

MÉTODO DE RECONSTRUÇÃO DE IMAGEM USANDO FEIXE DIVERGENTE DISTRIBUÍDO EM ÂNGULO LIMITADO

Harold I. A. Bustos*, Hae Yong Kim* e Ricardo T. Lopes**

*Dept. Eng. Sistemas Eletrônicos, Universidade de São Paulo. E-mails: {haroldivan, hae}@lps.usp.br

**Lab. Inst. Nuclear, COPPE, UFRJ. E-mail: ricardo@lin.ufrj.br

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma nova técnica de reconstrução de imagem a partir dos dados de aquisição em geometria divergente distribuídos em ângulo limitado. Às vezes não é possível obter dados em 360° , pois um objeto pode apresentar características anisotrópicas, sendo extremamente sensível a radiação para certos ângulos de incidência. As restrições físicas também podem impedir obter dados em todos os ângulos. A técnica proposta soluciona este problema reconstruindo a imagem a partir de dados em ângulo limitado. Ela primeiro converte as projeções divergentes distribuídas em ângulo limitado em projeções paralelas distribuídas homogeneamente sobre todo o contorno do objeto. Depois, um algoritmo baseado em Máxima Entropia é utilizado para a reconstrução da imagem.

1. INTRODUÇÃO

A reconstrução de imagem a partir das projeções ou tomografia tem como finalidade obter a distribuição de um meio não observável a partir das suas projeções [1]. Ela é um problema fundamental que aparece em uma grande variedade de aplicações que vão desde o campo atômico até o campo cósmico.

Em certos casos, não é possível obter projeções em 360° . Por exemplo, em ensaios não destrutivos (NDE) quando a exposição prolongada de uma peça industrial a radiação em alguns ângulos sensíveis do objeto pode provocar lesões graves ou mudanças em suas propriedades estruturais. Isto acontece quando a sensibilidade do objeto à radiação incidente tem propriedades anisotrópicas, fazendo com que o objeto seja sensível a alguns ângulos de incidência de radiação. Outro caso aparece quando uma peça não pode receber radiação em 360° por causa das restrições físicas que impedem certos graus de liberdade no deslocamento e rotação do objeto.

Alguns problemas de reconstrução de imagem em ângulo limitado são tratados em [2-3]. Em [2], é abordado o problema de reconstrução de imagem, a

partir de dados em ângulo limitado e geometria paralela, para ser utilizado em aplicações de ensaios não destrutivos. Em [3] é tratado a reconstrução de imagens de densidade eletrônica de uma seção da ionosfera, a partir dos dados de radar em ângulo limitado e geometria paralela. O nosso problema difere desses por estarmos trabalhando com geometria em leque. Se as projeções divergentes estiverem disponíveis em 360° , o método de retroprojeção filtrada de feixe em leque (FFBP) poderia ser utilizado [1-4] porém não quando o ângulo é limitado.

A aquisição é feita para cada fatia do objeto, numa geometria divergente com projeções uniformemente espaçadas, utilizando um detector curvo consistente com essa geometria. Somente os raios que podem ser convertidos da base divergente para a base paralela devem ser irradiados. Infelizmente, os raios irradiados não conseguem preencher homogeneamente todas as projeções paralelas. Assim, uma técnica de interpolação é utilizada para estimar as informações que faltam.

Depois de se efetuar a conversão, os dados estarão em geometria paralela. O algoritmo de reconstrução Máxima Entropia [5-6] é então aplicado. Este é um dos métodos mais atraentes para reconstrução de imagem, pois necessita apenas uma pequena quantidade de dados. Esta é uma situação na qual a maioria dos outros métodos apresenta um desempenho muito pobre. Houve a necessidade de se modificar o algoritmo de Máxima Entropia, pois o algoritmo original [5], foi escrito para processar somente dados completos. No nosso caso, faltam alguns dados pois a interpolação não consegue preencher totalmente os dados que faltam.

