

# Método de Propagação de Feixe de Ângulo Largo para Análise de Guias de Onda com Materiais Magnetoópticos Usando Diferenças Finitas

Evandro A. C. Gonçalves, Reinaldo S. Flamino, Ben-Hur V. Borges e Amílcar C. César

**Resumo**—Uma nova formulação numérica para simulação computacional da propagação de onda eletromagnética em guias ópticos com materiais magnetoópticos é descrita neste artigo. A formulação é baseada no método de propagação de feixe de ângulo largo (WA-BPM) usando diferenças finitas (FD) e o esquema Crank-Nicholson (CN) para a discretização da equação de onda, expandida por meio dos aproximantes de Padé. Um acoplador direcional não-recíproco para aplicações em sistemas de comunicações ópticas é investigado neste trabalho.

**Palavras-chave**—comunicações ópticas, dispositivos não-recíprocos, acoplador direcional, método da propagação do feixe, diferenças finitas, propagação não-paraxial, aproximantes de Padé.

## 1. INTRODUÇÃO

PARA a implementação de redes ópticas de comunicação que permitam taxas de transmissão de sinais cada vez mais altas, um diversificado conjunto de dispositivos ativos e passivos tem sido objeto de pesquisas em todo o mundo. São lasers, fotodetectores, amplificadores ópticos, chaves, moduladores, filtros, e tantos outros. Dentre estes, os que empregam materiais magnetoópticos formam uma importante categoria de dispositivos, na qual os mais utilizados são os isoladores [1]–[5] e os circuladores [5], [6]. Os isoladores são utilizados para impedir que a luz refletida em algum trecho do sistema retorne para a fonte óptica. Eles estão presentes nos sistemas que empregam amplificação óptica. Os circuladores fazem parte dos esquemas de extração e inserção de sinais em sistemas que utilizam multiplexação por divisão em comprimento de onda (WDM—*wavelength division multiplexing*). A operação dos dispositivos não-recíprocos é baseada na diferença entre as constantes de propagação do modo magnético transversal (TM) para as duas direções de

propagação [3], [5]–[7], o acoplamento não-recíproco entre os modos elétrico transversal (TE) e TM [4], [7], ou as propriedades de modos vazados (*leaky*) [1], [2]. Os dispositivos ópticos não-recíprocos exploram as características dos materiais magnetoópticos, baseados em compostos do tipo *ytrium iron garnet-gadolinium gallium garnet* (YIG-GGG) [1], [7].

O funcionamento de guias de onda com ou sem material magnetoóptico pode ser mais bem compreendido por meio da simulação computacional da propagação de luz. Atualmente, esta simulação tem sido implementada por meio de duas importantes formulações do BPM: uma delas é baseada em elementos finitos (FE-BPM) [8], [9] e a outra em diferenças finitas (FD-BPM) [10]–[18]. Qualquer uma destas formulações pode ser empregada para analisar tanto estruturas planares quanto tridimensionais.

Guias de onda com materiais magnetoópticos têm sido analisados no limite paraxial [5], [9], [10], [13], ou seja, a equação de Helmholtz é resolvida por meio de uma solução segundo a qual a propagação é considerada como sendo praticamente paralela ao eixo longitudinal do guia. Esta suposição limita o grau de liberdade no desenvolvimento de certos dispositivos em óptica integrada, principalmente quando se trata de estruturas com guias inclinados, como os do tipo Mach-Zehnder e junções Y. A solução paraxial restringe ainda a utilização de materiais cuja diferença entre os índices de refração das regiões da casca e núcleo seja muito grande (limite de guiamento fraco). O emprego de guias com maiores ângulos de inclinação possibilita a implementação de dispositivos mais curtos na direção longitudinal. Diversas técnicas foram propostas para a superação destas limitações, dentre elas o método baseado na expansão da equação de onda utilizando polinômios aproximantes de Padé, conforme foi sugerido por Hadley [18]. Estes polinômios têm sido utilizados em vários fenômenos físicos, incluindo o de guiamento de onda [16].

