

ANÁLISE DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO DO FILTRO ADAPTATIVO LMS-FIR INTERPOLADO

ORLANDO J. TOBIAS E RUI SEARA

LINSE: Circuitos e Processamento de Sinais

Departamento de Engenharia Elétrica

Universidade Federal de Santa Catarina

Campus Universitário, 88040-900 – Florianópolis – SC – Brasil

Tel: (0xx48) 331-9504, Fax: (0xx48) 331-9091, orlando@linse.ufsc.br

RESUMO

Neste trabalho, é apresentado um procedimento de análise para o erro quadrático médio de uma estrutura adaptativa FIR interpolada, que utiliza o algoritmo LMS para adaptar os coeficientes da seção adaptativa. Essa estrutura possui características particulares, que devem ser consideradas no processo de análise. A primeira é que o filtro adaptativo é um filtro esparso. A segunda é a existência de um filtro interpolador em série com o filtro adaptativo. Isso faz com que suposições clássicas empregadas na análise do algoritmo LMS devam ser reconsideradas. Em particular, a teoria da independência não pode mais ser utilizada como uma ferramenta de análise. Além do mais, a esparsidade do filtro adaptativo determina que uma análise com restrições deva ser usada. Resultados experimentais mostram o desempenho da modelagem analítica proposta, quando comparados com os obtidos através de procedimentos clássicos de análise.

1. INTRODUÇÃO

Os filtros FIR interpolados (IFIR) destacam-se como uma alternativa mais eficiente (em termos de complexidade computacional) em relação aos FIR, preservando as principais propriedades e características destes últimos [1-3]. No contexto de filtragem adaptativa, a versão adaptativa dos filtros IFIR (AIFIR) também representam uma interessante alternativa aos filtros FIR adaptativos convencionais. Isso se evidencia, principalmente, em aplicações que requeiram um grande número de coeficientes, como é o caso em cancelamento de ecos [4,5]. Dessa forma, o uso de uma estrutura adaptativa IFIR permite uma considerável redução no número de operações aritméticas requeridas para efetuar a filtragem e a adaptação dos coeficientes do sistema. Como no caso fixo, os filtros adaptativos IFIR mantêm as principais características dos filtros adaptativos FIR clássicos. A maior parte dos trabalhos sobre estruturas AIFIR disponíveis na literatura realizam uma análise comparativa do desempenho das estruturas clássicas e interpoladas

[4,6]. Não dispomos na literatura de uma análise estatística aprofundada que permita estudar e prever o desempenho destas estruturas sob diferentes condições de implementação. As poucas análises das estruturas AIFIR encontradas estendem as suposições clássicas usadas no caso FIR-LMS ao caso interpolado [4,6] e, dessa forma, desconsideram dois fatos importantes. Em primeiro lugar, em um filtro AIFIR de N coeficientes, apenas N/L são adaptados (L representa o fator de interpolação); o resto dos coeficientes é mantido em zero. A análise clássica não leva em consideração esse fato para a derivação do modelo. Um outro ponto concerne ao uso da teoria da independência (TI) como hipótese simplificativa de análise [7-9]. Essa hipótese fornece muito bons resultados na análise do caso clássico. Entretanto, a presença do filtro interpolador cria correlações no sinal de entrada que não podem ser desconsideradas. Isso significa que a teoria da independência não pode mais ser adotada como hipótese simplificativa. Recentemente, em [10-12], foi mostrado que a TI não pode ser invocada, quando existem filtros na malha de adaptação.

Assim, neste artigo, novas hipóteses simplificativas são empregadas para derivar um modelo que descreva o comportamento do erro quadrático médio de uma estrutura AIFIR. Através de resultados de simulações, é mostrada a qualidade do novo modelo analítico proposto, quando comparada com o modelo obtido usando a análise clássica.

