{H}$  será considerada perfeitamente conhecida no receptor cujos valores complexos são descritos por uma distribuição Rayleigh para o módulo e uniforme para a fase. Os símbolos transmitidos são modelados como variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (*i.i.d*) sobre o alfabeto da constelação  $\mathcal{D}$ . O ruído é modelado por uma distribuição Gaussiana complexa circularmente simétrica, de média zero e variância  $\sigma^2$ . O objetivo do receptor é estimar  $\mathbf{s}$  a partir de  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{H}$ .

### III. DETECTOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

O detector de máxima verossimilhança (*Maximum Likelihood Detector*- MLD) ou detector ótimo operacionaliza, a partir de (1), o teste de todas as possibilidades de símbolos transmitidos em cada antena, ou seja, aplica todos os possíveis valores de  $\mathbf{s}$  à uma função de minimização, estimando assim o símbolo transmitido, sendo o escolhido aquele que apresentar a menor distância Euclidiana em relação ao sinal recebido. Esta função de minimização é expressa a seguir

$$\hat{\mathbf{s}} = \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{D}^m} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 \quad (2)$$

porém, resulta em complexidade exponencial em relação ao número de antenas e ao tamanho da constelação. Se o tamanho da constelação em cada componente de  $\mathbf{s}$  é  $C$  (por exemplo, na modulação BPSK,  $C = 2$ ) e existem  $m$  antenas transmissoras, o detector deve fazer uma busca sobre um conjunto de tamanho  $C^m$ . Em modulações de alta ordem essa complexidade se torna proibitiva mesmo para um número mediano de antenas transmissoras [13].

### IV. DETECTORES SUB-ÓTIMOS DE BUSCA GUIADA

#### A. Detector MIMO sub-ótimo por Decomposição QR

Partindo da eq. (2), aplica-se a decomposição QR [14] [15] à matriz do canal  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (3)$$

sendo  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  uma matriz ortogonal,  $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  uma matriz triangular superior, e  $\mathbf{0}_{(n-m) \times m}$  uma matriz de zeros.

A decomposição QR de  $\mathbf{H}$  é uma redução ortogonal para uma forma triangular superior. Da relação  $\mathbf{H} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$  e da não singularidade de  $\mathbf{R}$ , conclui-se que as colunas de  $\mathbf{Q}$  formam uma base ortonormal para  $\mathcal{R}(\mathbf{H})$ , sendo  $\mathcal{R}(\cdot)$  o operador espaço vetorial de uma matriz. Assim, a matriz  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$  é a projeção ortogonal em  $\mathcal{R}(\mathbf{H})$ .

Note que  $\mathbf{Q}^H\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , sendo  $\{\cdot\}^H$  o operador conjugado transposto e  $\mathbf{I}$  a matriz identidade. Assim, pré-multiplicando  $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2$  em (2) por  $\mathbf{Q}^H$  resulta em uma estrutura em forma de árvore de profundidade  $m$  devido a propriedade triangular da matriz  $\mathbf{R}$ .

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{Q}^H\mathbf{y} - \mathbf{R}\mathbf{s}\|^2 \quad (4)$$

Para simplificar, seja  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}^H\mathbf{y}$ . Assim, a nova função de minimização torna-se:

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}} = \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{D}^m} \|\mathbf{x} - \mathbf{R}\mathbf{s}\|^2 \quad (5)$$

Após a aplicação da decomposição QR e da pré-multiplicação por  $\mathbf{Q}^H$ , o algoritmo  $M$  é aplicado para detectar os símbolos de maneira sequencial [6].