A técnica escolhida neste trabalho para analisar guias com materiais magnetoópticos emprega o método da propagação de feixe de ângulo largo em conjunto com a simplicidade de solução da equação de onda por meio do método das diferenças finitas e do esquema de CN. A condição de fronteira transparente (TBC) [19], [20] é empregada para

Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES (bolsa de estudos de mestrado), CNPq (proc. 300834/97-7), FAPESP (proc. 97/12996-9) e PRONEX (proc. 41/96.0921/00).

Evandro A. C. Gonçalves, [assis@sel.eesc.sc.usp.br](mailto:assis@sel.eesc.sc.usp.br), Tel. 162739366, ramal 225, Fax 162739372; Reinaldo S. Flamino, [flamino@sel.eesc.sc.usp.br](mailto:flamino@sel.eesc.sc.usp.br), Tel. 162739366, ramal 225; Ben-Hur V. Borges, [benhur@sel.eesc.sc.usp.br](mailto:benhur@sel.eesc.sc.usp.br), Tel. 162739344; Amílcar C. César, [amilcar@sel.eesc.sc.usp.br](mailto:amilcar@sel.eesc.sc.usp.br), Tel. 162739356.

Evandro A. C. Gonçalves e Reinaldo S. Flamino são alunos do programa de mestrado; Ben-Hur V. Borges e Amílcar C. César são docentes do Departamento de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.

evitar reflexões indesejadas para dentro da janela computacional. A técnica FD é simples de ser formulada, bastante eficiente e as simulações geralmente não consomem tempo excessivo dos computadores. Uma estrutura óptica planar que explora o efeito não-recíproco da propagação da luz com base na diferença de fase dos modos TM é investigada neste trabalho e resultados numéricos são apresentados e discutidos. Até então, esta formulação não havia sido empregada para simular o comportamento de guias com materiais magnetoópticos.

Este artigo está organizado da seguinte maneira. A teoria da propagação de luz em estruturas baseadas em materiais magnetoópticos é apresentada na Seção II, bem como o método numérico FD-BPM de ângulo largo. Por meio deste método, o funcionamento de um acoplador não-recíproco inclinado é simulado e discutido na Seção III. Na Seção IV são reunidas as principais conclusões.

## II. TEORIA

Nesta seção são apresentados os materiais magnetoópticos, a natureza do efeito não-recíproco, a propagação da luz em guias com materiais magnetoópticos, o algoritmo de simulação numérica FD-BPM de ângulo largo e a estrutura analisada.

### A. Materiais magnetoópticos

Dispositivos ópticos não-recíprocos empregam compostos do tipo YIG-GGG como materiais magnetoópticos. Estes são os compostos mais amplamente utilizados em estruturas que apresentam rotação de Faraday [6]. Compostos derivados são obtidos com a adição de outros elementos, como o Lantânio e o Gálio (LaGa:YIG). O Bismuto (Bi:YIG) também é utilizado nos compostos com o intuito de ampliar o efeito magnetoóptico [7].

### B. Natureza do efeito não-recíproco

Dispositivos não-recíprocos têm sua operação baseada no efeito Faraday, segundo o qual o estado da polarização de uma onda eletromagnética linearmente polarizada é girado para um único lado (horário ou anti-horário), independentemente do sentido de propagação. Uma das formas de realizar esta rotação de Faraday explora o processo de acoplamento entre modos TE e TM [1]. No caso de conversão entre os modos TE e TM, algumas dificuldades são encontradas (casamento de fase), sendo necessário o uso de materiais anisotrópicos, como LiNbO<sub>3</sub> ou LiIO<sub>3</sub>. Estes materiais não podem ser crescidos sobre materiais magnéticos por causa de características de casamento da rede cristalina [7].

Outra maneira de implementar estas estruturas é explorar a não-reciprocidade da diferença de fase dos modos TM [3], [5]–[7]. O campo magnético de polarização é aplicado na direção perpendicular a de propagação da luz. Neste esquema, não há acoplamento entre os modos TE e TM. Para os modos TE os materiais comportam-se como dielétricos, havendo efeito de não-reciprocidade somente no caso de modos TM.

