

PROJETO DE FILTROS COM CARACTERÍSTICAS OTIMIZADAS NO TEMPO E NA FASE

SIDNEI NOCETI FILHO, RUI SEARA E ROGÉRIO DOS SANTOS

LINSE: Circuitos e Processamento de Sinais
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Santa Catarina

Campus Universitário, 88040-900 - Florianópolis SC - Brasil
Tel: (0xx48) 331-9504, Fax: (0xx48) 331-9091, sidnei@linse.ufsc.br

RESUMO

Neste trabalho, são apresentadas expressões para a determinação da ordem e do tempo de atraso de filtros com características otimizadas no tempo e na fase. Também são discutidos alguns aparentes paradoxos relativos a esses filtros.

1. INTRODUÇÃO

Em certas aplicações de filtragem (Física Nuclear [1]; implementação de filtros Linkwitz-Riley, que apresentam um melhor desempenho para o uso em *crossovers* em sistemas de som [2]; filtros de linhas em transmissão de dados [3]), as características temporais (CT) e/ou de fase (CF) são consideradas mais relevantes do que as características de atenuação (CA). Como é sabido, melhores CT e CF implicam em piores CA e *vice-versa*. Assim, uma melhor CF está sempre associada a uma melhor CT. Entenda-se por melhor CF menor dispersão de fase, ou de atraso de fase ou de grupo, e por melhor CT, menor tempo de atraso e menor valor de *overshoot* na resposta ao degrau.

Quando se busca satisfazer a requisitos simultâneos de amplitude e fase, ou de amplitude e resposta temporal, é comum o uso de equalizadores de fase (filtros do tipo *all-pass*) [4,5] em cascata com os filtros da aplicação ou, então, o uso de uma solução que empregue exclusivamente filtros transicionais [6].

Existem aproximações que exibem muito boas CF e CT em detrimento de suas CA, como, por exemplo, os filtros Bessel (BS) [7], Gauss (GS) [8] e Multiplicidade-*n* (MN) (*Synchronously Tuned*) [8].

Em [7], é apresentada uma metodologia relativamente simples e eficiente para a determinação da ordem e da frequência de normalização de filtros BS (ver APÊNDICE). Neste trabalho, uma abordagem semelhante tem sido aplicada aos filtros GS e MN. Adicionalmente, são derivadas expressões para a determinação dos tempos de atraso, como também são discutidos alguns pontos aparentemente paradoxais desses filtros clássicos.

2. DEFINIÇÕES

2.1 Frequência de Normalização

As especificações de magnitude de um filtro passa-baixas (PB) são dadas por [9]: frequência limite da banda passante, ω_p ; frequência limite da banda de rejeição, ω_s ; máxima atenuação permitida na banda passante, A_{\max} ; mínima atenuação exigida na banda de rejeição, A_{\min} . Essas especificações são ilustradas na Fig. 1, para frequências normalizadas.

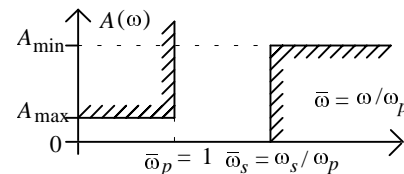


Figura 1. Gabarito de um filtro passa-baixas com frequências normalizadas.

Algumas funções de aproximação são definidas através de uma função característica $K(\bar{\omega})$ [9] e de um valor de A_{\max} desejado (por exemplo, as funções Chebyshev, Chebyshev Inverso, Butterworth, Legendre, Cauer). No entanto, em outros casos (como para as funções BS, GS e MN), é obtida inicialmente uma função $H(s')$ e, posteriormente, através da função $A(\omega') = 20 \log |H(s')|_{s=j\omega'}$, determina-se a frequência ω_N (ver Fig. 2), para a qual se obtém uma determinada atenuação máxima. Então, de forma a obter a desejada atenuação A_{\max} na frequência ω_p , duas desnormalizações devem ser efetuadas simultaneamente. Assim, multiplica-se a variável complexa s por ω_N , tal que, na frequência unitária, a atenuação seja A_{\max} e divide-se por ω_p , de modo a satisfazer o requisito de frequência de corte desejado. Portanto, a variável \bar{s} na equação normalizada deve ser substituída por $\bar{s} = s\omega_N/\omega_p$. Para uma função de primeira ordem $T(s) = 1/(s+1)$, tem-se $\omega_N = (10^{0,1A_{\max}} - 1)^{1/2}$.