2. ANÁLISE PROPOSTA

2.1 Diagramas em Blocos

O diagrama em blocos de uma estrutura IFIR fixa é mostrado na Fig. 1 [1-3]. Esta estrutura de filtragem é composta pela cascata de duas seções FIR: um filtro FIR esparso com $(L-1)$ zeros entre cada duas amostras diferentes de zero e uma seção interpoladora, que é encarregada de recriar as amostras removidas (L denota o fator de interpolação). A Fig. 2 ilustra a versão adaptativa do filtro fixo da Fig. 1 [4].

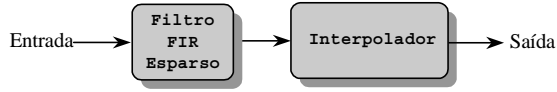


Figura 1. Diagrama em blocos de uma estrutura IFIR fixa.

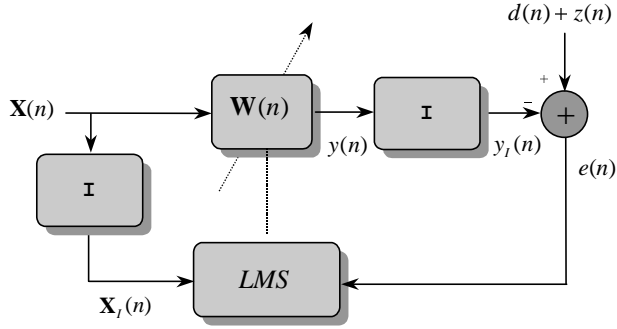


Figura 2. Diagrama em blocos da versão adaptativa do filtro IFIR da Fig. 1.

A notação utilizada na Fig. 2 é a seguinte: $\mathbf{W}(n) = [w_0(n), w_1(n), \dots, w_{N-1}(n)]^T$ representa o vetor de coeficientes do filtro esparso adaptativo; \mathbf{I} é a resposta ao impulso do interpolador, representado por um filtro FIR de M coeficientes: $[i_0, \dots, i_{M-1}]^T$; $\mathbf{X}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T$ é o vetor de entrada, com $x(n)$ assumido Gaussiano, média zero e variância σ_x^2 ; $\mathbf{X}_f(n) = [x_f(n), x_f(n-1), \dots, x_f(n-N+1)]^T$ representa o vetor de entrada filtrado, sendo cada componente dado por $x_f(n) = \sum_{j=0}^{M-1} i_j x(n-j)$. Assim, $\mathbf{X}_f(n)$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{X}_f(n) = \sum_{j=0}^{M-1} i_j \mathbf{X}(n-j). \quad (1)$$

Os sinais $d(n)$, $y(n)$, $y_1(n)$, e $e(n)$ são: o sinal desejado, a saída do filtro esparso, a saída do interpolador e o sinal de erro, respectivamente. O ruído de medição $z(n)$ é um sinal com média zero e não correlacionado com nenhum outro sinal no sistema, sendo σ_z^2 sua variância. Da Fig. 2, o sinal de erro é dado por:

$$e(n) = d(n) - y_1(n) + z(n), \quad (2)$$

onde

$$y_1(n) = \sum_{j=0}^{M-1} i_j y(n-j) = \sum_{j=0}^{M-1} i_j \mathbf{X}^T(n-j) \mathbf{W}(n-j). \quad (3)$$

Note que o sinal de erro na equação (2) depende dos valores presentes e passados (até o instante $M-1$) do

vetor de entrada e do vetor de coeficientes do filtro adaptativo. Esse último é decorrente de uma operação adicional de filtragem (via filtro interpolador) na malha de adaptação, representando uma importante característica que o diferencia do caso clássico.

2.2 Vetor de Coeficientes Ótimos

O vetor de coeficientes ótimos obtido no sentido do erro quadrático mínimo, satisfazendo a um conjunto de restrições lineares, é aquele que minimiza a seguinte função custo:

$$\text{minimize } E[e^2(n)] \quad (4)$$

$$\text{sujeito a } \mathbf{C}^T \mathbf{W} = \mathbf{f}, \quad (5)$$

onde \mathbf{C} é a matriz de restrições, \mathbf{f} o vetor representando a resposta às restrições e \mathbf{W} representa o vetor esparso de dimensão $N \times 1$. Considerando-se L_z o número de amostras iguais a zero no vetor de coeficientes esparso, a dimensão da matriz \mathbf{C} é $N \times L_z$, conseqüentemente a dimensão de \mathbf{f} deve ser $L_z \times 1$. Note que, através do uso de uma abordagem via restrições, podemos representar e tratar matematicamente a natureza esparso do vetor \mathbf{W} . Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange (λ), transformamos a função custo com restrições em uma função sem restrições, que é dada por:

$$J(\mathbf{W}) = E[e^2(n)] + 2\lambda^T (\mathbf{C}^T \mathbf{W} - \mathbf{f}) \\ = \sigma_d^2 - 2\mathbf{P}_I \mathbf{W} + \mathbf{W}^T \mathbf{R}_I \mathbf{W} + 2\lambda^T (\mathbf{C}^T \mathbf{W} - \mathbf{f}), \quad (6)$$

com $\mathbf{R}_I = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} i_k i_l E[\mathbf{X}(n-k) \mathbf{X}^T(n-l)]$ e

$\mathbf{P}_I = \sum_{k=0}^{M-1} i_k E[d(n) \mathbf{X}^T(n-k)]$. O fator 2, na primeira linha da equação (6), é incluído para simplificar cálculos posteriores. Pela determinação de λ , da mesma forma que em [13], e minimizando (6) em relação à \mathbf{W} , obtemos a seguinte expressão para o vetor ótimo de coeficientes com restrições:

$$\mathbf{W}_{opt} = \mathbf{R}_I^{-1} \mathbf{P}_I + \mathbf{R}_I^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{R}_I^{-1} \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{C}^T \mathbf{R}_I^{-1} \mathbf{P}_I). \quad (7)$$

É interessante observar que a equação (7) é composta por dois termos [14], representando:

- o vetor ótimo de coeficientes sem restrições (denotado por $\mathbf{R}_I^{-1} \mathbf{P}_I$), obtido usando o vetor \mathbf{W} completo (não esparso) e calculado da mesma forma que em [10,11];
- um fator de correção que modifica o termo não restrito para satisfazer as restrições impostas sobre o vetor de coeficientes adaptativo.

2.3 Valor Esperado do Vetor de Coeficientes Esparso

Como mencionado anteriormente, a presença do interpolador na malha de adaptação impõe que a versão filtrada do algoritmo LMS deva ser usada [10,11]. Também, em função da topologia particular deste tipo de filtro, as restrições devem ser incorporadas na equação de atualização dos coeficientes do filtro adaptativo [13]. Assim, podemos escrever a seguinte expressão:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{X}_f(n) - 2\mu\mathbf{C}\lambda(n). \quad (8)$$

Diferentemente do caso puramente restrito, descrito em [13], a equação (8) utiliza a versão filtrada do vetor de entrada, decorrente da utilização do algoritmo LMS filtrado. Os multiplicadores de Lagrange instantâneos, $\lambda(n)$, são obtidos de (8) junto à condição de que o novo vetor de coeficientes $\mathbf{W}(n+1)$ deve satisfazer a equação com as restrições $\mathbf{C}^T\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{f}$. Então, substituindo (1) em (8), e calculando $E[\mathbf{W}(n)]$ considerando as seguintes hipóteses:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}(n-k)\mathbf{X}^T(n-j)\mathbf{W}(n-j)] &\approx \\ E[\mathbf{X}(n-k)\mathbf{X}^T(n-j)]E[\mathbf{W}(n-j)] &\quad \forall j,k, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}(n-u)\mathbf{X}^T(n-v)\mathbf{V}(n-s)\mathbf{V}^T(n-t)] &\approx \\ E[\mathbf{X}(n-u)\mathbf{X}^T(n-v)]E[\mathbf{V}(n-s)\mathbf{V}^T(n-t)] &\quad \forall u,v,s,t, \end{aligned} \quad (10)$$