Modos vazados (*leaky*) também podem ser utilizados para obter efeito não-recíproco [1], [2]. É o caso da estrutura

multicamadas recentemente proposta por Priye *et al* [1]. Cada um dos esquemas apresenta vantagens e desvantagens em termos de desempenho e tamanho das estruturas.

### C. Propagação de luz em guias com materiais magnetoópticos

Os materiais magnetoópticos são caracterizados na faixa óptica pelo tensor permissividade relativa, dado pela seguinte expressão [5], [13]:

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & j\delta \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ -j\delta & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}, \quad (1)$$

onde  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$  são as permissividades relativas nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. O efeito magnetoóptico de primeira ordem responsável pela natureza não-recíproca da propagação é representado por  $\delta$ .

A propagação de luz é considerada na direção  $z$  e o campo magnético estático de polarização está aplicado na direção  $y$ . Supondo que não há variação de campo eletromagnético nesta direção, então  $\partial/\partial y \equiv 0$ . Desta forma, somente guia óptico planar é considerado neste trabalho.

Supondo uma variação harmônica no tempo de acordo com  $\exp(j\omega t)$ , onde  $\omega$  representa a frequência angular e  $t$  o tempo, as equações de Maxwell podem ser escritas sob a seguinte forma:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon_0 [\epsilon_r] \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad (3)$$

onde  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  representam a permissividade e permeabilidade do vácuo, respectivamente. A substituição de (1) nas equações rotacionais de Maxwell (2) e (3) resulta na seguinte equação de onda para os modos TM:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sigma} \left( \epsilon_x \frac{\partial H_y}{\partial x} - j\delta \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\sigma} \left( \epsilon_z \frac{\partial H_y}{\partial z} + j\delta \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \right] + k_0^2 H_y = 0, \quad (4)$$

onde  $H_y$  é a componente de campo magnético na direção  $y$ ,  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2\pi/\lambda_0$ ,  $\lambda_0$  é o comprimento de onda no vácuo e  $\sigma = \epsilon_x \epsilon_z - \delta^2$ . Uma maneira de resolver (4) é utilizar a aproximação de variação lenta de envoltória [9], segundo a qual  $H_y$  é uma solução do tipo:

$$H_y(x, z) = \varphi(x, z) \exp(-j s k_0 n_0 z), \quad (5)$$

Onde  $s = +1$  para direção  $+z$  e  $s = -1$  para direção  $-z$ . A função  $\varphi(x, z)$  representa a amplitude de campo em uma dada coordenada  $(x, z)$  e  $n_0$  é o índice de refração de referência, geralmente tomado como o índice efetivo do modo guiado. Substituindo (5) em (4) resulta em:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2jk \frac{\partial \varphi}{\partial z} + P\varphi = 0, \quad (6)$$

onde o operador diferencial transversal  $P$  é dado por:

$$P = \tau \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} + k\chi \frac{\partial}{\partial x} - k\tau \frac{\partial}{\partial x} \xi + k_0^2 (\tau - n_0^2), \quad (7)$$

$$\tau = \frac{\sigma}{\varepsilon_z}; \rho = \frac{\sigma}{\varepsilon_x}; \chi = \frac{\delta}{\varepsilon_z}; \xi = \frac{\delta}{\sigma}; k = s\kappa_0 n_0.$$

Com o objetivo de simplificar a formulação em diferenças finitas, os termos  $\delta\partial/\partial z$ ,  $\partial\tau/\partial z$  e  $\partial\xi/\partial z$  foram desprezados. No caso em que a aproximação paraxial é adotada, o termo  $\partial^2/\partial z^2$  também é desprezado, não acontecendo o mesmo nesta formulação. A equação (6) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + j(\sqrt{P+k^2} - k) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial z} - j(\sqrt{P+k^2} - k) \right] \varphi = 0. \quad (8)$$

Deste modo, (6) pode ser reescrita na seguinte forma unidirecional [15], [16]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -j(\sqrt{P+k^2} - k) \varphi = -j \left[ \frac{N_m(P)}{D_n(P)} \right] \varphi. \quad (9)$$

A equação de onda (9) é equivalente a (6) sem aproximações. Existem diferentes aproximações para o termo  $\sqrt{P+k^2}$  e umas das aproximações mais empregadas são os polinômios de Padé [16], [18]. O termo  $(\sqrt{P+k^2} - k)$  de (9) pode ser expresso da seguinte maneira [15]–[18]:

$$\sqrt{P+k^2} - k \cong \frac{N_m(P)}{D_n(P)}, \quad (10)$$

onde  $N_m(P)$  e  $D_n(P)$  são polinômios em  $P$  de ordens  $m$  e  $n$  para o numerador e o denominador, respectivamente. Esses polinômios são denominados aproximantes de Padé [18] e estão listados na TABELA I.