1) *Algoritmo M*: A partir do último elemento de  $\mathbf{s}$ ,  $s_m$ , são calculadas as métricas para todos os possíveis valores de  $s_m \in \mathcal{D}^m$  usando

$$|x_m - r_{m,m}\hat{s}_m|^2, \quad (6)$$

sendo  $r_{m,m}$  o elemento  $(m, m)$  de  $\mathbf{R}$ . Em seguida, as métricas destes nós são ordenadas e somente os  $M$  nós com as menores métricas são mantidos, o restante é descartado. Os nós sobreviventes são, então, estendidos em mais  $C$  nós cada um, resultando em  $MC$  ramos, destes, somente os  $M$  ramos com menor métrica são mantidos e expandidos novamente em mais  $C$  ramos cada, e assim sucessivamente, até que a última camada ( $m$ ) seja atingida. A Fig. 1 exemplifica o processo para um sistema com  $m = n = 3$ ,  $M = 2$  ramos e modulação quaternária, ou seja,  $C = 4$ .

As métricas dos ramos são calculadas utilizando a função de minimização modificada (5). Para um comprimento da árvore  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , a métrica para cada ramo é:

$$|x_{m-i+1} - \mathbf{R}_{m-i+1}\bar{\mathbf{s}}_i|^2, \quad (7)$$

sendo  $x_i$  o  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{R}_i$  a  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{R}$  e  $\bar{\mathbf{s}}_i$  o vetor com os nós apropriados do ramo em particular.

#### B. Detector MIMO Sub-ótimo Esférico

O detector esférico (SD), realiza uma busca sobre os pontos  $\mathbf{s} \in \mathcal{D}^m$  da malha que se encontram dentro de uma hipersfera de raio  $d$ , centrada no vetor recebido  $\mathbf{y}$  [5]. Reduz-se assim

o espaço de busca e conseqüentemente a complexidade computacional final. O SD determina quais pontos da constelação estão dentro da esfera de busca; no entanto, se para isso o detector tivesse que testar a distância de todos os pontos  $s$  para determinar quais estão dentro da esfera de raio  $d$ , então ainda haveria uma busca exaustiva.

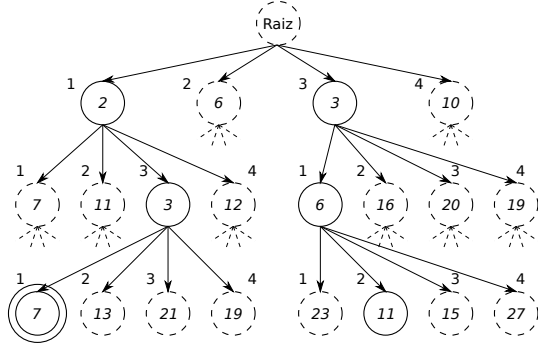


Fig. 1. Exemplo algoritmo  $M$ , com  $m = n = 3$ ,  $M = 2$  e  $C = 4$ . Números fora dos círculos indicam símbolos da constelação (nós), aqueles dentro dos círculos referem-se às métricas acumuladas até o respectivo nó. Os círculos sólidos indicam os  $M$  nós escolhidos pelo algoritmo em cada nível, enquanto os tracejados representam os nós excluídos da busca. As linhas tracejadas indicam os ramos não expandidos. O círculo duplo indica a solução obtida.

Embora seja difícil determinar os pontos da treliça dentro de uma esfera  $m$ -dimensional, é trivial fazê-lo no caso unidimensional  $m = 1$ . Assim, pode-se ir da dimensão  $k$  para a dimensão  $k + 1$ . Isso significa que todos os pontos na esfera de dimensão  $m$  e raio  $d$  podem ser determinados iterativamente ao se determinar todos os pontos contidos em esferas de dimensões menores  $(1, 2, \dots, m)$  e com o mesmo raio  $d$ . Conseqüentemente, o método de busca SD pode ser representado por uma árvore, como no caso do QRD-M, sendo que os ramos do  $k$ -ésimo nível da árvore corresponde aos pontos da treliça que se encontram dentro da esfera de raio  $d$  e dimensão  $k$  [16]. Um esboço de funcionamento da busca no SD para um sistema com  $m = n = 3$ , raio de busca  $d = 6$  e modulação binária pode ser visto na Fig. 2.