é possível se obter uma expressão recursiva para o cálculo do valor esperado do vetor de coeficientes. Assim,

$$\begin{aligned} E[\mathbf{W}(n+1)] = \mathbf{F} \left\{ E[\mathbf{W}(n)] + 2\mu \sum_{j=0}^{M-1} i_j \mathbf{P}_j \right. \\ \left. - 2\mu \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} i_j i_k \mathbf{R}_{j-k} E[\mathbf{W}(n-j)] \right\} + \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (11)$$

Na equação (11), $\mathbf{R}_{j-k} = E[\mathbf{X}(n-k)\mathbf{X}^T(n-j)]$ representa a matriz de autocorrelação dos vetores de entrada e $\mathbf{P}_j = E[d(n)\mathbf{X}(n-j)]$, o vetor de correlação cruzada entre o sinal desejado e o sinal de entrada. O termo envolvendo $E[z(n)]$ não aparece devido ao fato de que $\{z(n)\}$ é uma seqüência com média zero, independente de qualquer outro sinal no sistema. É importante notar que (9) e (10) não representam a hipótese de independência. Em (9) e (10), é assumido que as correlações entre os vetores de entrada, para instantes de tempo diferentes, são mais importantes do que as correlações entre os vetores de entrada e o vetor

de coeficientes adaptativo. Por outro lado, pela aplicação da teoria da independência em (9) e (10), obtém-se $E[\mathbf{X}(n-k)\mathbf{X}^T(n-j)] = 0$ para $j \neq k$ [9], resultando em uma bem clara diferença entre ambas as considerações.

Em (11), a matriz $\mathbf{F} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T$ é denominada matriz de projeção e o vetor $\mathbf{q} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{f}$ é um vetor de correção, garantindo que o novo vetor de coeficientes se mantém, dentro do espaço de coeficientes restrito, ao final de cada iteração [13].

2.4 Equação do Erro Quadrático Médio

A equação que descreve o erro quadrático médio (EQM) de um filtro adaptativo interpolado, é dada por:

$$J(n) = E[e^2(n)] + 2E[\lambda^T(n)(\mathbf{C}^T\mathbf{W}(n) - \mathbf{f})]. \quad (12)$$

Para facilitar os cálculos posteriores, é conveniente expressar $J(n)$ em função do vetor de erro nos coeficientes $(\mathbf{V}(n))$, o qual é definido por $\mathbf{V}(n) = \mathbf{W}(n) - \mathbf{W}_{opt}$. Então, utilizando a equação (2) e a expressão para $\lambda(n)$, podemos reescrever (12) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J(n) = E[d^2(n)] - 2 \sum_{j=0}^{M-1} i_j \mathbf{P}_j^T (E[\mathbf{V}(n-j)] + \mathbf{W}_{opt}) \\ + 2 \sum_{j=0}^{M-1} i_j \mathbf{P}_j^T \mathbf{C}(\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T (E[\mathbf{V}(n)] + \mathbf{W}_{opt}) \\ + \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} i_j i_k \text{tr} \left\{ \mathbf{R}_{k-j} (E[\mathbf{V}(n-k)\mathbf{W}_{opt}^T + \mathbf{W}_{opt} E[\mathbf{V}^T(n-j)] \right. \\ \left. + \mathbf{W}_{opt} \mathbf{W}_{opt}^T + E[\mathbf{V}(n-k)\mathbf{V}^T(n-j)]) \right\} \\ - 2 \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} i_j i_k \text{tr} \left\{ \mathbf{R}_{k-j} (E[\mathbf{V}(n)] \mathbf{W}_{opt}^T + \mathbf{W}_{opt} E[\mathbf{V}^T(n-j)] \right. \\ \left. + \mathbf{W}_{opt} \mathbf{W}_{opt}^T + E[\mathbf{V}(n)\mathbf{V}^T(n-j)]) \mathbf{C}(\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \right\} \\ - 2 \sum_{j=0}^{M-1} i_j \mathbf{P}_j^T \mathbf{q} + 2 \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} i_j i_k (E[\mathbf{V}^T(n-j)] + \mathbf{W}_{opt}^T) \mathbf{R}_{k-j} \mathbf{q} + \sigma_z^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Examinando-se a equação (13), vemos que a função custo depende de termos contendo \mathbf{W}_{opt} e $E[\mathbf{V}(n-\ell)]$, os quais foram determinados nas seções anteriores. Também, observamos que (13) depende de termos contendo momentos de segunda ordem do tipo $E[\mathbf{V}(n-s)\mathbf{V}^T(n-t)]$ para $s, t = 0, \dots, M-1$. Tais termos correspondem à matriz de covariância do vetor de erro nos coeficientes, que é obtida na próxima seção para se completar a descrição do EQM, objetivo deste trabalho.