TABELA I  
APROXIMANTES DE PADÉ EM FUNÇÃO  
DO OPERADOR DIFERENCIAL  $P$

Ordem	$\frac{N_m(P)}{D_n(P)}$
(1,0) ou paraxial	$\frac{P}{2k}$
(1,1)	$\frac{P}{2k} \frac{1}{1 + \frac{P}{4k^2}}$

#### D. Método de propagação de feixe de ângulo largo usando diferenças finitas

A discretização de (9) é feita por meio de FD com o uso de aproximação centrada nos termos dependentes de  $\partial/\partial x$  [10], [13]. No lado direito de (9) a amplitude de campo  $\varphi(x, z)$  em uma determinada posição  $z$  é substituída pela seguinte expressão:

$$\varphi(x, z) = \alpha \varphi(x, z+1) + (1-\alpha) \varphi(x, z), \quad (11)$$

correspondendo ao esquema Crank–Nicholson para  $\alpha = 1/2$ . Aplicando este procedimento o seguinte algoritmo em FD é obtido:

$$\gamma \alpha_x \varphi_{x+1}^{z+1} + (\gamma b_x + \Delta x^2) \rho_x^{z+1} + \gamma c_x \varphi_{x-1}^{z+1} = \bar{\gamma} \alpha_x \varphi_{x+1}^z + (\bar{\gamma} b_x + \Delta x^2) \rho_x^z + \bar{\gamma} c_x \varphi_{x-1}^z, \quad (12)$$

os índices  $x$  e  $z$  referem-se, respectivamente, aos pontos de discretização nas direções transversal e longitudinal empregados na simulação computacional. Os coeficientes que multiplicam as distribuições de amplitude de campo em  $z$  e  $z+1$  são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} a_x &= \sigma^+ + k(\chi_x - \tau_x \xi_{x+1}) \Delta x / 2; \\ b_x &= (\tau_x - n_0^2) (\kappa_0 \Delta x)^2 - (\sigma^+ + \sigma^-); \\ c_x &= \sigma^- - k(\chi_x - \tau_x \xi_{x-1}) \Delta x / 2; \\ \sigma^+ &= \frac{\tau_x + \tau_{x+1}}{\rho_x + \rho_{x+1}}; \sigma^- = \frac{\tau_x + \tau_{x-1}}{\rho_x + \rho_{x-1}}; \\ \gamma &= j \frac{\alpha \Delta z}{2k} \text{ para Padé (1,0);} \\ \gamma &= \frac{1}{4k^2} + j \frac{\alpha \Delta z}{2k} \text{ para Padé (1,1);} \\ \bar{\gamma} &= j \frac{(\alpha-1) \Delta z}{2k} \text{ para Padé (1,0);} \\ \bar{\gamma} &= \frac{1}{4k^2} + j \frac{(\alpha-1) \Delta z}{2k} \text{ para Padé (1,1).} \end{aligned}$$

No lado esquerdo de (12) os coeficientes  $a_x$ ,  $b_x$  e  $c_x$  são calculados na posição longitudinal  $z+1$  e no lado direito na posição  $z$ . Usando (12), uma determinada distribuição de campo propaga-se iterativamente em passos de comprimento  $\Delta_z$ . Esta condição inicial é tomada como solução analítica do modo suportado pela estrutura guiente, obtida neste artigo por meio da técnica de matriz de transferência (TMT) e adaptada para guias com materiais magnetópticos [10].