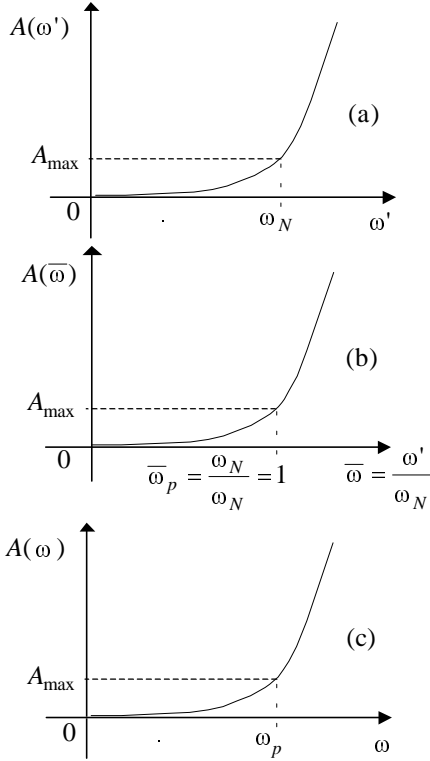


Figura 2. Obtenção de A_{\max} no limite da banda passante para os filtros Bessel, Gauss e Multiplicidade- n .

2.2 Tempo de Atraso

Para filtros com ordem $n \geq 2$, define-se, como tempo de atraso t_a , o tempo em que ocorre a máxima amplitude da resposta ao impulso, que também é o tempo correspondente ao ponto de inflexão da segunda derivada da resposta ao degrau, conforme mostrado na Fig. 3. Para uma função de primeira ordem, essa definição não se aplica, pois esse tempo resultaria em infinito. Para a função desnormalizada, o tempo é dado por $t_a = f(n)\omega_N / \omega_p$, onde $f(n)$ depende do tipo de filtro e da ordem.

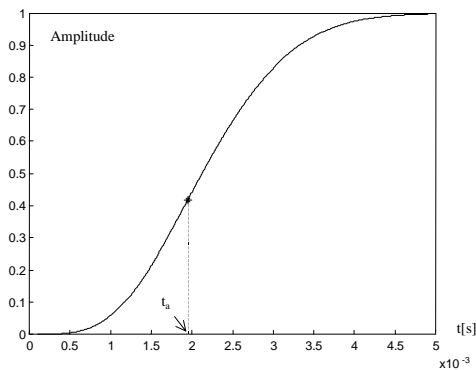


Figura 3. Tempo de atraso t_a .

2.3 Filtro Gauss

O filtro Gauss, dentre todos os filtros polinomiais clássicos com pólos complexos (Chebyshev, Legendre, Butterworth, Bessel e Gauss), é o que (em uma dada ordem e um dado A_{\max}) apresenta, para a resposta ao degrau, o menor *overshoot* e o menor tempo de atraso. É importante mencionar que a literatura corrente classifica os filtros Gauss como filtros que não apresentam *overshoot* para a resposta ao degrau [10]. No entanto, tal afirmação não se verifica para funções com ordens diferentes de 1.

É possível demonstrar que um filtro com fase linear apresenta resposta ao impulso perfeitamente simétrica [11]. Como a transformada de Fourier inversa de uma função gaussiana é também uma função gaussiana (e portanto simétrica), a função atenuação de um filtro Gauss ideal apresenta fase linear, sendo expressa por:

$$H(\omega') = e^{\omega'^2} \times e^{j\omega' t_0}. \quad (1)$$

Logo, a magnitude desta função ao quadrado é

$$|H(\omega')|^2 = e^{2\omega'^2}. \quad (2)$$

A partir da função magnitude elevada ao quadrado dada por (2), as funções realizáveis dos filtros Gauss são obtidas por expansão em série, como segue:

$$|H(\omega')|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!} (\omega')^{2i}. \quad (3)$$

Usando continuação analítica, pode-se obter uma aproximação de ordem n para $H(s')$ a partir da seguinte expressão:

$$H(s').H(-s') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-2)^i}{i!} (s')^{2i}. \quad (4)$$

Escolhendo-se as raízes s'_k de (4), situadas no semiplano lateral esquerdo (SPLE), tem-se:

$$H(s') = \prod_{k=1}^n (s' - s'_k) = s'^n + a_{n-1} s'^{n-1} + \dots + a_1 s' + a_0. \quad (5)$$