2. CONVERSÃO GEOMÉTRICA

O problema de conversão que trataremos é uma variante do problema clássico de *rebinning* [1]. No *rebinning* clássico, os dados são interpolados depois de se fazer a conversão, até obter uma amostragem uniforme em geometria paralela. Isto somente é possível porque a quantidade de projeções paralelas

é comparável à quantidade de projeções divergentes. No problema que estamos abordando, trabalhamos com somente 8 projeções paralelas, pois a complexidade computacional cresce muito rapidamente com o aumento do número de projeções. Assim, muitos raios divergentes não podem ser convertidos para a base paralela escolhida (mas isto não representa uma desvantagem pois, conforme dissemos acima, somente são irradiados os raios que podem ser convertidos para a base paralela). Além disso, as projeções estão distribuídas somente em ângulo limitado, o que ocasiona a falta de dados na base paralela. Devido a essas limitações, os dados convertidos para geometria paralela não podem ser interpolados até obter uma representação uniforme.

Para ilustrar este processo, suponha que queremos converter um raio da base divergente (β, λ) para a base paralela (l, θ) . As figuras 1 e 2 representam as geometrias dessas duas bases. O ângulo limitado a ser varrido pela fonte é representado como α . O seguinte sistema de equações realiza a conversão desejada [1]:

$$\begin{cases} \theta = \beta + \lambda \\ l = D \sin(\lambda) \end{cases} \quad (1)$$

onde :

- θ é o ângulo entre a reta perpendicular ao raio e o eixo X .
- β é o ângulo da posição da fonte ($0 \leq \beta \leq \alpha$).
- λ é o ângulo entre raio de uma projeção e o eixo central dessa projeção.
- l é a distância entre o raio paralelo e o centro do sistema de coordenadas.
- D é a distância do centro do objeto à fonte.

A figura 3 ilustra essa conversão. Nela, cada raio corresponde a um ponto no plano (l, θ) e cada uma das m curvas senoidais é formado pelo conjunto de raios de uma das m projeções divergentes. O sistema (1) pode ser discretizado como segue:

$$\begin{cases} \theta = i\Delta + n\delta = j\pi/J \\ l_n = D \sin(n\delta) \end{cases} \quad (2)$$

onde:

- $0 \leq i \leq m-1$, onde m é o número total de posições da fonte distribuídas uniformemente no ângulo α .
- Δ é o ângulo entre duas posições consecutivas da fonte.

- δ é o ângulo de abertura do um raio.
- l_n é a distância entre o raio n de uma projeção e o centro do sistema de coordenadas. Uma projeção tem $2N+1$ raios ($-N \leq n \leq N$).
- $0 \leq j < J$, onde J é o número de projeções paralelas. Escolhemos $J = 8$, mas outros valores de J também poderiam ser utilizados.

Um raio divergente não possui necessariamente uma correspondência na base paralela. Seguem abaixo um exemplo do caso de correspondência e outro de não-correspondência:

- Não-correspondência: O raio divergente $(\beta, \lambda) = (0, 3\delta)$ corresponde a $(l, \theta) = [D \sin(3\delta), 3\delta]$ na base paralela (o ponto \times da figura 3). Porém a coordenada $\theta = 3\delta$ desse ponto está situado entre 0 e $\pi/8$. Logo, o raio $(0, 3\delta)$ não pode ser mapeado nem na projeção paralela 0 nem na projeção $\pi/8$. Assim, esse raio não deve ser irradiado no processo de aquisição, pois não pode ser convertido para a base paralela.
- Correspondência: O raio divergente de coordenadas $(\beta, \lambda) = [\Delta, \delta]$, indicado como \bullet na figura 3, corresponde às coordenadas paralelas $(l, \theta) = [D \sin(\delta), \Delta + \delta]$. Esse ponto é a intersecção da linha horizontal $\theta = \pi/8$ com a linha senoidal $l = D \sin(\theta - \Delta)$ e conseqüentemente pode ser convertido de uma base para a outra.

Mesmo um raio que não tem uma correspondência exata na base paralela é convertido fazendo uma aproximação, se ficar suficientemente próximo de uma das oito linhas horizontais. Os raios assim convertidos ficam distribuídos não-uniformemente sobre as oito linhas horizontais (que representam as oito projeções paralelas). Mesmo depois desta aproximação, haverá vários dados em falta. Estes podem ser estimados através da interpolação linear entre os dados próximos em cada linha horizontal. Os dados em falta não poderão ser interpolados se não tiver dados próximos conhecidos, pois isto poderia introduzir informações que não refletem as propriedades estruturais do objeto.