Formalizando o problema teremos que o ponto  $\mathbf{H}s$  estará dentro da esfera de raio  $d$  se, e somente se

$$d^2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}\|^2 \quad (8)$$

Deve-se então quebrar o problema principal em sub-problemas, ou seja, ao invés de tentar determinar os pontos da constelação que se encontram dentro da esfera de busca multidimensional, determinar os pontos dentro de múltiplas esferas unidimensionais, para isso aplica-se a decomposição QR à  $\mathbf{H}$  em (8) e faz-se a pré-multiplicação por  $\mathbf{Q}^H$  como em (5), obtendo-se a equação

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{R}\hat{\mathbf{s}}\|^2 \leq d^2 \quad (9)$$

assim, o núcleo do SD consiste de um método de enumeração, proposto em [3], que enumera os possíveis símbolos dentro do raio da esfera. Este método de enumeração é baseado na observação condicional:

$$\begin{aligned} \text{Se: } \quad & \mathbf{p} \triangleq \mathbf{x} - \mathbf{R}\hat{\mathbf{s}}, \\ \text{Então: } \quad & \|\mathbf{p}_{l_k}\|^2 > d^2 \Rightarrow \|\mathbf{p}\|^2 > d^2 \end{aligned} \quad (10)$$

sendo  $\mathbf{p}_{l_k} \in \mathbb{C}^k$  o vetor composto pelos últimos  $k$  componentes de  $\mathbf{p}$ . Assim, a cada nova iteração o algoritmo executa uma busca de profundidade  $k$  na árvore de busca de  $m$  níveis: para  $k = 1$ ,  $\mathbf{p}_{l_k}$  será composto pela componente  $m$  de  $\mathbf{p}$ ; para  $k = 2$ ,  $\mathbf{p}_{l_k}$  será composto pelas componentes  $m$  e  $m - 1$  de  $\mathbf{p}$ , e assim por diante. Ainda, graças à estrutura triangular superior de  $\mathbf{R}$ , o vetor  $\|\mathbf{p}_{l_k}\|$  dependerá apenas de  $\hat{s}_{l_k}$ , onde  $\hat{s}_{l_k} \in \mathcal{D}^k$  é o vetor composto pelos últimos  $k$  componentes de  $\hat{\mathbf{s}}$ . Portanto, estabelecendo-se que para algum vetor  $\hat{\mathbf{s}} \in \mathcal{D}^m$  de índice  $k$ ,  $\|\mathbf{p}_{l_k}\|^2 > d^2$ , qualquer outro vetor  $\tilde{\mathbf{s}} \in \mathcal{D}^m$  para o qual  $\tilde{s}_{l_k} = \hat{s}_{l_k}$  poderá ser excluído da busca. O SD utiliza esta observação para enumerar de maneira eficiente todos os pontos na hipersfera dada pela equação (9). Após esta enumeração o vetor de possíveis símbolos é salvo, e aqueles que apresentarem o menor valor de acordo com o critério da equação do MLD modificada (5) será o escolhido como símbolo de saída do algoritmo.

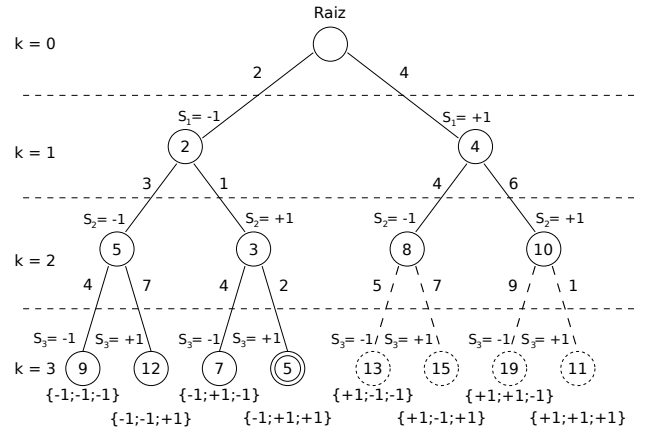


Fig. 2. Árvore de busca do SD com  $d = 6$ . Os números ao lado de cada ramo indica seu comprimento; inscritos nos nós indicam métricas acumuladas; círculo duplo indica a solução ótima; ramos não visitados são pontilhados.