Para uma desejada atenuação A_{\max} , determina-se a frequência ω_N e, em seguida, calculam-se as novas raízes $\bar{s}_k = s'_k / \omega_N$. Dessa forma, é obtido um ganho $-A_{\max}$ na frequência unitária da função Gauss $T(\bar{s}) = c_0 / H(\bar{s})$, onde:

$$H(\bar{s}) = \prod_{k=1}^n (\bar{s} - \bar{s}_k) = \bar{s}^n + c_{n-1} \bar{s}^{n-1} + \dots + c_1 \bar{s} + c_0. \quad (6)$$

Propõe-se, neste trabalho, para o filtro Gauss, apresentar expressões analíticas aproximadas para a determinação da frequência ω_N , da ordem n e do tempo de atraso t_a .

2.4 Filtro Multiplicidade- n

Dentre todos os filtros passa-baixas polinomiais, o filtro com pólos reais Multiplicidade- n é o que apresenta o menor tempo de atraso da resposta temporal. Além disso, tal função não apresenta características oscilatórias, ou seja, é isento de *overshoot* em sua resposta ao degrau. Filtros com pólos reais não são normalmente mencionados nas literaturas que abordam Teoria de Aproximação, por apresentarem características de atenuação muito pobres, relativamente a todos os outros tipos de funções de aproximação com pólos complexos. Quando se deseja uma característica temporal adequada a certos requisitos impostos pela aplicação, é natural lançar mão da aproximação Gauss. Todavia, a opção por filtros com pólos reais não deve ser ignorada. No caso específico de pólos reais, naturalmente que, sob o ponto de vista de melhor característica temporal, a melhor opção seria um filtro de primeira ordem. Esse, por sua vez, é o caso limite de filtros com pólos reais de ordem n com um pólo dominante. No entanto, a sua característica de atenuação só iria atender a problemas muito particulares. Assim, considerando somente a atuação de pólos reais, a melhor característica de amplitude é satisfeita com um filtro com pólos reais coincidentes, ou seja, o filtro Multiplicidade- n . A função ganho de um filtro Multiplicidade- n é dada por:

$$T(s') = \frac{1}{H(s')} = \frac{1}{(s'+1)^n}. \quad (7)$$

Substituindo-se s' por $s' = \omega_N \bar{s}$ em (7), tem-se:

$$T(\bar{s}) = \frac{1}{H(\bar{s})} = \frac{1}{(\omega_N \bar{s} + 1)^n} = \frac{(1/\omega_N)^n}{[\bar{s} + (1/\omega_N)]^n}, \quad (8)$$

que apresenta n pólos coincidentes em $\bar{s}_k = -(1/\omega_N)$ para $k = 1, \dots, n$.

Propõe-se, para este trabalho, determinar uma expressão analítica para a obtenção da frequência ω_N para o filtro Multiplicidade- n , como também apresentar uma inequação que auxilie a determinação da ordem n e derivar uma expressão para o cálculo do tempo de atraso t_a .

3. PARADOXOS

Os filtros GS e BS se constituem em uma exceção no conjunto geral dos filtros clássicos com pólos complexos, pois ambos são aproximações de ordem n de funções que, no limite, apresentam fase linear. Isso faz com que, quanto maior a ordem, melhores serão as CT e CF (com exceção do tempo de resposta que obviamente aumenta com a ordem). Para as outras aproximações, tais como: Cauer, Chebyshev Modificado, Chebyshev, Legendre, Butterworth, e outras, quanto maior a ordem, pior serão as CT e CF.

Por outro lado, os filtros GS e BS apresentam um aparente paradoxo. As melhores CT estão sempre associadas a melhores CF. No entanto, para uma dada ordem e máxima atenuação (A_{\max}), os filtros GS (dentre os filtros polinomiais clássicos com pólos complexos) exibem uma melhor simetria da resposta ao impulso e, conseqüentemente, devem apresentar uma menor dispersão de fase. No entanto, os filtros BS (dentre os filtros polinomiais clássicos com pólos complexos) são conhecidos por exibirem menor dispersão de fase para uma mesma ordem n e atenuação A_{\max} . Portanto, como se justifica este aparente paradoxo? O que acontece é que a resposta ao impulso considera o completo espectro em frequência do filtro em questão. Logo, a dispersão de fase de um filtro GS considera a banda inteira de frequência. Os filtros BS, por sua vez, apresentam menor dispersão de fase considerando-se “somente a banda passante”. Logo, não se deve esperar uma melhor característica temporal desse último.

