

Confiabilidade da Estimação de Probabilidade de Erro em Sistemas de Transmissão Digital com Memória

Ernesto Leite Pinto
DEE - Instituto Militar de Engenharia
ernesto@ime.eb.br

Raimundo Sampaio Neto
CETUC- PUC-Rio
raimundo@cetuc.puc-rio.br

Resumo

Discute-se a questão da confiabilidade de estimativas obtidas via simulação de probabilidade de erro em sistemas de transmissão com memória, tendo como base o caso específico de canais com desvanecimento plano. Uma expressão analítica para o valor RMS do erro relativo de estimação é obtida e particularizada para o caso de demodulação FSK-4 não-coerente. Alguns resultados numéricos são apresentados, considerando-se dois formatos usualmente adotados para o espectro Doppler do canal e diversos valores dos parâmetros associados a estes modelos. Fica evidenciado em todo o trabalho o impacto da memória do canal sobre a confiabilidade das estimativas de probabilidade de erro. O trabalho também fornece alguns subsídios para se analisar a escolha dos parâmetros de simulação, em função das características do canal, de modo a se atingir níveis de confiabilidade desejados.

1. INTRODUÇÃO

Este artigo aborda a avaliação da qualidade de estimativas, obtidas via simulação, da probabilidade de erro de símbolo (P_S) em sistemas de transmissão que encerram algum tipo de memória, de forma que os símbolos consecutivos recebidos na saída do canal não são estatisticamente independentes. Esta dependência pode ter sido introduzida no sistema, por exemplo, por um processo de codificação ou pelas características do canal de transmissão.

Supondo-se que uma estimativa despolarizada \hat{P}_S de P_S é gerada, uma avaliação de sua qualidade pode ser feita por meio do valor rms do erro relativo da estimação, dado pela razão μ entre o desvio padrão da estimativa e o valor sendo estimado, ou seja:

$$\mu = \frac{\sqrt{\text{Var}(\hat{P}_S)}}{P_S} \quad (1)$$

Considera-se, no caso geral, que a estimativa de P_S é calculada como uma média empírica de N estimativas parciais dadas pelos valores das frequências relativas de ocorrência de erro obtidas em N realizações independentes de todos os processos estocásticos envolvidos na transmissão (símbolos, canal, ruído, etc). Admite-se que para obtenção de cada uma dessas estimativas parciais é simulada a recepção de L símbolos consecutivos. Assim, o número total de símbolos simulados para a obtenção de \hat{P}_S é LN .

Como o efeito de N na variância da estimativa final pode ser facilmente avaliado, considera-se a estimativa parcial obtida a partir de uma realização, expressa por:

$$\hat{p}_S = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L a_k, \quad (2)$$

onde a_k é uma variável aleatória que assume o valor 1 na ocorrência de um erro de decisão e assume o valor 0 em caso contrário. É imediato verificar que $E[\hat{p}_S] = E[a_k] = P_S$, ou seja, a estimativa parcial é despolarizada. Com a estimativa final \hat{P}_S obtida através da média empírica das estimativas parciais associadas a N realizações independentes, resulta que

$$E[\hat{P}_S] = E[\hat{p}_S] = P_S \quad (3)$$

e que

$$\text{Var}[\hat{P}_S] = \text{Var}[\hat{p}_S] / N \quad (4)$$

No caso de sistemas *sem memória*, nos quais a ocorrência de erros em decisões consecutivas são eventos independentes, as parcelas do somatório em (2) são descorrelacionadas e como cada uma tem variância dada por $P_S(1-P_S)$, tem-se

$$\text{Var}[\hat{p}_S] = \frac{P_S(1-P_S)}{L} \quad (5)$$

e, portanto,

$$\text{Var}[\hat{P}_S] = \frac{P_S(1-P_S)}{N.L} \quad (6)$$

Resulta então de (1) que

$$\mu^2 = \frac{(1-P_S)}{N.L.P_S} \quad (7)$$

Note-se que, neste caso, a qualidade da estimativa depende do número total LN de símbolos transmitidos e não dos valores relativos de L e do número de repetições N . O procedimento usual de estimação de P_S consiste em tomar-se $N=1$ e adotar a seguinte *regra prática* ("thumb rule"): "o número de símbolos transmitidos simulados deve ser da ordem de 100 vezes o inverso da probabilidade de erro que se quer estimar" ($L=100/P_S$). Tal procedimento se justifica em sistemas sem memória e corresponde a um valor razoavelmente pequeno para μ^2 ($\mu^2 \cong 0,01$).

