

# EQUALIZADORES CEGOS PARTICIONADOS BASEADOS NAS TÉCNICAS DE BUSSGANG

Richard Demo Souza, Leonardo Silva Resende e Carlos Aurélio Faria da Rocha

Grupo de Pesquisa em Comunicações – Departamento de Engenharia Elétrica  
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC  
Caixa Postal 476, CEP: 88040-900, Florianópolis SC – Brasil  
Tel: 48-2336226, Fax: 48-3319280, aurelio@eel.ufsc.br

## SUMÁRIO

Apresentamos aqui resultados da implementação de equalizadores cegos baseados nas técnicas de *Bussgang* e em uma estrutura de filtragem particionada. São analisados, via simulação, os casos dos algoritmos de *Sato*, *Stop-and-Go* e de *Godard*. Simulações conhecidas da literatura são usadas como parâmetro para aferir a melhora de desempenho propiciada pela nova estrutura. Uma análise do efeito do particionamento na função custo de *Godard* também é introduzida. Por fim, equaciona-se o efeito do particionamento num caso de equalização de forçagem a zero com o objetivo de justificar matematicamente os resultados ilustrados pelas simulações.

## 1. INTRODUÇÃO

A atual expansão e crescente popularização dos sistemas de comunicação digital, como a televisão de alta definição (HDTV) e os sistemas rádio-móveis de última geração, torna necessária a busca de formas mais eficientes, e ainda assim confiáveis, de transmissão da informação até o usuário final. A correta recuperação do sinal no receptor só é possível graças, além de outros fatores, à presença de um sistema adaptativo, o qual chamamos de Equalizador, que é o responsável por grande parte da complexidade computacional do processo de desmodulação e detecção.

O processo de adaptação do equalizador tem sido alvo de inúmeras pesquisas no decorrer dos últimos anos. Porém, ainda se mostra um campo bastante aberto para novos resultados uma vez que os métodos chamados cegos ou autodidatas têm apresentado comportamento menos eficiente do que os métodos treinados tradicionais, no que diz respeito à taxa de convergência e à presença de mínimos locais. Entretanto, a pesquisa de novas formas de adaptação e de novas estruturas para equalização cega que ataquem essas deficiências é plenamente justificada uma vez que elas dispensam a existência de uma seqüência periódica de treinamento. Seqüência essa que vem a diminuir a capacidade global do sistema.

No trabalho em questão, nosso contribuição consiste em investigar os efeitos da aplicação de uma estrutura de filtragem particionada aos algoritmos de *Bussgang*. A estrutura particionada foi inicialmente proposta [1] como uma forma de diminuir o espalhamento dos autovalores da matriz de correlação do vetor de entrada do equalizador, visto que a taxa de

convergência dos algoritmos baseados nas técnicas do gradiente, como o *LMS*, é dominada por tal espalhamento.

O efeito deste desnível entre o maior e o menor dos autovalores pode ser visto na análise da curva de aprendizagem e do erro médio quadrático (*MSE*) em excesso. A constante de tempo associada com cada um dos  $n$  modos da curva de aprendizagem é dada por [2]:

$$\tau_n \approx \frac{1}{4\mu\lambda_n} \quad (1)$$

enquanto o *MSE* em excesso é:

$$MSE_{excesso} \approx \mu\xi_{\min} \sum_{n=0}^L \lambda_n \quad (2)$$

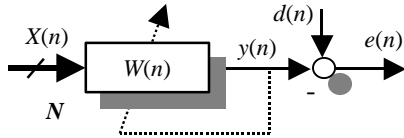
ou seja, uma vez que a taxa de convergência é limitada pelo menor dos autovalores, o *MSE* em excesso é dominado pelo maior deles.

Sendo assim, uma operação que seja capaz de diminuir este espalhamento é também capaz de produzir uma melhora significativa no desempenho do algoritmo. Uma destas operações é exatamente a que transforma a estrutura de filtragem transversal padrão em uma estrutura particionada. A idéia proposta [1] é particionar o sistema original de  $M=2^L$  coeficientes em dois sistemas independentes conectados em paralelo, cada um com  $2^{L-1}$  coeficientes e um espalhamento menor do que o do sistema original. Cada um dos sub-sistemas pode então ser particionado em dois novos sistemas até que existam  $2^L$  filtros de apenas um coeficiente.