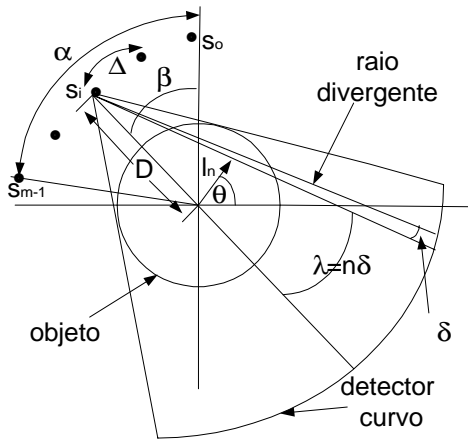


Fig. 1: Aquisição de dados em geometria divergente

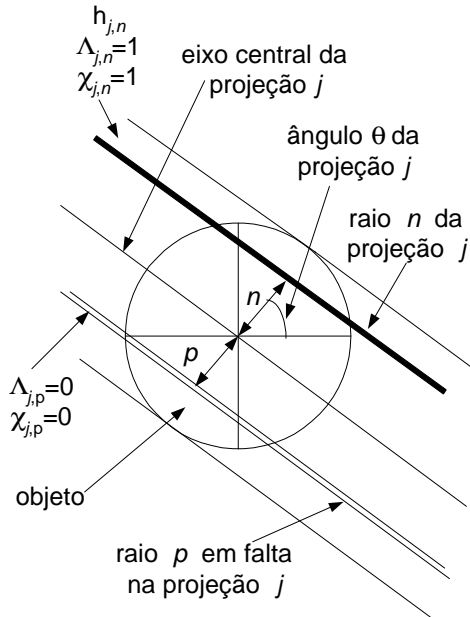


Fig. 2: Geometria paralela para reconstrução de imagem.

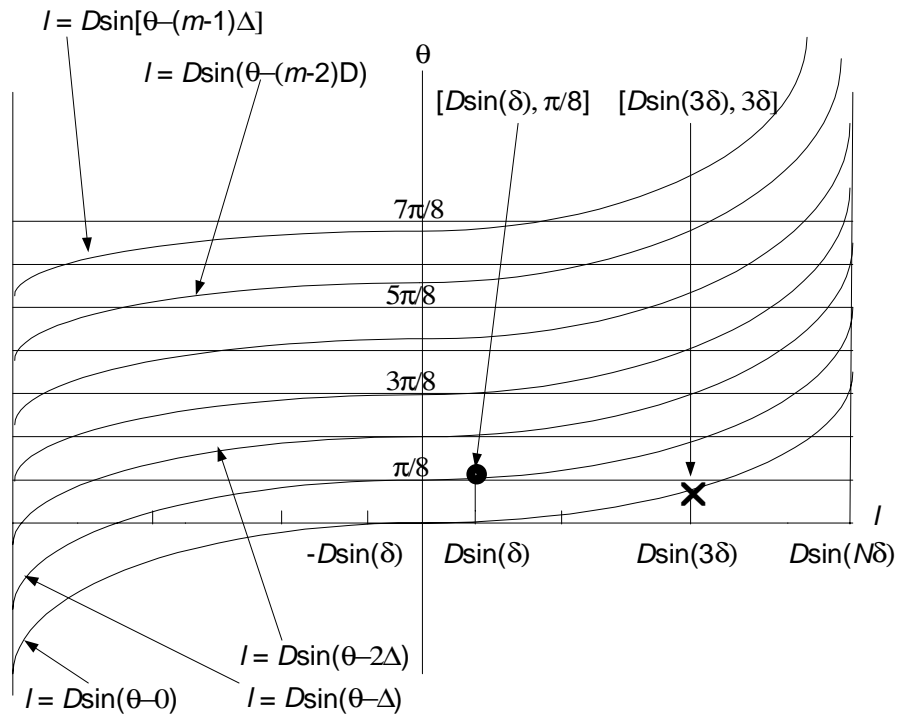


Fig. 3: Conversão dos raios da base divergente (β , λ) para a base paralela (l , θ). Cada raio mapeado corresponde a um ponto sobre as linhas senoidais.