É importante ressaltar, entretanto, que em sistemas com memória as parcelas do somatório em (2) são, em geral, variáveis aleatórias correlacionadas, o que faz com que a dependência da variância de \hat{p}_S com L não seja apenas através do fator $1/L$, de modo que a variância da estimativa final depende tanto do produto LN quanto do valor de L . Assim, em canais com

memória, a qualidade da estimativa obtida pode depender de uma escolha criteriosa não só do número de transmissões consecutivas a serem simuladas em uma realização (L) mas também de um número apropriado de realizações independentes (N).

Estes conceitos são ilustrados nos desenvolvimentos a seguir, considerando-se a situação onde a memória é introduzida pela presença de desvanecimento plano no canal de transmissão. A Seção 2 apresenta uma descrição sucinta do modelo adotado para a entrada do decisor e para o processo estocástico complexo que caracteriza o efeito do desvanecimento plano. Na Seção 3 é obtida uma expressão analítica para a variância das estimativas parciais no caso de um sistema com modulação FSK M-ária e detecção não-coerente. Este resultado é expresso em termos da função auto-correlação do processo de desvanecimento. Resultados numéricos que ilustram a dependência da medida de qualidade μ com a escolha dos valores de N e L são apresentados na Seção 4 para um sistema FSK-4. Os resultados nesta seção consideram tanto processos de desvanecimento com espectro Doppler do tipo *Butterworth* de 1ª. ordem quanto processos com espectro Doppler do tipo *Jakes*. Conclusões são apresentadas na Seção 5.

2. MODELO DA ENTRADA DO DECISOR

Admite-se que o receptor opera com critério de máxima probabilidade a posteriori para decisão de símbolos isolados e que o canal produz desvanecimento plano. Após demodulação, passagem por filtros casados e amostragem à taxa de símbolos, a entrada do dispositivo de decisão é modelada por um campo estocástico definido por:

$$\mathbf{r}_k = h_k \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k \quad (8)$$

onde \mathbf{x}_k é um campo vetorial associado aos símbolos transmitidos, de acordo com o tipo de modulação utilizado e \mathbf{n}_k é um campo estocástico relativo ao ruído. As componentes de \mathbf{n}_k são processos gaussianos independentes, estacionários em sentido amplo, brancos, de média nula e variância $N_0/2$, sendo N_0 a densidade espectral (unilateral) de potência do ruído na entrada do receptor.

A seqüência $\{h_k\}$ corresponde às amostras, tomadas à taxa de símbolos, do processo multiplicativo que caracteriza os efeitos do desvanecimento plano, sendo modelada por um processo Gaussiano complexo em tempo discreto, estacionário, de média nula, variância unitária e auto-correlação $\rho(k-i) = E[h_k h_i^*]$. Admite-se ainda que os símbolos transmitidos são independentes e identicamente distribuídos.

3. VARIÂNCIA DAS ESTIMATIVAS PARCIAIS

Como $E[\hat{p}_S] = P_S$ a variância das estimativas parciais fica dada por:

$$\text{Var}[\hat{p}_S] = \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^L E[a_i a_k] - P_S^2 \quad (9)$$

O valor esperado do lado direito da equação (9) pode ser expresso como:

$$E[a_i a_k] = E \{E[a_i a_k | h_i, h_k]\}. \quad (10)$$

Considera-se inicialmente $k=i$. Deve-se notar que, dado h_i a decisão no instante i depende apenas do ruído branco. Assim sendo, o momento condicional de segunda ordem de a_i corresponde à probabilidade de erro condicionada a h_i e pode ser obtido pelas técnicas usuais de análise da probabilidade de erro diante de ruído branco.