Um outro aparente paradoxo se verifica em relação à característica de atenuação de um filtro GS. Para uma dada ordem n , quando a frequência tende ao infinito, em geral as funções de magnitude tendem a apresentar uma inclinação assintótica de $-20n$ dB/década. No entanto, quando a ordem de um filtro Gauss tende para o infinito, a curva de magnitude tende a uma gaussiana e, portanto, a inclinação não tende para o infinito. Esse aparente paradoxo se explica quando se compara o valor dos coeficientes da função da equação (5). À medida que a ordem aumenta, os valores dos coeficientes de mais alto grau tornam-se irrelevantes em relação a outros coeficientes. Logo, não se pode dizer que, quando n tende para o infinito, a função da equação (5) tende para s'^n .

4. FREQUÊNCIA DE NORMALIZAÇÃO, ORDEM E TEMPO DE ATRASO DE FILTROS GAUSS

4.1 Cálculo da Ordem e de $\omega_{N(GS)}$ (Descrição do Método)

Com base nas especificações de magnitude de um filtro passa-baixas, considerando-se uma aproximação assintótica da magnitude da função de transferência desses filtros e restringindo-se a abrangência da faixa dos parâmetros de projeto, pode-se determinar A_{\min} pela seguinte expressão, válida para ordens entre 2 e 16:

$$A_{\min} \cong f(n, A_{\max}) + 20n \log \bar{\omega}_s, \quad (9)$$

onde:

$$\bar{\omega}_s = \omega_s / \omega_p. \quad (10)$$

A faixa de valores dos parâmetros utilizados para a obtenção das expressões do desenvolvimento em questão são as seguintes:

$$\bar{\omega}_s \geq 2$$

$$2 \leq n \leq 16$$

$$0,2 \leq A_{\max} \leq 3,0 \text{ dB}$$

$$A_{\min} \geq 8,5 \text{ dB}$$

$$n = 1 + \text{int} \left[\frac{K_2 + 20 \log \bar{\omega}_s - \left[(K_2 + 20 \log \bar{\omega}_s)^2 - 1,009(K_1 - A_{\min}) \right]^{\frac{1}{2}}}{0,504} \right] \quad (11)$$

$$K_1 = -0,009392A_{\max}^3 + 0,1093A_{\max}^2 - 0,02069A_{\max} + 7,4350 \quad (12)$$

$$K_2 = -10,9947 + 9,4768 \log A_{\max} + 0,03434A_{\max}. \quad (13)$$

Assim, a requerida ordem n , para a função de transferência do filtro, é obtida de forma aproximada através da expressão (11), onde $\text{int}[\cdot]$ representa a operação de extração da parte inteira.

A equação (6) representa a função de transferência do filtro normalizada. De forma a obter a desejada atenuação A_{\max} na frequência ω_p , multiplica-se a variável complexa s por $\omega_N \equiv \omega_{N(\text{GS})}$ e divide-se por ω_p . Portanto, na equação (6), a variável \bar{s} deve ser substituída por:

$$\bar{s} = \frac{s\omega_{N(\text{GS})}}{\omega_p} \quad (14)$$

Uma expressão aproximada (obtida de forma experimental) para a determinação de $\omega_{N(\text{GS})}$ é dada por:

$$\omega_{N(\text{GS})} = K_1' + K_2' \log(A_{\max}) + K_3' A_{\max} \quad (15)$$

$$K_1' = 0,2869 - 0,3107e^{-1,3068n} \quad (16)$$

$$K_2' = 0,2540 - 0,6307e^{-1,3468n} \quad (17)$$

$$K_3' = 0,05905 + 0,3459e^{-1,4168n}. \quad (18)$$

4.2 Restrições para o Uso do Método

A estratégia empregada neste trabalho para o desenvolvimento de uma metodologia analítica de projeto de filtros Gauss é fundamentada em uma aproximação assintótica da magnitude da função de transferência desses filtros. Essa aproximação limita a faixa de utilização dos parâmetros requeridos no projeto do filtro. Entretanto, essa restrição não chega a se constituir em uma séria limitação para a maior parte dos casos práticos.