1) *O Raio da Esfera:* Para alcançar a maior eficiência possível com o SD, um parâmetro crítico deve ser ajustado, o raio da esfera de busca ( $d$ ), ou o raio inicial no caso de uma versão iterativa do algoritmo com raio de busca atualizável a cada iteração.

Definir  $d$  de maneira cuidadosa é essencial, pois, caso este seja muito grande a busca ainda terá complexidade exponencial com o número de usuários, não apresentando vantagem sobre o detector ML. Por outro lado, caso o raio seja muito pequeno o algoritmo terá grande chance de não encontrar nenhum ponto dentro da esfera.

A definição mais simplista para  $d$  consiste em defini-lo como a metade da distância entre dois símbolos da constelação, ou seja, a distância entre um símbolo da constelação e o limite da região de decisão. Obviamente este método é mais adequado para constelações quadradas. Este método é discutido em [12]. Já em [1] é proposto que  $d$  seja definido pela distância entre a estimativa de Babai e o vetor recebido  $\mathbf{x}$ , ou seja,  $d = \|\mathbf{x} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}_B\|$ , sendo  $\hat{\mathbf{s}}_B = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{x}$ , com  $\{\cdot\}^\dagger$  a pseudo-inversa de uma matriz.

### C. Detector MIMO Sub-ótimo Greedy

Como ocorre aos outros dois algoritmos aqui apresentados, o detector de busca gulosa (*Greedy Search Detector - GSD*) inicia o processo de detecção realizando a decomposição

QR da matriz de canal ( $\mathbf{H}$ ), operando igualmente sobre a mesma função de otimização, eq. (5). O GSD utiliza-se da característica triangular superior da matriz  $\mathbf{R}$  para calcular a distância Euclidiana passo-a-passo, da antena  $m$  até a antena  $um$ , Fig.3.

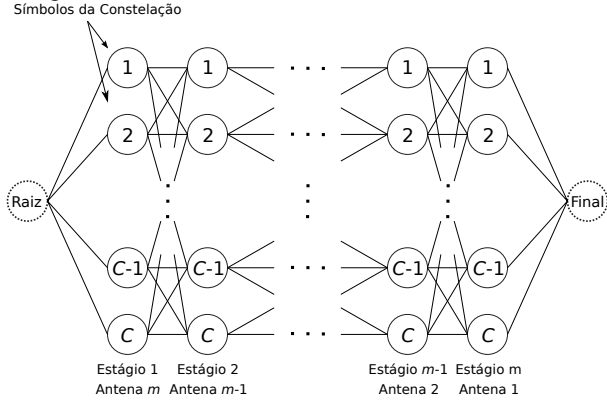


Fig. 3. Gráfico de fluxo do GSD para um sistema genérico de  $m$  antenas transmissoras e modulação com  $C$  símbolos.

Na Fig.3, os nós representam os símbolos da modulação utilizada. O método GSD é organizado em  $m$  estágios, cada estágio representa uma antena; em cada estágio existem  $C$  nós; cada nó está conectado a  $C$  nós do estágio anterior e a  $C$  nós do estágio posterior, com exceção do estágio 1, pois não possui um estágio anterior e assim é conectado ao nó raiz, bem como o estágio  $m$ , o qual não possui um estágio posterior e por isso é conectado ao nó final. Entre os nós tem-se a distância Euclidiana parcial, ou seja, a métrica dos nós anteriores somados à métrica do nó atual, até que ao final do estágio  $m$  tem-se a métrica total dos vetores candidatos.