Para se fixar um caso de interesse, admite-se a partir deste ponto um receptor FSK M-ário não coerente. Neste caso, o momento de segunda ordem condicional de a_i é dada por [1] :

$$E[a_i^2 | h_i] = E[a_i | h_i] = P(\alpha_i) = \sum_{m=1}^{M-1} (-1)^{m+1} \binom{M-1}{m} \frac{1}{m+1} \cdot \exp\left[-\frac{m}{m+1} \left(\frac{\alpha_i^2 \cdot E_S}{N_0}\right)\right] \quad (11)$$

onde se deve notar que a dependência da probabilidade de erro com h_i se dá através da “amplitude” do desvanecimento $\alpha_i = |h_i| = \sqrt{[\text{Re}(h_i)]^2 + [\text{Im}(h_i)]^2}$, E_S é a energia por símbolo na entrada do receptor e as notações $\text{Re}(\cdot)$ e $\text{Im}(\cdot)$ são usadas respectivamente para parte real e parte imaginária da grandeza entre parênteses.

É fácil concluir que α_i tem função densidade de probabilidade (fdp) de Rayleigh dada por:

$$f_{\alpha_i}(\alpha) = 2\alpha \cdot \exp(-\alpha^2) \cdot u(\alpha) \quad (12)$$

A avaliação de (10) para $k=i$, usando-se (11) e (12) leva à probabilidade de erro média diante de desvanecimento Rayleigh, que é dada por [1]

$$E[a_i^2] = E\{P(\alpha_i)\} = P_S = \sum_{m=1}^{M-1} \binom{M-1}{m} \frac{(-1)^{m+1}}{1+m \left(1 + \frac{E_S}{N_0}\right)} \quad (13)$$

Admite-se agora que $k \neq i$. Nesse caso, uma forma conveniente de trabalhar com a expressão (10) é a seguinte:

$$E[a_i a_k] = E\{E[a_i | h_i] \cdot E[a_k | h_k]\}, \quad (14)$$

onde se deve notar que, dados h_i e h_k a decisão no instante i é condicionalmente independente da decisão no instante k . Cabe ainda notar que o valor esperado condicional $E[a_k | h_k]$ é dado por uma expressão similar à (11), de modo que a equação (14) pode ser reescrita como:

$$E[a_i a_k] = E\{P(\alpha_i) \cdot P(\alpha_k)\} = E\{P(\alpha_i) \cdot E\{P(\alpha_k) | h_i\}\}, \quad (15)$$

onde $\alpha_k = |h_k|$.

Como h_k e h_i são conjuntamente gaussianas, tem-se que, condicionada a h_i , h_k é variável aleatória gaussiana complexa de média $E[h_k | h_i] = \rho(k-i) h_i$ e variância $\text{Var}[h_k | h_i] = 1 - |\rho(k-i)|^2$. Resulta, então que, dado h_i , a variável aleatória α_k tem distribuição de Rice, a qual só depende de h_i através de α_i e é caracterizada pela seguinte fdp:

$$f_{\alpha_k|h_i}(\beta) = \frac{2\beta}{\sigma^2} \cdot \exp\left[-\frac{(\beta^2 + s^2)}{\sigma^2}\right] \cdot I_0\left(\frac{2s\beta}{\sigma^2}\right) u(\beta), \quad (16)$$

onde $\sigma^2 = 1 - |\rho(k-i)|^2$, $s = |\rho(k-i)|\alpha_i$, $I_0(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem zero e $u(\cdot)$ é a função degrau unitário.

Utilizando (11) e (16), obtém-se, depois de algumas manipulações:

$$E[P(\alpha_k) | h_i] = \int_0^{\infty} P(\beta) f_{\alpha_k|h_i}(\beta) d\beta = \sum_{m=1}^{M-1} \binom{M-1}{m} \frac{(-1)^{m+1}}{m+1+m\gamma} \exp\left[\frac{-|\rho(k-i)|^2 \cdot (E_S/N_0) \cdot m\alpha_i^2}{m+1+m\gamma}\right] \quad (17)$$

$$\text{onde } \gamma = \frac{E_S \sigma^2}{N_0}.$$

Substituindo (11) e (17) em (15), e usando (12), obtém-se:

$$E[a_i a_k] = \frac{\sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{M-1} \binom{M-1}{m} \binom{M-1}{n} \cdot (-1)^{m+n}}{(n+1)(m+1+m\gamma) + [n(m+1+m\gamma) + m(n+1) |\rho(k-i)|^2] E_S / N_0} \quad (18)$$

Por fim, reescrevendo (9) através de um somatório simples em $j=|k-i|$, considerando-se separadamente o termo em $j=0$, e usando-se (11) e (18) obtém-se:

$$\text{Var}[\hat{P}_S] = P_S \left(\frac{1}{L} - P_S \right) + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{m+n} \binom{M-1}{m} \binom{M-1}{n} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{L-1} \left(1 - \frac{j}{L}\right) (n+1)(m+1+m\gamma) + [n(m+1+m\gamma) + m(n+1) |\rho(j)|^2] E_S / N_0} \quad (19)$$

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para ilustrar a aplicação dos cálculos e idéias acima apresentados, considera-se alguns casos de um sistema FSK-4 com detecção não coerente.