### E. Estrutura analisada

A estrutura escolhida para exemplificar a aplicação do método numérico descrito neste trabalho é mostrada na Fig. 1. Trata-se de um acoplador óptico não-recíproco inclinado de um ângulo  $\theta$  com relação ao eixo longitudinal. As regiões com índices de refração  $n_1$ ,  $n_3$  e  $n_5$  são de materiais isotrópicos. As regiões representadas por  $[\epsilon_r]$  são as que contêm material magnetoóptico. Nos guias A e B o campo  $H_{DC}$  de polarização está aplicado em direções opostas.

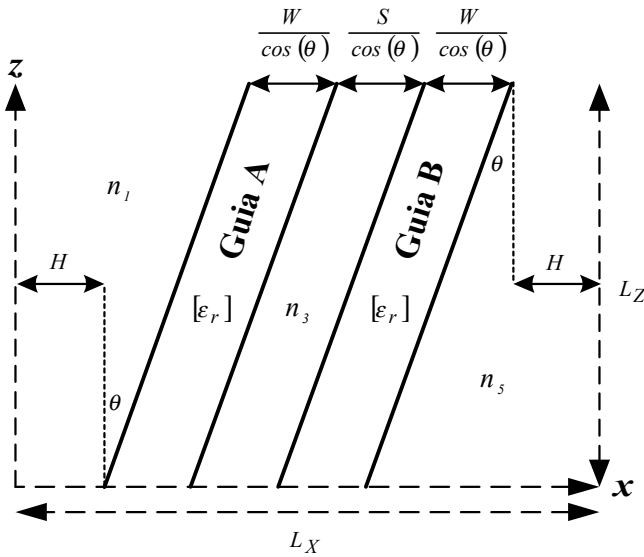


Fig. 1. Estrutura do acoplador óptico inclinado não-recíproco analisado neste trabalho. As dimensões do dispositivo são dadas por:  $W=S=1 \mu\text{m}$ ;  $L_x=100 \mu\text{m}$ ;  $L_z=150 \mu\text{m}$ . O índice de refração das regiões com material isotrópico é  $n_1=n_3=n_5=2,25$ . Os elementos do tensor permissividade relativa das regiões com material magnetoóptico são:  $n_x=n_y=n_z=2,28$  com  $\delta=0,18$  para o guia A e  $\delta=-0,18$  para o guia B. O comprimento de onda de operação é  $\lambda_0=1,32 \mu\text{m}$ .

O funcionamento deste acoplador depende do comprimento de acoplamento total de energia,  $L_\pi$ , em que a energia de um guia transfere-se completamente para o outro. Nas direções de propagação direta e reversa são observados diferentes valores para  $L_\pi$ . Os modos par e ímpar do acoplador não-recíproco exibem diferentes constantes de propagação de acordo com a direção de propagação. O resultado da interferência não-recíproca entre estes modos responde pelo comportamento de acoplamento diferentes para as direções de propagação direta (+z) e reversa (-z). Desta forma, pode-se implementar

estruturas de circuladores para aplicações em sistemas de comunicações ópticas [5], [13].

## III. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados os principais resultados numéricos obtidos. Todas as simulações computacionais foram realizadas usando  $\Delta_x=\Delta_z=0,1 \mu\text{m}$ . A distribuição de campo magnético, utilizada no algoritmo FD-BPM como excitação do acoplador não-recíproco, corresponde ao modo TM suportado pelo guia de onda A.

A simulação FD-BPM com Padé (1,1) da propagação nas direções +z e -z da onda TM no acoplador não-recíproco para  $\theta=0^\circ$  é mostrada na Fig. 2. No caso de propagação direta é obtido  $L_\pi=78 \mu\text{m}$  e no caso de propagação reversa  $L_\pi=135 \mu\text{m}$ .