3. ALGORITMO DE RECONSTRUÇÃO

Problema com Dados Completos

Depois da conversão para a base paralela, aplica-se o algoritmo de reconstrução Máxima Entropia. O funcional de Lagrange abaixo vale para os dados de projeção completos em geometria paralela ou divergente [5].

$$L(f, \Lambda) = - \iint f(x, y) \log[Af(x, y)] dx dy - \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \Lambda_{j,n} \left[h_{j,n} - \iint f(x, y) \chi_{j,n}(x, y) dx dy \right] \quad (3)$$

Nesta equação, $h_{j,n}$ é o raio paralelo na posição n da projeção j . O coeficiente dual de Lagrange do raio $h_{j,n}$ é denotado $\Lambda_{j,n}$. Esse coeficiente sempre vale 1 na técnica dos multiplicadores de Lagrange [6], pois as projeções são completas. A função núcleo da imagem do raio $h_{j,n}$ é denotada $\chi_{j,n}$. Esta função tem valor 1 na faixa que contém radiação e 0 fora dela [5]. A área do objeto é A . A função imagem é denotada f . O número total de faixas da projeção j é N .

A otimização do funcional (3) permite encontrar a solução (4) do problema de reconstrução de imagem para qualquer uma das duas geometrias citadas acima com dados completos:

$$f(x, y) = \frac{1}{A} \prod_{j=1}^J \sum_{n=1}^N F_{j,n} \chi_{j,n}(x, y) \quad (4)$$

onde $F_{j,n}$ é a matriz dos parâmetros duais de Lagrange associada à faixa n da projeção j . Esses parâmetros são obtidos a partir da otimização de (3), conforme mostra o sistema iterativo abaixo:

$$F_{j,n}^{(i)} = \begin{cases} \exp(\Lambda_{j,n} - 1/J), & i = 1 \\ \frac{A h_{j,n}}{\iint \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^J \sum_{n=1}^N [F_{k,n}^{(i-1)} \chi_{k,n}(x, y)] \chi_{j,n}(x, y) dx dy}, & i > 1 \end{cases} \quad (5)$$

O sistema (5) é usado para calcular os parâmetros duais de Lagrange quando os dados são completos. O cálculo iterativo de $F_{j,n}$ é feito até atingir estabilidade na norma da diferença entre as projeções ge-

radas pelo simulador e as projeções reconstruídas [5]. Uma vez calculado $F_{j,n}$, ele é inserido em (4) para encontrar a solução de Máxima Entropia para o problema de reconstrução [5].

Problema com Dados Incompletos

Quando faltarem dados, a técnica anterior não pode ser aplicada diretamente. Neste caso, deve-se considerar os seguintes casos:

- Dados em falta que não podem ser preenchidos pela interpolação por não estarem situados entre vizinhos imediatos conhecidos.
- Dados em falta situados entre dois vizinhos adjacentes com valores conhecidos e que portanto podem ser interpolados.
- Dados que vem diretamente da conversão de feixe em leque para feixe paralelo.

Assim, adota-se o seguinte procedimento.

Caso (a): Seja $h_{j,p}$ um dado em falta. Neste caso, o parâmetro de Lagrange terá o valor constante abaixo

$$F_{j,p} = \exp(\Lambda_{j,p} - \frac{1}{J}), \quad (6)$$

onde $\Lambda_{j,p}$ vale zero, segundo a técnica dos multiplicadores de Lagrange descrito em [6] (veja a figura 2). Não há processo iterativo para calcular os parâmetros de Lagrange.

Caso (b): Neste caso, deve-se interpolar o dado $h_{j,p}$ em falta, usando a equação abaixo:

$$h_{j,p} = \frac{h_{j,p-1} + h_{j,p+1}}{2} \quad (7)$$

Uma vez interpolados os dados, utiliza-se o sistema (5) para calcular o parâmetro de Lagrange iterativamente.

Caso (c): Neste caso, dispomos dos dados obtidos pela conversão do feixe em leque para paralelo. Assim, utiliza-se diretamente o sistema iterativo (5).

4. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Quatro experimentos foram conduzidos para mostrar a capacidade do algoritmo de conversão geométrica e do algoritmo de reconstrução Máxima Entropia apresentados neste trabalho. As técnicas foram implementadas e testadas com dados simulados. O objeto simulado é formado por dois cilindros planos

concêntricos de diferentes densidades. O cilindro externo tem densidade 1.0 e o cilindro interno possui densidade 0.0. O cilindro interno contém um defeito, deslocado do centro em forma de cilindro, com densidade 2.0. A densidade de fundo é 0.0.

O primeiro conjunto de dados simulados foi gerado por 90 projeções divergentes distribuídas em 360° com 40 raios por projeção. A partir destes dados, foi obtida a imagem 4a utilizando o algoritmo de retroprojeção filtrada.