Mais tarde, [3] propôs uma nova forma de visualizar a estrutura particionada baseada no Cancelador de Lóbulo Lateral Generalizado (*GSC*), onde o procedimento também foi estendido para filtros de qualquer número  $N$  de coeficientes, e não apenas para potências de dois. É com base nesta formulação que apresentamos a seguir a estrutura de filtragem particionada.

## 2. A ESTRUTURA DE FILTRAGEM PARTICIONADA [3]

Considere um sistema de filtragem transversal adaptativa tradicional como o da Figura 1, onde o vetor de  $N \times 1$  coeficientes do filtro  $W(n)=[w_0(n), \dots, w_{N-1}(n)]^t$  é adaptado com base no sinal de erro  $e(n) = d(n) - y(n)$ :



**Figura 1:** Esquema de Filtragem Tradicional

Desmembrando este filtro em suas partes simétrica e anti-simétrica temos:

$$W(n) = W_s(n) + W_a(n) \quad (3)$$

As condições de simetria e anti-simetria podem ser visualizadas como a imposição das restrições:

$$C_s^T W_s(n) = F_s \quad \text{e} \quad C_a^T W_a(n) = F_a \quad (4)$$

em um processo de otimização do valor médio quadrático do erro  $e(n)$ , onde para  $N$  ímpar,  $K = (N-1)/2$  e:

$$C_s = \begin{bmatrix} I_K \\ 0 \\ -J_K \end{bmatrix}_{N \times K}, \quad C_a = \begin{bmatrix} I_K & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ J_K & 0 \end{bmatrix}_{N \times K+1} \quad (5)$$

$$F_s = 0_K \quad F_a = 0_{K+1}$$

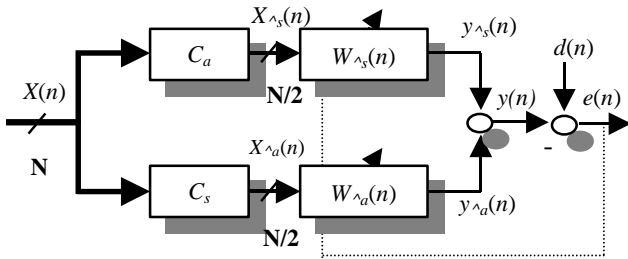
e para  $N$  par,  $K = N/2$  e:

$$C_s = \begin{bmatrix} I_K \\ -J_K \end{bmatrix}_{N \times K}, \quad C_a = \begin{bmatrix} I_K \\ J_K \end{bmatrix}_{N \times K} \quad (6)$$

$$F_s = F_a = 0_K$$

Entretanto, as restrições lineares podem ser implementadas em uma forma alternativa, conhecida como Cancelador de Lóbulo Lateral Generalizado (*GSC*).

Em suma, essa estrutura de realização indireta consiste em transformar o problema de minimização restrito à  $C^T W(n) = F$  em uma forma não restrita, aqui representada na Figura 2 a seguir.



**Figura 2:** Implementação *GSC* do Filtro Particionado

No que diz respeito ao processo de adaptação dos filtros, o algoritmo *LMS* é aplicado em uma forma normalizada, o que permite que exista um passo de adaptação diferente para cada um dos braços. Assim, o algoritmo de adaptação pode ser definido da seguinte forma para o filtro simétrico:

$$W_{\perp s}(n+1) = W_{\perp s}(n) + \frac{\mu}{r_s(n)} X_{\perp s} e(n) \quad (7)$$

e para o filtro anti-simétrico:

$$W_{\perp a}(n+1) = W_{\perp a}(n) + \frac{\mu}{r_a(n)} X_{\perp a} e(n) \quad (8)$$

onde

$$r_i(n) = \gamma r_i(n-1) + \frac{1}{n} (X_{\perp i}^2(n) - \gamma r_i(n-1)) \quad i = a, s \quad (9)$$

Os filtros simétrico e anti-simétrico podem ser continuamente particionados até que existam apenas  $N$  filtros de 1 coeficiente. Inclusive, no caso em que  $N = 2^M$ , e o processo de particionamento é estendido até sua plenitude, este se torna equivalente à uma filtragem adaptativa no domínio da transformada de *Hadamard*.

Maiores detalhes ficarão restritos às referências, [4], uma vez que o nosso principal objetivo é investigar a aplicação das técnicas de *Bussgang* na adaptação dos filtros  $W_{\perp a}(n)$  e  $W_{\perp s}(n)$ . Ou seja, aferir o desempenho dos algoritmos cegos tradicionalmente expostos na literatura quando utilizados para adaptar uma estrutura de filtragem particionada.