2.5 Matriz de Covariância de $\mathbf{V}(n)$

Nesta seção, determinaremos a matriz de covariância do vetor de erro nos coeficientes. Para tanto, vamos definir a seguinte notação para representar essa matriz. Assim $\mathbf{K}_{s,t}(n) = E[\mathbf{V}(n-s)\mathbf{V}^T(n-t)]$. O procedimento para determinar $\mathbf{K}_{s,t}(n)$ é o seguinte: de (8), obtemos expressões para $\mathbf{V}(n-s)$ e $\mathbf{V}^T(n-t)$; em seguida, determinamos o produto externo $\mathbf{V}(n-s)\mathbf{V}^T(n-t)$ e tomamos o valor esperado da expressão resultante de acordo com as considerações (9) e (10) (aplicadas ao vetor $\mathbf{V}(n)$). Finalmente, com o auxílio de (7), é possível obter uma expressão mais simples, cancelando-se todos os termos contendo \mathbf{W}_{opt} e $E[\mathbf{V}(n-\ell)]$. Assim, após alguma manipulação algébrica, a equação recursiva para a matriz de covariância de $\mathbf{V}(n)$, é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{s,t}(n) = & \mathbf{F} \left\{ \mathbf{K}_{s,t}(n-1) - \mu \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} i_k i_l \mathbf{K}_{s,k+t}(n-1) \mathbf{R}_{l-k} \right. \\ & - \mu \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} i_k i_l \mathbf{R}_{k-l} \mathbf{K}_{k+s,t}(n-1) \\ & + \mu^2 \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{M-1} i_k i_l i_m i_r \left(\mathbf{R}_{k-l} \mathbf{K}_{k+s,m+t}(n-1) \mathbf{R}_{r-m} \right. \\ & \quad + \mathbf{R}_{m+t-l-s} \mathbf{K}_{m+t,k+s}(n-1) \mathbf{R}_{r+t-k-s} \\ & \quad \left. \left. + \mathbf{R}_{r+i-l-j} \text{tr} \left\{ \mathbf{K}_{m+i,k+j}(n-1) \mathbf{R}_{m+i-k-j} \right\} \right) \right\} \\ & + \mu^2 \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} i_k i_l \mathbf{R}_{l+t-s-k} E[z(n-t-1)z(n-s-1)] \mathbf{F}^T. \end{aligned} \quad (14)$$

Neste ponto, é importante observar que a equação (14) não depende apenas de termos $\mathbf{K}_{s,t}(n-1)$ como acontece no caso clássico, outros termos do tipo $\mathbf{K}_{s,\Delta+t}(n-1)$ também estão presentes. Isto determina que uma equação auxiliar deva ser introduzida para calcular esses termos. Então, para determinar a equação auxiliar, calculamos primeiramente o produto $\mathbf{V}(n-s)\mathbf{V}^T(n-\Delta-t)$, em seguida tomamos o valor esperado, considerando (9) e (10), e, com o auxílio de (7), após algumas manipulações algébricas, obtemos a seguinte expressão:

$$\mathbf{K}_{s,\Delta+t}(n) = \mathbf{F} \left(\mathbf{K}_{s,\Delta+t-1}(n-1) - \mu \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} i_m i_l \mathbf{R}_{m-l} \mathbf{K}_{m+s,\Delta+t-1}(n-1) \right). \quad (15)$$