O segundo conjunto foi formado por 20 projeções divergentes distribuídas em 360° com 40 raios por projeção. A imagem 4b foi gerada a partir destes dados utilizando novamente o algoritmo de retroprojeção filtrada.

O terceiro conjunto consistiu em 50 projeções com 40 raios cada, distribuídas em 200°. Os dados processados são incompletos, isto é, foram irradiados apenas 7.25% do total de 50×40 raios, sendo os raios restantes considerados desconhecidos. A imagem 4c foi obtida utilizando as técnicas propostas neste trabalho.

O quarto conjunto consistiu em 35 projeções com 40 raios cada, distribuídas em 140°. Os dados processados são novamente incompletos, isto é, são conhecidos apenas 7.57% de 35×40 raios. A imagem 4d foi obtida utilizando as técnicas propostas neste trabalho.

Todas as imagens geradas têm resolução 40×40. Cada uma das quatro imagens reconstruídas foram filtradas pelo filtro de mediana 3×3. O erro absoluto médio MAE de cada uma das imagens em relação à imagem ideal 4a foram: 9.55%, 14.92% e 19.10% respectivamente para as imagens 4b, 4c e 4d.

5. CONCLUSÕES

A técnica de conversão geométrica proposta, juntamente com o algoritmo de reconstrução Máxima Entropia, tornou possível reconstruir imagens a partir dos dados divergentes distribuídos em ângulo limitado. A imagem obtida por este método (figura 4c) foi relativamente semelhante à imagem reconstruída pelo algoritmo clássico (figura 4a), mostrando a viabilidade da técnica proposta.

6. REFERÊNCIAS

[1] G. H. Herman, *Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography*, Academic Press, New York, 1980.

- [2] A. Mohammed-Djafari, K. Saver, Y. Khagu and E. Cano, "Reconstruction of Shape of a Compact Object from Few Projections," in *Proc. Int. Conf. Image Processing*, vol. 1, pp. 165-168, paper 632, 1997.
- [3] C. Biswas and H. Na, "Limited Angle Tomography Using Volumetric Constraints," in *Proc. Int. Conf. Image Processing*, vol. 1, pp. 488-491, paper 608, 1997.
- [4] X. C. Pan, "Optimal Noise Control in Fast Reconstruction of Fan Beam Computed Tomography Image," *Medical Physics*, vol. 26, no. 5, pp. 689-697, May 1999.
- [5] M. L. Reis and N. C. Roberty, "Image Reconstruction Using the Method of Maximum Entropy," *Inverse Problems*, vol. 8, no. 4, pp. 623-644, 1992.
- [6] J. Dusassoy and I. E. Abdou, "The Extend Ment Algorithm: A Maximum Entropy Type Algorithm Using Prior Knowledge for Computerized Tomography," *IEEE T. Signal Processing*, vol. 39, no. 5, pp. 1164-1180, May 1991.

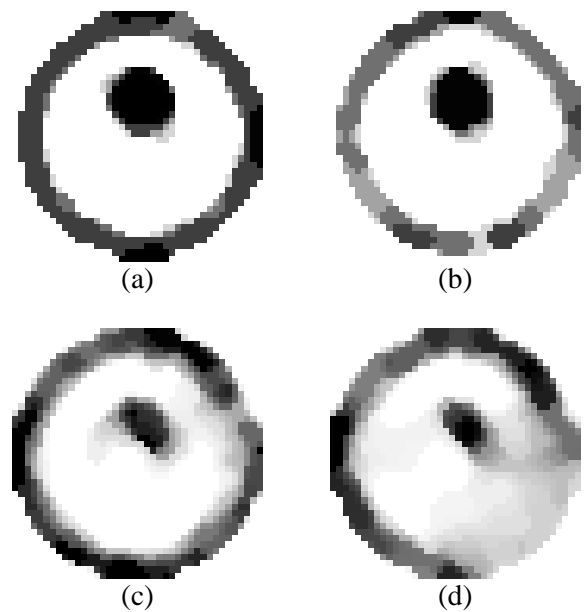


Fig. 4: (a) imagem reconstruída pela retroprojeção filtrada com 90 projeções; (b) imagem reconstruída pela retroprojeção filtrada com 20 projeções; (c) imagem reconstruída pela Máxima Entropia para varredura de fonte de 200°; (d) imagem reconstruída pela Máxima Entropia para varredura de fonte de 140°.