Tendo como referência a eq.(5), a distância Euclidiana do vetor recebido ao vetor candidato, por exemplo, em um sistema com  $m = n = 3$ , é dada por:

$$\Delta = \left\| \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{22} & R_{23} \\ 0 & 0 & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (11)$$

Para este caso ainda, as métricas parciais serão dadas por:

$$\begin{aligned} \delta_3 &= \|x_3 - R_{33}s_3\|^2, \\ \delta_2 &= \|x_2 - (R_{22}s_2 + R_{23}s_3)\|^2, \\ \delta_1 &= \|x_1 - (R_{11}s_1 + R_{12}s_2 + R_{13}s_3)\|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Duas etapas distintas são executadas no processo de detecção GSD: a) etapa de redução de nós e, em seguida, b) etapa de extensão de ramos [10]. Na primeira é feita uma redução da quantidade de nós através de uma busca em árvore análoga à realizada pelos algoritmos QRD e SD anteriormente apresentados. Esta busca reduz a quantidade de vetores candidatos. A etapa seguinte consiste na extensão dos ramos, i.e., do último estágio até o primeiro, o algoritmo realiza trocas do símbolo do estágio em questão pelos outros possíveis símbolos, sendo assim capaz de formar uma lista de vetores da qual selecionará aquele que melhor satisfaça (5).

#### V. ANÁLISE DE DESEMPENHO E COMPLEXIDADE

Considerando agora um sistema MIMO com  $m = n = 4$ , modulação QPSK (*Quadrature Phase-Shift Keying*) e sujeito a desvanecimento Rayleigh plano, diversas simulações

simulações Monte-Carlo foram realizadas tendo em vista comparar o desempenho e a complexidade dos três algoritmos.

Na Fig. 4 são apresentadas as curvas de taxa de erro de bit (BER) em relação ao incremento da SNR. É evidente que o QRD-M com o  $M = 4$  e o GSD alcançam desempenho muito próximo ao ML com suas curvas ficando sobrepostas às curvas do SD e do MLD. O raio inicial do SD foi definido como  $d = \infty$ , pois, o algoritmo é iterativo e atualiza o raio cada vez que encontra um nó final cuja métrica acumulada seja menor do que o raio,  $d$ .

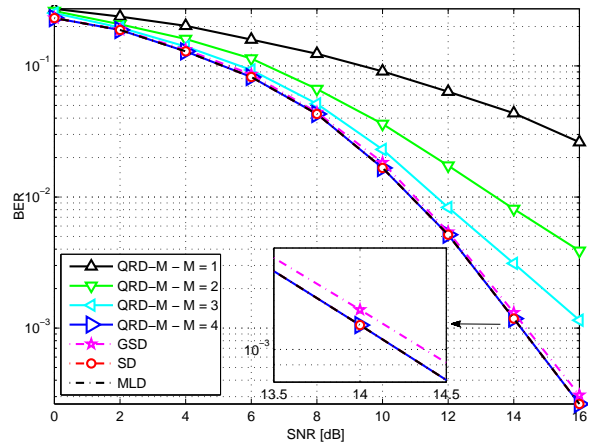


Fig. 4. BER para os detectores QRD-M, GSD, SD e MLD em sistema com  $m = n = 4$  e modulação QPSK.

A complexidade dos algoritmos foi analisada em termos de operações reais necessárias. Os três algoritmos aqui discutidos fazem uso da decomposição QR como parte de seus respectivos processos de busca pelo melhor vetor candidato. Fica evidente através dos resultados apresentados na Tab.I que a complexidade da decomposição QR, da ordem  $\mathcal{O}(m^3)$ , é dominante na determinação da complexidade das funções de busca centrais dos algoritmos QRD-M e GSD, as quais apresentam complexidade da ordem de  $\mathcal{O}(m^2)$  e  $\mathcal{O}(m^2C^2)$ , respectivamente. Além disto, o SD em seu melhor caso (menor complexidade), apresenta complexidade da ordem de  $\mathcal{O}(m^2)$ .

Uma vez que a decomposição QR é uma etapa comum aos três detectores, a complexidade desta etapa comum é destacada na 1a. linha da Tab. I. Para as demais etapas, o QRD-M apresenta complexidade fixa em relação à SNR, dependendo apenas do tamanho de  $M$ , quantidade de antenas transmissoras,  $m$ , e ordem da modulação,  $C$ . Obviamente quanto maior o  $M$ , mais ramos serão expandidos, maior a complexidade e melhor é a qualidade da solução encontrada pelo algoritmo. Por sua vez, o GSD também apresenta complexidade fixa em relação à SNR, sendo dependente apenas da quantidade de antenas transmissoras e da ordem da modulação.