É interessante observar o efeito da presença do filtro interpolador no modelo que descreve o comportamento teórico do filtro adaptativo interpolado. Em primeiro lugar, a equação recursiva que descreve o valor esperado dos coeficientes do filtro adaptativo, Eq. (11), é uma equação de diferenças de ordem superior. Em segundo, para descrever o comportamento teórico da matriz de covariância, é necessário um conjunto de equações, dado

por uma expressão principal e uma equação auxiliar (Eqs. (14) e (15), respectivamente). Tais equações também são de ordem superior. No caso clássico, as equações obtidas são equações de diferenças de primeira ordem [7-8]. Uma outra particularidade deste modelo é que as Eqs. (14) e (15) não podem ser diagonalizadas através de uma única transformação unitária. Isso representa uma grande dificuldade do ponto de vista matemático, quando se tenta determinar o limite de estabilidade para a taxa de convergência μ , segundo os métodos tradicionais [7,8].

Finalmente, a expressão que determina o comportamento teórico do EQM é obtida pela substituição das equações (7), (11), (14) e (15) em (13).

2.6 Estimação do Valor do EQM em Regime Permanente

A partir da equação (13), podemos obter uma estimação do valor de regime permanente para o EQM na condição de adaptação lenta (μ pequeno). Assim, assumindo-se a convergência do algoritmo adaptativo, as condições seguintes são satisfeitas: $E[\mathbf{V}(n-\ell)] \rightarrow 0$, $\mathbf{K}_{s,t}(n) \rightarrow 0$ e $\mathbf{K}_{s,\Delta+t}(n) \rightarrow 0$, para $n \rightarrow \infty$. Dessa forma, uma estimação para $J(\infty)$ pode ser obtida de (13), fazendo-se $E[\mathbf{V}(n-\ell)] = 0$, $\mathbf{K}_{s,t}(n) = 0$ e $\mathbf{K}_{s,\Delta+t}(n) = 0$, que, sob a condição previamente assumida (adaptação lenta), são aproximadamente verdadeiras. Na seção de resultados de simulações, é verificada tal condição.

3. DETERMINAÇÃO DE \mathbf{C} E \mathbf{f}

Nesta seção, vamos mostrar, através de um exemplo, como são construídos a matriz \mathbf{C} e o vetor \mathbf{f} . Então, para tal fim, vamos considerar um filtro adaptativo com 7 coeficientes e um fator de interpolação $L=2$. Essa configuração determina que 3 coeficientes do filtro adaptativo sejam mantidos em zero, implicando também em um número de 3 restrições. Assim, \mathbf{C} e \mathbf{f} são expressos da seguinte forma:

$$\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que, com a matriz \mathbf{C} , especificamos a posição dos coeficientes que não são adaptados e, através dos elementos do vetor \mathbf{f} , determinamos o valor para o qual esses coeficientes não adaptados são fixados (zero no nosso caso). Desse modo, o vetor de coeficientes adaptativo assume a seguinte forma: $\mathbf{W}(n) = [w_0(n), 0, w_2(n), 0, w_4(n), 0, w_6(n)]$. Em geral, para um fator de interpolação arbitrário L , vetores \mathbf{f} e \mathbf{q} são $\mathbf{f} = \mathbf{0}_{L \times 1}$ e $\mathbf{q} = \mathbf{0}_{N \times 1}$. Isso implica que os termos contendo tais fatores possam ser desconsiderados nas

expressões anteriores. No entanto, tais termos foram mantidos em todo o nosso desenvolvimento, com a finalidade de se obter um procedimento de análise o mais geral possível.

4. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, é avaliada a qualidade do modelo analítico proposto. Para tal, é utilizado um esquema de identificação de sistema no qual são aplicados à entrada sinais brancos e coloridos. As simulações também são realizadas para uma ampla faixa de valores de μ , em relação ao máximo valor para o qual o algoritmo ainda converge. Para todos os exemplos, foi utilizado $L = 2$ e $[0,5; 1; 0,5]$ como a resposta ao impulso do filtro interpolador. Em [1], é discutido e apresentado o projeto de interpoladores função do fator de interpolação selecionado. No entanto, tal projeto está fora dos objetivos deste trabalho, uma vez que a análise proposta não é dependente do tipo específico do interpolador usado. Os sinais de entrada têm variância unitária e o ruído de medição, $z(n)$, apresenta variância $\sigma_z^2 = 0,0001$.