A expressão (11) permite o cálculo aproximado da ordem de um filtro Gauss. Se observada em mais detalhes, constata-se a necessidade de satisfazer as seguintes restrições para a sua aplicação:

$$\left[(K_2 + 20 \log \bar{\omega}_s)^2 - 1,009(K_1 - A_{\min}) \right] \geq 0 \quad (19)$$

e

$$(K_2 + 20 \log \bar{\omega}_s) \geq \left[(K_2 + 20 \log \bar{\omega}_s)^2 - 1,009(K_1 - A_{\min}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

No entanto, pode-se constatar, através de um estudo exaustivo via simulação, que, para o conjunto de valores dos parâmetros utilizados, a restrição dada pela expressão (19) é suficiente para a determinação da correta ordem da função de transferência, quando obtida através da equação (11). A Fig. 4 apresenta um conjunto de curvas de A_{\min} versus $\bar{\omega}_s$, parametrizadas por A_{\max} , as quais podem servir para auxiliar o projetista de filtros Gauss. Nesta figura, a região à direita da curva do A_{\max} requerido e acima do patamar de $A_{\min} = 8,5 \text{ dB}$ representa a região de utilização, para a qual se pode utilizar a expressão aproximada para o cálculo da ordem.

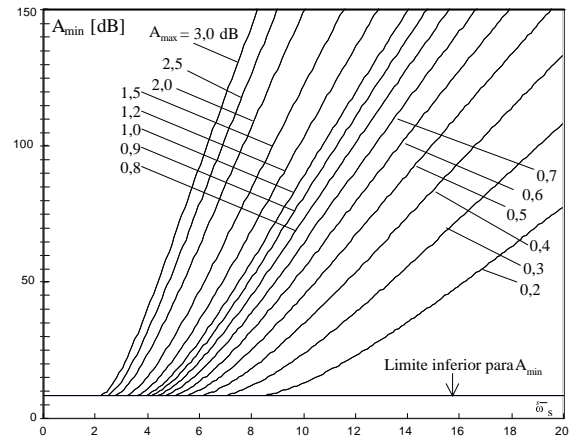


Figura 4. Limites de validade da equação (11).

4.3 Cálculo do Tempo de Atraso de um Filtro GS

O tempo de atraso proporcionado por um filtro Gauss, para ordens maiores do que 2, pode ser determinado com o auxílio da equação (21).

$$t_{a(\text{GS})} = \frac{f_{\text{GS}}(n)\omega_{N(\text{GS})}}{\omega_p}, \quad (21)$$

onde

$$f_{\text{GS}}(n) = -0,3497 + 4,4017 \log(n) + 0,1172n. \quad (22)$$

5. FREQUÊNCIA DE NORMALIZAÇÃO, ORDEM E TEMPO DE ATRASO DE FILTROS MULTIPLICIDADE- n

5.1 Cálculo da Ordem e de $\omega_{N(MN)}$

Neste caso, em particular, pode-se determinar analiticamente a frequência $\omega_{N(MN)}$ para uma desejada atenuação A_{\max} . A partir da equação (8), obtém-se:

$$\left|H(\bar{s})\right|_{\bar{s}=j\bar{\omega}} = \left|(j\bar{\omega}\omega_{N(MN)} + 1)\right|^n. \quad (23)$$

Como

$$A_{\max} = 20 \log \left|H(\bar{\omega})\right|_{\bar{\omega}=1} = 20 \log (\omega_{N(MN)}^2 + 1)^{n/2}, \quad (24)$$

isolando-se $\omega_{N(MN)}$ em (24), obtém-se:

$$\omega_{N(MN)} = \left(10^{\frac{A_{\max}}{10n}} - 1\right)^{1/2}. \quad (25)$$

A ordem n necessária para um filtro Multiplicidade- n pode ser determinada com o auxílio da equação (27). Sabendo-se que, na frequência ω_s , a atenuação deve ser maior ou igual a A_{\min} , isto é:

$$A_{\min} \leq A(\omega_s), \quad (26)$$

pode-se mostrar que

$$10^{\frac{A_{\min}}{10n}} - \bar{\omega}_s^2 \cdot 10^{\frac{A_{\max}}{10n}} \leq 1 - \bar{\omega}_s^2. \quad (27)$$