A complexidade do SD é variável, estocástica e dependente das condições do canal e do nível de ruído [5], além da quantidade de antenas e da ordem de modulação. Dependendo da combinação destes fatores, a complexidade do SD pode ir de polinomial quadrática (melhor caso) a exponencial [17]. Por isso, é bastante complexo a obtenção de uma expressão fechada para descrever a complexidade do SD. A expressão obtida aqui é uma aproximação simplificadora, porém suficiente para a análise proposta neste trabalho. Assim, na Tab. I, além dos parâmetros  $m$  e  $C$ , na análise de complexidade

do SD considerou-se o parâmetro  $\gamma$ , o qual representa a dependência da complexidade SD com as condições do canal (ou nível de ruído), sendo portanto  $\gamma \propto \text{SNR}^{-1}$ .

TABELA I

OPERAÇÕES REAIS: ETAPA DE DECOMPOSIÇÃO QR (COMUM) E COMPLEXIDADE DAS DE MAIS ETAPAS DOS TRÊS DETECTORES MIMO.

|       |   |
|-------|---|
| QR    | $\frac{2}{3}m^3 + m^2 + \frac{1}{3}m - 2$ |
| QRD-M | $(m^2 + 7m)M + 6C$                        |
| GSD   | $(m^2 + 7m)C^2 + (m^2 + 5m + 6)C$         |
| SD    | $(m^2 + 5m)C\gamma^m$                     |

Complementarmente, os tempos computacionais para as implementações em MatLab dos três detectores foram obtidos e então convertidos em números de operações reais, dividindo-se tais tempos pelo tempo médio necessário à realização de uma operação soma real. Os resultados comparados, em termos de número equivalente de operações reais, em função da SNR, são mostrados na Fig.5.

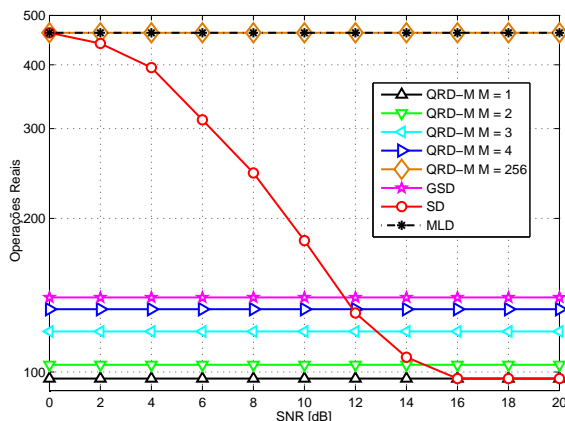


Fig. 5. Complexidade a partir do tempo computacional equivalente, em relação à SNR. Sistema com  $m = n = 4$  e modulação QPSK.

A partir da Fig.5 pode-se observar que a quantidade de operações reais realizadas pelo SD equipara-se a do MLD em baixa SNR e diminui à medida que as condições do canal melhoram, ou seja, a complexidade diminui quando a SNR aumenta, tornando-se, a partir de 12dB, menos complexo do que o QRD-M com  $M = 4$ , equiparando-se a partir de 16 dB, em termos de complexidade, ao QRD-M com  $M = 1$  cujo desempenho é muito inferior ao do SD nesta condição. No outro extremo, quando  $M = 256$ , o detector QRD-M, para o sistema utilizado aqui, expande todos os vetores possíveis e executa assim uma busca exaustiva igual ao do MLD, atingido portanto a mesma complexidade do MLD.

Os dados obtidos, tanto em relação ao desempenho quanto em relação à complexidade, nos permite concluir que dentre os algoritmos analisados, o QRD-M apresenta a melhor solução de compromisso desempenho-complexidade. Por outro lado, o GSD, apesar de apresentar complexidade maior, também tem performance próxima ao ML sem o inconveniente de ter que definir um valor adequado para  $M$ . Em baixa SNR, ambos detectores apresentam um melhor solução de compromisso que o SD, o qual é indicado para operar em sistemas MIMO com níveis mais altos de SNR.