Exemplo 1: Para este exemplo, o sinal de entrada é um ruído branco e a resposta ao impulso da planta é dada pela função $\text{sinc}(i)$ com $i = 0, \dots, 31$. O máximo valor para a taxa de aprendizagem, experimentalmente determinado, é $\mu_{\max} = 0,01$. Para as simulações, são utilizados os seguintes valores: $0,1\mu_{\max}$ e $0,5\mu_{\max}$. A Fig. 3 ilustra o comportamento do EQM para ambos os valores de μ utilizados. Através da Eq. (13), obtemos uma predição para o valor do EQM na convergência $J(\infty) = 0,2882$. Através de simulações, são obtidos 0,2919 e 0,3109 para $0,1\mu_{\max}$ e $0,5\mu_{\max}$, respectivamente. Note que, para valores elevados do parâmetro μ , o modelo proposto fornece uma predição menos precisa do que quando se utilizam valores menores para μ . Isso é atribuído ao fato de que, para valores elevados de taxa de aprendizagem, as considerações (9) e (10) tornam-se menos precisas.

Exemplo 2: Para este exemplo, é utilizado um sinal de entrada colorido. De forma a poder comparar os resultados, utilizamos a mesma planta do *Exemplo 1*. O sinal colorido é obtido a partir de um processo AR, de segunda ordem, dado pela expressão $x(n) = a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + u(n)$, com $u(n)$ representando um ruído branco com variância igual a 0,0322, dando origem a um sinal saída, do processo AR, com variância unitária. Os coeficientes do processo AR são: $a_1 = -1,5955$ e $a_2 = 0,95$; a dispersão dos autovalores para esses coeficientes é 10. Neste exemplo, o máximo valor para a taxa de aprendizagem é $\mu_{\max} = 0,005$

(experimentalmente determinada). Novamente, o modelo proposto é testado utilizando-se $0,1\mu_{\max}$ e $0,5\mu_{\max}$. A Fig. 4 ilustra os resultados de simulação. A partir de (13), obtemos $J(\infty) = 0,0061$ e, a partir de simulações, obtemos 0,0064 e 0,0062 para $0,1\mu_{\max}$ e $0,5\mu_{\max}$, respectivamente. Comparando-se as Figs. 3 e 4, vemos que, para a entrada colorida, o valor $J(\infty)$ é inferior ao correspondente à entrada ruído branco. Isso se deve à presença do filtro interpolador, que é um filtro passa-baixas (no nosso caso) com respeito a planta a ser identificada. Tal filtro atenua o conteúdo espectral do sinal $y_l(n)$ em sua banda de rejeição, prejudicando, assim, a identificação da planta (uma vez que, o filtro adaptativo não é adequadamente excitado nessa banda de frequências). Por outro lado, o sinal colorido de entrada se encontra dentro da banda passante do filtro interpolador. Desse modo, o sinal de excitação não é limitado pela banda passante do interpolador, produzindo um menor EQM residual no processo de adaptação. Um ponto muito importante a ser observado é que o modelo obtido, utilizando a hipótese de independência, é claramente inadequado, quando comparado com os resultados obtidos pelo novo modelo proposto.

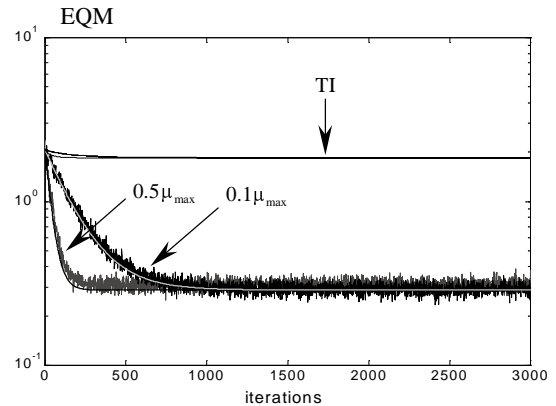


Figura 3. EQM para o Exemplo 1.