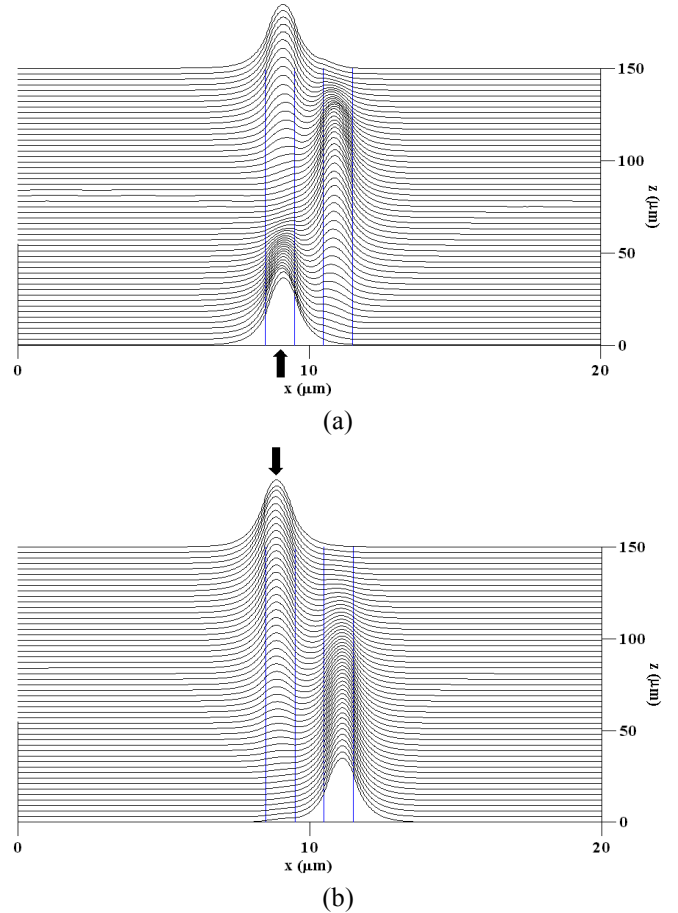


Fig. 2. Simulação FD-BPM com Padé (1,1) da propagação da onda TM no acoplador não-recíproco para  $\theta=0^\circ$ ; (a) Propagação direta; (b) Propagação reversa.

A simulação FD-BPM da propagação direta da onda TM no acoplador não-recíproco para  $\theta=25^\circ$  é mostrada na Fig. 3. No caso de Padé (1,0) é obtido  $L_\pi=152 \mu\text{m}$  e no caso de Padé (1,1)  $L_\pi=99 \mu\text{m}$ . A simulação FD-BPM com Padé (1,1) apresentou melhor desempenho que a formulação Padé

(1,0) com relação ao valor de  $L_\pi$  para  $\theta = 0^\circ$ . Este resultado já era esperado, uma vez que na aproximação paraxial o termo  $\partial^2/\partial z^2$  de (6) é desprezado.

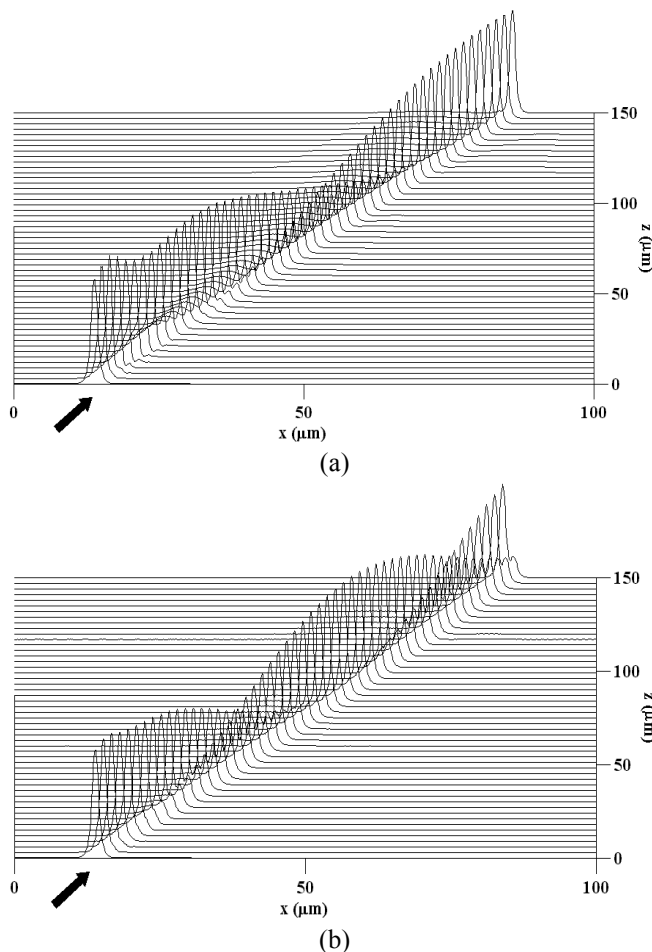


Fig. 3. Simulação FD-BPM da propagação direta da onda TM no acoplador não-recíproco para  $\theta = 25^\circ$ ; (a) Formulação Padé (1,0) ou paraxial; (b) Formulação Padé (1,1).