Avaliou-se inicialmente a confiabilidade de algumas estimativas parciais, obtidas a partir de uma única realização dos processos estocásticos envolvidos, ou seja, com $N=1$.

Considerou-se em primeiro lugar o espectro Doppler de Jakes [2], com valores do produto $f_D T$ entre $4,1 \times 10^{-4}$ e $4,12 \times 10^{-3}$, sendo f_D o desvio Doppler máximo e T o intervalo de símbolo. Estes valores correspondem aproximadamente a velocidades do terminal móvel entre 12 e 120 Km/h, para uma frequência de portadora típica dos sistemas de segunda geração (900MHz) e taxa de símbolos do padrão IS-136 (24,3 kbaud). Foram ainda considerados dois valores da razão E_b/N_0 , sendo $E_b = E_S / \log_2(M)$ a energia por bit na entrada do receptor.

Mostra-se na Fig. 1 as curvas da razão μ em função do produto $f_D T$ assim obtidas. A curva cheia com asteriscos foi obtida com E_b/N_0 de 10 dB e $L = 1230$. A curva pontilhada (com asteriscos) foi gerada com $E_b/N_0 = 20$ dB e $L = 11070$. Os valores de P_S correspondentes aos dois valores de E_b/N_0 em questão são $8,22 \times 10^{-2}$ e $9,1 \times 10^{-3}$. Os valores de L foram escolhidos de modo a atender à “regra prática” mencionada na seção 1.

A Fig. 1 ainda mostra como referências os valores de μ que seriam obtido por um processo de estimação a partir de L amostras independentes da entrada do decisor. Essas referências foram calculadas usando-se (5) e (13) e também podem ser interpretadas como sendo os valores de μ que seriam obtidos num canal sem memória, para o qual $\rho(j)=0$ se $j \neq 0$. Como se vê na Fig. 1, os valores de referência são de fato muito próximos.

Nota-se na Fig. 1 que os valores de μ apresentam uma queda inicial significativa com o aumento do produto $f_D T$ e que esta queda se torna menor à medida em que $f_D T$ é aumentado. Deve-se notar que este efeito já poderia ser previsto, uma vez que o a memória do canal se reduz à medida que $f_D T$ é aumentado.

No entanto, os valores de μ na Fig.1 são muito mais altos do que os valores de referência mesmo quando se considera valores elevados de $f_D T$, que correspondem a casos usualmente classificados como de desvanecimento rápido no contexto das telefonia celular móvel de segunda geração [3]. Vê-se portanto que mesmo nesses casos o canal tem memória significativamente longa a ponto de afetar em muito a qualidade das estimativas de probabilidade de erro.

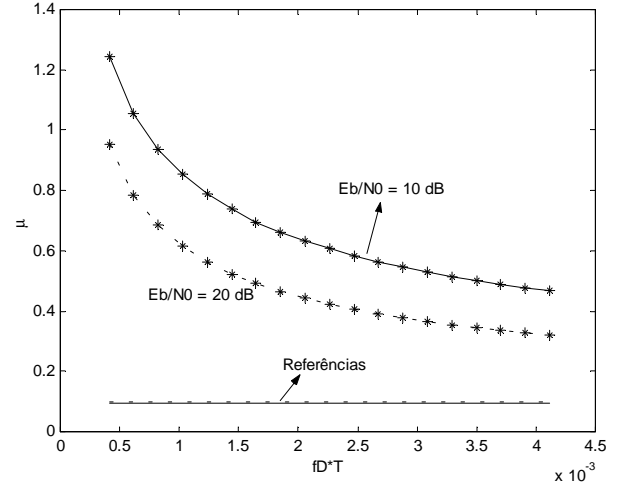


Fig. 1 – Valor RMS do Erro Relativo para uma Estimativa Parcial ($N=1$) com Espectro de Jakes. $L = 1230$ ($E_b/N_0 = 10$ dB) e 11070 ($E_b/N_0 = 20$ dB).