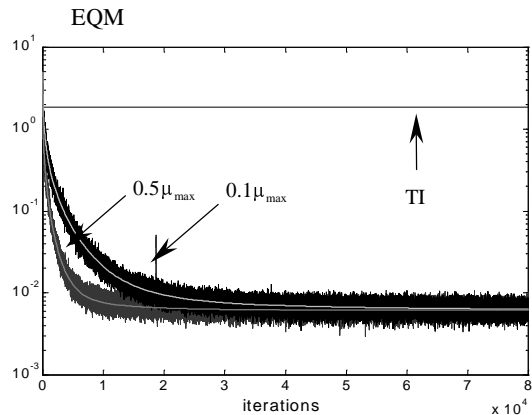


Figura 4. EQM para o Exemplo 2.

5. CONCLUSÕES

A estrutura particular de um filtro adaptativo interpolado FIR determina que a análise clássica, utilizando a hipótese de independência, não seja mais aplicável. Assim, neste trabalho, apresentamos um modelo teórico para o EQM, que é obtido no contexto de novas hipóteses de análise e através do uso de restrições lineares, permitindo um adequado tratamento matemático da esparsidade do filtro interpolado. Resultados experimentais mostram o desempenho da modelagem analítica proposta, quando comparados com os obtidos através de procedimentos clássicos de análise.

REFERÊNCIAS

- [1] Y. Neuvo, C. Y. Dong e S. K. Mitra, "Interpolated finite impulse response digital filters," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-32, pp. 563-570, June 1984.
- [2] T. Saramäki, Y. Neuvo e S. K. Mitra, "Design of computationally efficient interpolated FIR filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 35, pp. 70-88, Jan. 1988.
- [3] Y. Neuvo, G. Rajan e S. K. Mitra, "Design of narrow-band FIR bandpass digital filters with reduced arithmetic complexity," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 34, pp. 409-419, Apr. 1987.
- [4] A. Abousaada, T. Aboulnasr e W. Steenaart, "An echo tail canceller based on adaptive interpolated FIR Filtering," *IEEE Trans. Circuits Syst.-II*, vol. 39, pp. 409-416, July 1992.
- [5] A. P. Liavas e P. A. Regalia, "Acoustic echo cancellation: Do IIR models offer better modeling capabilities than their FIR counterparts?," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 46, no. 9, pp. 2499-2504, Sept. 1998.
- [6] R. Seara, J. C. M. Bermudez e E. Beck, "A new technique for the implementation of adaptive IFIR filters," *In Proc. ISSSE'92*, pp. 644-647, Paris, France, Sept. 1992.
- [7] B. Widrow e S. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, 1985.
- [8] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
- [9] J. E. Mazo, "On the independence theory of equalizer convergence," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 58, pp. 963-993, May 1979.
- [10] O. J. Tobias, J. C. M. Bermudez, N. Bershad e R. Seara, "Mean weight behavior of the Filtered-X LMS algorithm," *In Proc. ICASSP'98*, pp. 3545-3548, May 1998.
- [11] O. J. Tobias, J. C. M. Bermudez e N. Bershad, "Mean weight behavior of the Filtered-X LMS algorithm," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 48, no. 4, pp. 1061-1075, Apr. 2000.
- [12] O. J. Tobias e R. Seara, "Analytical model for the mean weights behavior of adaptive interpolated-FIR filters using the constrained filtered LMS algorithm," in *Proceedings of AS-SPCC*, pp. 272-277, Lake Louise, Alberta, Canadá, Oct. 2000.
- [13] O. L. Frost, III, "An algorithm for linearly constrained adaptive array processing," *Proc. IEEE*, vol. 60, no. 8, pp. 926-935, Aug. 1972.
- [14] L. S. Resende, J. T. Romano e M. G. Bellanger, "A fast least-squares algorithm for linearly constrained adaptive filtering," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, no. 5, pp. 1168-1174, May 1996.