## VI. CONCLUSÃO

Com o intuito de encontrar alternativas para a complexidade exponencial inerente ao detector MLD, três detectores sub-

ótimos adequados para sistemas MIMO foram analisados. Os algoritmos QRD-M, GSD e SD para detecção em canais MIMO foram comparados em termos de desempenho  $\text{BER} \times \text{SNR}$ , bem como em termos de complexidade computacional, caracterizada pelo número de operações reais necessárias. O melhor compromisso desempenho-complexidade foi obtido com o QRD-M, o qual foi capaz de prover desempenho próximo ao MLD, porém com complexidade polinomial, da ordem de  $\mathcal{O}(m^2)$ , para todas regiões de SNR de operação do sistema. O GSD apresentou complexidade maior do que a do QRD-M e mesmo desempenho, porém sem o inconveniente de se ter que determinar um valor para  $M$ . Já o detector SD apresentou mesmo desempenho do ML, porém com complexidade computacional variável, a qual sob certas condições de operação do sistema e de canal pode se tornar exponencial. No entanto, o SD representa uma alternativa atraente na região de alta SNR.

## REFERÊNCIAS

- [1] H. Vikalo and B. Hassibi, "On the sphere decoding algorithm i. expected complexity," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, pp. 2806–2818, 2005.
- [2] E. G. Larsson, "Mimo detection methods: How they work," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 3, pp. 91–95, 2009.
- [3] U. Fincke and M. Pohst, "Improved methods for calculating vectors of short length in a lattice, including a complexity analysis," *Mathematics of Computation*, vol. 44, pp. 463–471, 1985.
- [4] H. Vikalo and B. Hassibi, "Maximum-likelihood sequence detection of multiple antenna systems over dispersive channels via sphere decoding," *EURASIP - Journal on Applied Signal Processing*, vol. 5, pp. 525–531, 2002.
- [5] L. G. Barbero, "Fixing the complexity of the sphere decoder for mimo detection," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 7, pp. 2131–2142, 2008.
- [6] W. Chin, "Qrd based tree search data detection for mimo communication systems," in *Vehicular Technology Conference, IEEE*, vol. 3, 2005, pp. 1624–1627 Vol. 3.
- [7] H. Jian, Y. Yi, and Y. Shi, "A simplified soft-output qrd-m mimo detector," in *Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, 5th International Conference on*, 2009, pp. 1–4.
- [8] A. AlRustamani and B. Vojcic, "Greedy multiuser detection over single-path fading channel," in *Spread Spectrum Techniques and Applications, IEEE Sixth International Symposium on*, vol. 2, 2000, pp. 708–712 vol.2.
- [9] Y. Wu and S.-Y. Kung, "Signal detection for mimo-isi channels: An iterative greedy improvement approach," *Signal Processing, IEEE Transactions on DOI - 10.1109/TSP.2003.822288*, vol. 52, no. 3, pp. 703–720, 2004.
- [10] Y. Sun and J. R. Cavallaro, "High throughput vlsi architecture for soft-output mimo detection based on a greedy graph algorithm," *ACM Great Lakes Symposium on VLSI*, vol. -, pp. 445–450, 2009.
- [11] J. Jaldén, "Maximum likelihood detection for the linear mimo channel," Ph.D. dissertation, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm Sweden, 2004.
- [12] C.-Y. Hung and T.-H. Sang, "A sphere decoding algorithm for mimo channels," in *IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology*, 2006.
- [13] S. Chen, "The sphere decoder algorithm applied to space-time block codes," Master's thesis, Royal Institute of Technology, 2004.
- [14] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [15] G. W. Stewart, *Matrix Algorithms - Volume 1: Basic Decompositions*. SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [16] T. Kailath, H. Vikalo, and B. Hassibi, "Mimo receive algorithms," in *Space-Time Wireless Systems: From Array Processing to MIMO Communications*. Cambridge University Press, 2005.
- [17] J. Jaldén and B. Ottersten, "On the complexity of sphere decoding in digital communications," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, pp. 1474 – 1484, 2005.