No que diz respeito à variação nos valores de E_b/N_0 observa-se uma significativa redução nos valores de μ obtidas quando se usou o valor de 20 dB em relação aos valores obtidos com $E_b/N_0 = 10$ dB, devido ao aumento de L (a despeito na redução de P_S). Cabe notar, no entanto que maiores reduções provavelmente poderiam ser obtidas se o valor da estimativa final fosse obtido

através de uma média de estimativas parciais independentes (usando $N > 1$, portanto).

Na Fig. 2 mostra-se os resultados obtidos com espectro Doppler associado a um filtro Butterworth de primeira ordem e valores do produto BT entre 10^{-3} e 10^{-2} (B é a largura de faixa de 3 dB do filtro correspondente). Os outros parâmetros da geração desta figura foram fixados nos mesmos valores usados para se obter a Fig. 1

Em termos gerais, as características de variação de μ com o aumento da largura de faixa do espectro Doppler são semelhantes às observadas na Fig. 1. Uma comparação entre estas duas figuras indica que na Fig. 2 os valores de μ obtidos com E_b/N_0 de 20 dB apresentam uma redução mais significativa em relação aos obtidos com $E_b/N_0 = 10$ dB. Também se nota que os valores de μ correspondentes aos valores mais altos de largura de faixa ficam mais próximos dos valores de referência na Fig. 2 do que na Fig. 1.

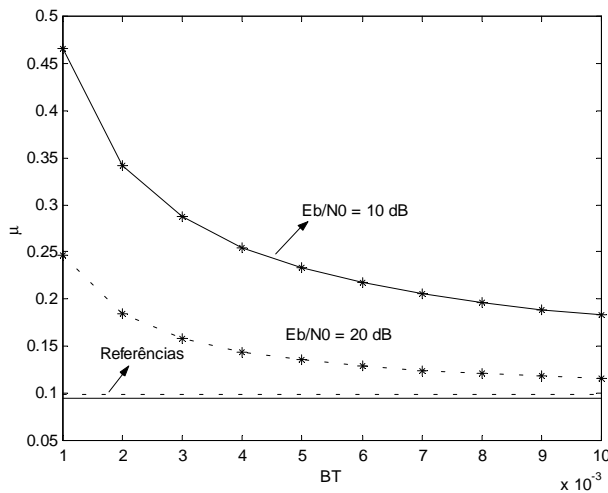


Fig. 2 – Valor RMS do Erro Relativo para uma Estimativa Parcial ($N=1$) com Espectro Butterworth. $L = 1230$ ($E_b/N_0 = 10$ dB) e 11070 ($E_b/N_0 = 20$ dB).

Essas diferenças entre as figuras 1 e 2 se devem principalmente ao fato de que os valores mais elevados de BT usados para obter a Fig. 2 são significativamente maiores que os usados para $f_D T$ na Fig. 1. Como conseqüência estão contemplados na Fig. 2 casos de canal com memória efetivamente menor do que na Fig. 1, justificando as diferenças entre essas duas figuras.

Na Fig. 3 se ilustra o comportamento do coeficiente de correlação $\rho(j)$ para um espectro de Jakes com $f_D T = 4,1 \times 10^{-3}$ e para um espectro Butterworth de um polo com $BT = 10^{-2}$. Apesar das diferenças na forma das curvas, vê-se claramente que com estes parâmetros o canal com espectro de Butterworth possui memória muito menor do que o de Jakes.

Considera-se a seguir o efeito da variação de N e L sobre a qualidade das estimativas de probabilidade de erro. Fixou-se inicialmente a razão E_b/N_0 em 10 dB e o valor do produto $N.L$ em 1200 , variando-se o valor de L entre 1 e 1200 .