### 3. APLICAÇÃO AO ALGORITMO DE SATO

Em [5] foi mostrado que uma generalização do algoritmo de *Sato*, conhecida como algoritmos *BGR* (*Benveniste, Goursat, Rouget*), quando implementados com equalizadores de comprimento finito e, ou, onde o sinal de entrada é discreto, podem convergir para um conjunto de coeficientes que correspondam a um mínimo local. Naquele trabalho são apresentados conjuntos de canais onde a má convergência do algoritmo de *Sato* fica bem estabelecida.

Como exemplo, considere o seguinte canal caracterizado por um filtro média móvel:

$$\text{Canal 1: } h(n) = 0.5(\delta(n) + \delta(n-2) + \delta(n-3))$$

onde o equalizador apresentará 21 coeficientes e será inicializado com um valor não nulo apenas na sua amostra central. A constelação de entrada do canal é binária, *2-PAM*, e o passo de adaptação do algoritmo *LMS* é  $\mu = 5 \cdot 10^{-4}$ . A fim de determinar a abertura ou não do diagrama de olho, ou em outras palavras a convergência ou não para um mínimo global, definiremos a Interferência Entre Símbolos, (*IES*), percentual ( $P$ ):

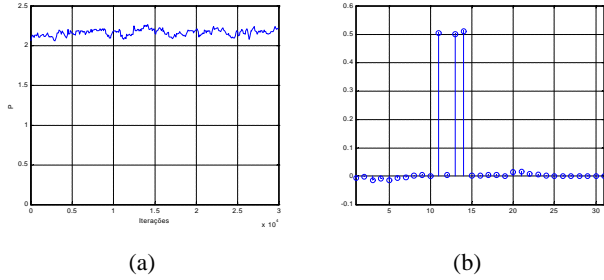
$$P = \frac{\sum_i |t_i|}{\max |t_i|} - 1 \quad (10)$$

onde

$$t_i = h_i \otimes w_i \quad (11)$$

sendo  $h_i$  e  $w_i$  a resposta ao impulso do canal e do equalizador, respectivamente. O sistema canal-equalizador apresenta olho aberto quando  $P < 1$  e olho fechado quando  $P \geq 1$ .

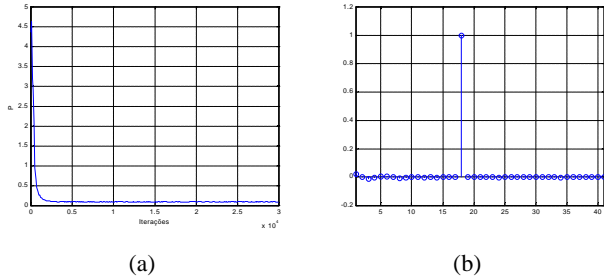
Nas figuras a seguir são apresentados os resultados de simulação utilizando-se o algoritmo de *Sato* e filtragem transversal tradicional.



**Figura 3:** (a) *IES* Percentual e (b) Resposta Canal-Equalizador, para o caso do Canal 1 e Filtragem Transversal Tradicional.

Fica claro pela análise da Figura 3 que o equalizador ficou preso em um mínimo local, mantendo um nível de *IES* Percentual de cerca de 200%, o que garante que o olho está completamente fechado, impossibilitando a realização de decisões corretas no receptor.

Vamos agora realizar a mesma simulação com filtragem particionada. No caso, o filtro  $W(n)$  será implementado com 32 coeficientes, ou seja,  $W_{\perp a}(n)$  e  $W_{\perp s}(n)$  terão cada um 16 coeficientes. O passo de adaptação a ser utilizado para adaptação do algoritmo *LMS* normalizado será  $\mu = 1.10^{-2}$ . Os resultados podem ser visualizados na figura a seguir.



**Figura 4:** (a) *IES* Percentual e (b) Resposta Canal-Equalizador, para o caso do Canal 1 e Filtragem Transversal Particionada.

Como pode-se ver, a *IES* Percentual foi reduzida para um valor em torno de 10%, o que significa que o olho está aberto no receptor indicando uma correta convergência do conjunto canal-equalizador.