A comparação entre as formulações Padé (1,0) e (1,1) em função do ângulo de inclinação  $\theta$  do acoplador é mostrada na Fig. 4. Esta comparação é feita com base no erro relativo ao  $L_\pi$  determinado pela seguinte expressão:

$$\text{erro relativo} = \frac{L_\pi^\theta - L_\pi^0}{L_\pi^0},$$

onde  $L_\pi^\theta$  é o comprimento de acoplamento para um determinado ângulo de inclinação  $\theta$  e  $L_\pi^0$  é o comprimento de acoplamento para  $\theta = 0^\circ$ . Pode-se observar que, para ângulos maiores do que  $8^\circ$ , o desempenho da formulação paraxial diminui consideravelmente em relação ao da formulação de ângulo largo. Para ângulos largos, neste caso ângulos maiores do que  $8^\circ$ , os raios guiados deixam de se propagar paralelamente ao eixo do guia de onda e aproximação paraxial

se torna inadequada para tais ângulos. Na formulação de ângulo largo a aproximação paraxial não é adotada.

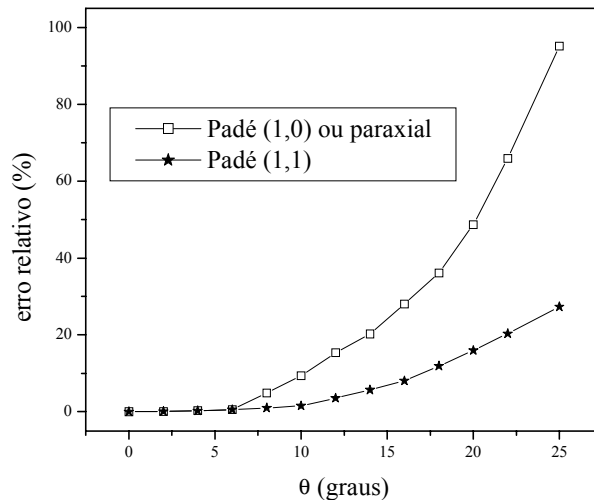


Fig. 4. Erro relativo em função do ângulo  $\theta$  de inclinação do acoplador.

#### IV. CONCLUSÕES

Uma formulação para analisar a propagação não-paraxial de luz em guias com materiais magnetoópticos foi proposta e discutida neste artigo. Até então, esta formulação não havia sido empregada para simular o comportamento de guias com materiais magnetoópticos. A simulação computacional da propagação de luz foi realizada empregando o método da propagação de feixe de ângulo largo. A equação de onda para meios magnetoópticos foi discretizada usando diferenças finitas e o esquema Crank-Nicholson. O funcionamento de um acoplador óptico não-recíproco foi simulado e discutido, demonstrando a facilidade de formulação do esquema numérico apresentado.