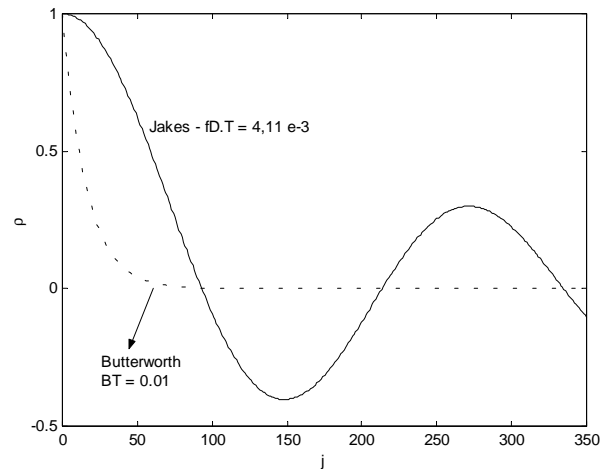


Fig. 3 – Variação do Coeficiente de Correlação entre Amostras do Canal para Espectros de Jakes e Butterworth.

A Fig. 4 mostra os resultados obtidos, através de curvas $\mu \times L$, para o espectro de Jakes e 3 valores do produto $f_D T$: $4,1 \times 10^{-4}$, $2,06 \times 10^{-3}$ e $4,12 \times 10^{-3}$. Estes valores correspondem aproximadamente a velocidades iguais a 12 , 60 e 120 km/h, respectivamente, para uma frequência de portadora de 900 MHz e taxa de símbolos de $24,3$ kbaud.

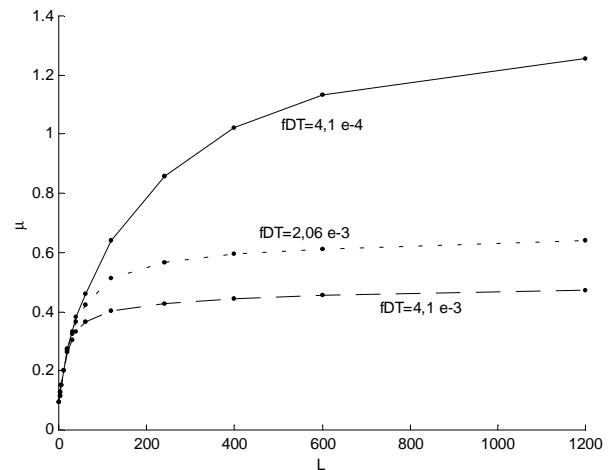


Fig. 4 – Espectro de Jakes. Produto $N.L = 1200$. $E_b/N_0 = 10$ dB.

Nota-se na Fig. 4 o aumento acentuado de μ com L , sendo o menor valor obtido com $L = 1$ nos três casos. Cabe notar que com $L = 1$ obtém-se o mesmo valor de μ , independentemente de $f_D T$, uma vez que o processo de estimação passa a depender apenas da estatística de primeira ordem do canal, a qual não se modifica com a variação de $f_D T$.

Também se nota na Fig. 4 que o aumento de μ com L é mais significativo quando o valor de $f_D T$ é menor, o que pode ser

entendido facilmente, considerando-se que o canal tem memória maior para menores valores de $f_D T$.

Na Fig. 5 são mostradas curvas de μ em função de L obtidas em condições semelhantes às da Fig. 3, sendo agora considerado o espectro Butterworth de 1 polo e os seguintes valores do produto BT : 10^{-3} , 5×10^{-3} e 10^{-2} . Observa-se novamente que o melhor valor de μ é obtido com $L=1$ nas 3 curvas (obtem-se de fato o mesmo valor, como explicado acima). Também se nota que o aumento de μ com L é maior para valores menores de BT , devido ao aumento na memória do canal.

Uma comparação entre as Figuras 4 e 5 mostra que esta última atinge valores menores de μ , para os mesmos valores de L e N . Isto se explica mais uma vez pelo fato de que na Fig. 5 estão considerados de fato canais com desvanecimento mais rápidos (com menor memória) do que na Fig.4.

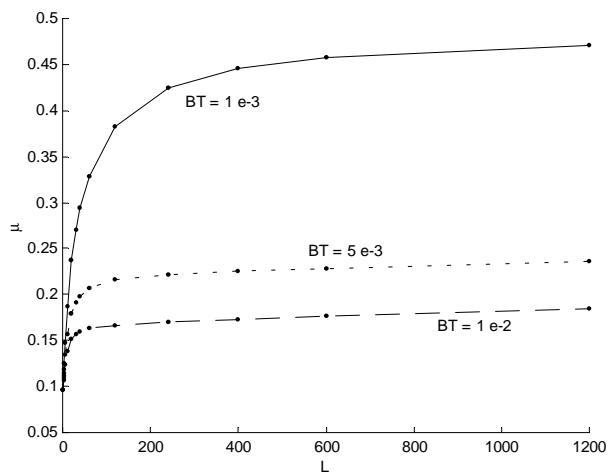


Fig. 5 –Espectro Buterworth de 1 Polo. Produto $N.L = 1200$. $E_b/N_0=10$ dB.