5.2 Cálculo do Tempo de Atraso de um Filtro MN

O tempo de atraso para ordens maiores do que 2 proporcionado por um filtro MN pode ser determinado com o auxílio da equação (28). Assim,

$$t_{a(MN)} = \frac{f_{MN}(n)\omega_{N(MN)}}{\omega_p}, \quad (28)$$

onde

$$f_{MN}(n) = n - 1. \quad (29)$$

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram apresentadas expressões, algumas exatas, outras aproximadas (obtidas experimentalmente), para o projeto de filtros usando funções passa-baixas desnormalizadas com características otimizadas na fase e no tempo, válidas para ordens entre 2 e 16. São também discutidos aparentes paradoxos relacionados a esses tipos de filtros. Tais filtros são importantes em diversas aplicações em Engenharia e são pouco discutidos na literatura. O filtro de pólos reais, por exemplo, normalmente não é abordado na literatura pertinente,

devido às suas pobres características de atenuação. Por outro lado, considerando-se suas características temporais e de fase, esses filtros parecem ser uma interessante alternativa para algumas aplicações e, portanto, não devem ser descartados *a priori*.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Hrisoho, *Front End Electronics for HEP, in Instrumentation in Elementary Particle Physics*, World Sc. Publ., 1992.
- [2] S. H. Linkwitz, "Active Crossover Networks for Noncoincident Drivers", *Journal of the Audio Engineering Society*, vol. 24, nº 1, Jan./Feb., 1976.
- [3] S. Haykin, *An Introduction to Analog and Digital Communications*, John Wiley & Sons, 1989, Singapore.
- [4] D. B. Carvalho, S. Noceti Filho e R. Seara, "Phase Equalizers Via Phase Delay", *IEE Electronics Letters*, vol. 34, nº 6, 509-511, 1998.
- [5] D. B. Carvalho, S. Noceti Filho e R. Seara, "Impulse Response Symmetry Error for Designing Phase Equalisers", *IEE Electronics Letters*, vol. 35, nº 13, 1052-1054, 1999.
- [6] A. S. Farias, S. Noceti Filho e R. Seara, "Algoritmo para Projeto de Filtros Transicionais – Considerações sobre Realizabilidade", *Anais do 13º Congresso Brasileiro de Automática*, 1398-1403, 2000.
- [7] R. Seara, S. Noceti Filho e C. E. Guedes, "Determinação Analítica de Funções de Transferência de Filtros de Bessel Baseada em Características de Filtros Seletores", *Anais do XIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, 161-165, 1995.
- [8] A. I. Zverev, *Handbook of Filter Synthesis*. 1. ed. Reading : John Wiley & Sons, 1967.
- [9] G. Daryanani, *Principles of Active Network Synthesis and Design*, John Wiley & Sons, 1976.
- [10] R. W. Daniels, *Approximation Methods for Electronic Filter Design*. 1. ed. Reading : Bell Telephone Laboratories, 1974.
- [11] H. J. Blinckhoff e A. I. Zverev, *Filtering in the Time Frequency Domains*. 1. ed. Reading : John Wiley & Sons, 1976.

APÊNDICE

TEMPO DE ATRASO PARA OS FILTROS BESSEL

O tempo de atraso proporcionado por um filtro Bessel, para ordens maiores do que 2, pode ser determinado com o auxílio da expressão (A1):

$$t_{a(BS)} = \frac{f_{BS}(n)\omega_{N(BS)}}{\omega_p}, \quad (A1)$$

onde

$$f_{BS}(n) = 0,9965 - 1,4703e^{-0,6611n} \quad (\text{A2})$$

$$\omega_{N(BS)} = b_0 + b_1 \log(n) + b_2 n \quad (\text{A3})$$

com

$$b_0 = 0,2507 + 0,1411 \log(A_{\max}) + 0,0822(A_{\max}) \quad (\text{A4})$$

$$b_1 = 0,0459A_{\max}^3 - 0,3468A_{\max}^2 + 1,1838A_{\max} + 0,2752 \quad (\text{A5})$$

$$b_2 = 0,04 + 0,0228 \log(A_{\max}) + 0,0187(A_{\max}). \quad (\text{A6})$$

As expressões que nos permitem o cálculo de $\omega_{N(BS)}$, apresentadas aqui, nos fornecem um valor mais preciso do que aquelas abordadas e discutidas em [7].