#### REFERÊNCIAS

- [1] V. Priye, B. P. Pal, K. Thyagarajan, "Analysis and design of a novel leaky YIG film guided wave optical isolator", *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 16, no. 2, pp. 246-250, fevereiro de 1998.
- [2] S. T. Kirsch, W. A. Biolsi, S. L. Blank, P. K. Tien, R. J. Martin, P. M. Bridenbaugh e B. Grabbe, "Semileaky thin-film optical isolator", *Journal Applied Physics*, vol. 52, pp. 3190-3199, maio de 1981.
- [3] N. Bahlmann *et al.*, "Improved design of magneto-optic rib waveguides for optical isolators", *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 16, no. 5, pp. 818-823, maio de 1998.
- [4] S. Kaewsuriyathumrong, T. Mizumoto, H. Mak, Y. Naito, "Double-layered magneto-optic channel waveguide for waveguide isolator application", *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 8, no. 2, pp. 177-182, fevereiro de 1990.
- [5] N. Bahlmann, M. Lohmeyer, O. Zhuromskyy, H. Dötsch, P. Hertel, "Nonreciprocal coupled waveguides for integrated optical isolators and circulators for TM-modes", *Optics Communications*, no. 161, pp. 330-337, 15 de março de 1999.
- [6] K. Matsubara e H. Yajima, "Analysis of y-branching optical circulator using magneto-optic medium as a substrate", *IEEE Journal of Lightwave Technology*, vol. 9, no. 9, pp. 1453-1458, setembro de 1991.

- [7] T. Mizumoto e Y. Naito, "Nonreciprocal propagation characteristics of YIG thin film" *IEEE Transactions on Microwave and Techniques*, vol. 30, no. 6, pp. pp. 922–925, junho de 1982.
- [8] M. Koshiha e Xiu-Ping Zhuang, "An efficient finite-element analysis of magneto-optic channel waveguides", *IEEE Journal of Lightwave Technology*, vol. 11, no. 9, pp. 1453–1458, setembro de 1993.
- [9] Y. Tsuji e M. Koshiha, "A finite element beam propagation method for strongly guiding and longitudinally varying optical waveguides", *IEEE Journal of Lightwave Technology*, vol. 14, no. 2, pp. 217–222, fevereiro de 1996.
- [10] E. A. C. Gonçalves, B.-H. V. Borges e A. C. César, "Análise de dispositivos ópticos não-recíprocos usando FD-BPM", *Anais do Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo*, Natal-RN, pp. 90–94, 19 a 22 de novembro de 2000.
- [11] R. S. Flamino, B.-H. V. Borges e A. C. César, "Análise de acoplador óptico não-linear em x utilizando FD-BPM de ângulo largo", *Anais do Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo*, Natal-RN, pp. 95–99, 19 a 22 de novembro de 2000.
- [12] R. S. Flamino, B.-H. V. Borges e A. C. César, "Método de propagação de feixe de ângulo largo para meios não-lineares baseado em diferenças finitas", *Anais do IX Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica*, pp. 545–549, 07 a 11 de agosto de 2000.
- [13] A. Erdmann e P. Hertel, "Beam-propagation in magneto-optic waveguides", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 31, no. 8, pp. 1510–1516, agosto de 1995.
- [14] W. Huang, C. L. Xu, S. Chu e S. Chaudhuri, "A vector beam propagation method based on H fields", *IEEE Transactions Photonics Technology Letters*, vol. 3, no. 12, pp. 1117–1120, dezembro de 1991.
- [15] T. Anada, T. Hokazono, T. Hiraoka, J.-P. Hsu, T. M. Benson e P. Sewell, "Very-wide-angle beam propagation methods for integrated optical circuits", *IEICE Transactions Electronics*, vol. E82-C, no. 7, pp. 1154–1158, julho de 1999.
- [16] I. Ilic, R. Scarmozzino e R. M. Osgood, "Investigation of Padé approximant-based wide-angle beam propagation method for accurate modeling of waveguiding circuits", *IEEE Journal Lightwave Technology*, vol. 14, no 12, pp. 2813-2822, Dezembro 1996.
- [17] J. Yamauchi, J. Shibayama and H. Nakano, "Wide-angle propagating beam analysis based on the generalized Douglas scheme for variable coefficients", *Optics Letters*, vol. 20, no 1, pp. 7-9, Janeiro 1995.
- [18] G. R. Hadley, "Wide-angle beam propagating using Padé approximants operators", *Optics Letters*, vol. 17, no 20, pp. 1426-1428, Outubro 1992.
- [19] G. R. Hadley, "Transparent boundary condition for the beam propagation method", *IEEE Journal Quantum Electronics*, vol. 28, no.1, pp. 363–370, janeiro de 1992.
- [20] G. R. Hadley, "Transparent boundary condition for beam propagation", *Optics Letters*, vol. 16, no.9, pp. 624–626, maio de 1991.