A Fig. 6 mostra curvas de $\mu \times L$ para o espectro de Butterworth de 1 polo, considerando-se $E_b/N_0=20$ dB, $N.L=12000$ e os mesmos valores do produto BT que foram usados para obter a Fig. 5. Nota-se na Fig. 6 o mesmo tipo de comportamento de μ com a variação de L ou de BT . Em particular percebe-se o significativo aumento de μ com L no caso em que $BT=10^{-3}$, que corresponde à maior memória do canal. Cabe aqui notar que o menor valor de μ obtido na Fig. 6 (com $L=1$ e qualquer valor de BT) foi 0,0955.

Os resultados das Figs 4, 5 e 6 evidenciam a necessidade de se trabalhar com uma média no conjunto de realizações independentes (aumentando-se N e reduzindo-se L), de forma a se poder garantir a confiabilidade das estimativas de probabilidade de erro. Esta necessidade é tanto maior quanto maior for a memória do canal. Sem querer polemizar em torno do conceito de “desvanecimento rápido”, cabe notar que situações assim classificadas podem de fato envolver um canal com memória de comprimento longo.

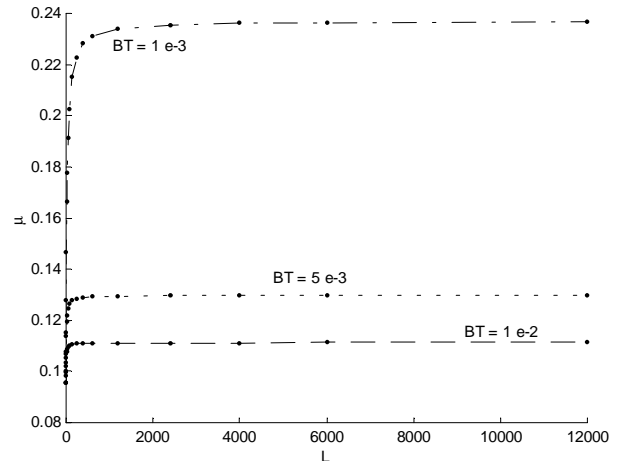


Fig. 6 –Espectro Butterworth de 1 Polo. Produto $N.L = 12000$. $E_b/N_0=20$ dB.

5. CONCLUSÕES

Os resultados deste trabalho evidenciam o impacto da memória do canal sobre a confiabilidade das estimativas de probabilidade de erro, indicando ser necessário uma escolha cuidadosa dos parâmetros da simulação para se atingir de forma eficiente os níveis de confiabilidade desejados.

O artigo oferece orientações gerais para esta escolha e mostra a importância de se avaliar a estimativa da probabilidade de erro através de uma “média de estimativas parciais independentes”, até mesmo em alguns casos usualmente considerados como de desvanecimento rápido.

Com base nos resultados deste trabalho pode-se afirmar que uma maneira eficiente de obter estimativas confiáveis é fixar o valor de L em função do processamento de recepção (nos exemplos numéricos aqui apresentados a melhor escolha seria $L=1$), e escolher o número de estimativas parciais independentes (N) suficientemente elevado a ponto de se obter o valor de μ desejado. As análises deste artigo fornecem as expressões para se aplicar este procedimento à transmissão FSK-M não coerente em canais com desvanecimento plano. A sua extensão para outros tipos de demoduladores será objeto de trabalhos futuros.

6. REFERÊNCIAS

- [1] Simon, M. K., Hinedi, S. M., Lindsey, W. C. “Digital Communications Techniques”, Prentice Hall, 1994.
- [2] Jakes, W. C. Jr, “Microwave Mobile Communications”, Wiley-Interscience, 1974.
- [3] Rappaport, T. S., “Wireless Communications”, Prentice Hall, 1996.