#### 4. APLICAÇÃO AO ALGORITMO STOP-AND-GO

Em [6] o problema da convergência local para equalizadores implementados com filtros de comprimento finito é novamente abordado. Porém, desta feita, um dos exemplos de má convergência é apresentado através do algoritmo *Stop-and-Go*. Devido aos bons resultados obtidos nas simulações envolvendo o algoritmo de *Sato* resolvemos comparar a performance do

equalizador tradicional com o equalizador particionado para mais essa técnica de *Bussgang*.

Considere agora o seguinte canal:

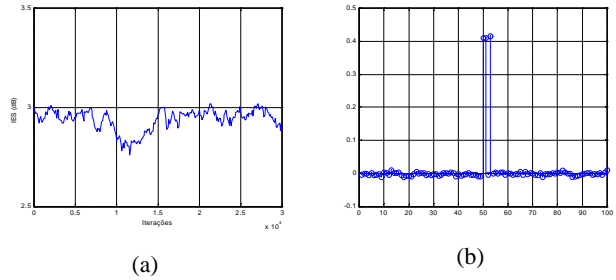
$$\text{Canal 2: } h(n) = \frac{13}{31}(\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-3))$$

onde a constelação de entrada é do tipo 4-*PAM*,  $\{-3, -1, 1, 3\}$ . Para o caso do filtro não particionado, o equalizador apresenta 100 coeficientes, sendo que o único coeficiente não nulo na inicialização é o central, passo de adaptação  $\mu = 2.10^{-4}$  e o parâmetro  $\mathbf{b}$  do algoritmo *Stop-and-Go* igual a 2.

Aqui, para medir a performance do equalizador, vamos definir a *IES* como:

$$IES = \frac{\sum_i t_i^2 - \max_i t_i^2}{\max_i t_i^2} \quad (12)$$

onde  $t_i$  é definido como em (11). Note que não foi seguido o mesmo parâmetro (10) utilizado na seção anterior com a finalidade de realizar exatamente a mesma simulação da referência em questão [6].



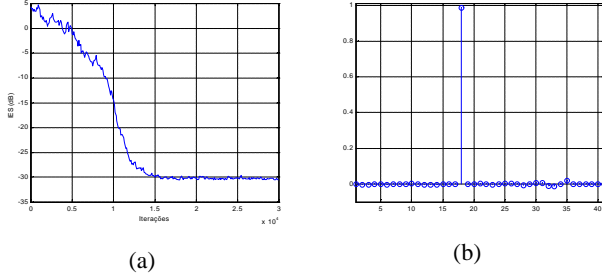
**Figura 5:** (a) *IES* Percentual e (b) Resposta Canal-Equalizador, para o caso do Canal 2 e Filtragem Transversal Tradicional.

Pela análise da Figura 5 podemos constatar que o equalizador ficou preso no mínimo local, logo não foi capaz de abrir o olho e permitir a realização de decisões corretas no receptor.

Vamos então simular o mesmo canal porém fazendo uso da filtragem particionada. O filtro  $W(n)$  será implementado com 32 coeficientes, ou seja,  $W_{\perp a}(n)$  e  $W_{\perp s}(n)$  terão cada um 16 coeficientes. O passo de adaptação do algoritmo *LMS* normalizado será  $\mu = 1.10^{-2}$ .

A partir da Figura 6 podemos constatar que com a aplicação da filtragem particionada o resultado obtido foi o da convergência global.

Um fato importante de se salientar é que para uma inicialização específica mostrada em [6] é possível obter a convergência para o equalizador não particionado. Porém, a performance é inferior à obtida com filtragem particionada mesmo mantendo-se o mesmo esquema de inicialização anterior.



**Figura 6:** (a) IES Percentual e (b) Resposta Canal-Equalizador, para o caso do Canal 2 e Filtragem Transversal Particionada.

## 5. EFEITO DO PARTICIONAMENTO EM FUNÇÕES CUSTO DE GODARD

Uma vez que os resultados das duas últimas seções têm sugerido que a implementação do equalizador de forma particionada resulta em melhorias na sua performance, vamos partir então para a análise do efeito do particionamento em funções custo do tipo de *Godard*.

Consideremos então, de acordo com [7], o seguinte canal AR:

$$\text{Canal 3: } x_n + \alpha x_{n-1} = a_n$$

onde  $\alpha = 0.6$ ,  $x_n$  corresponde aos dados de saída e  $a_n$  aos de entrada do canal, descrevendo uma constelação binária 2-PAM. O equalizador (CMA 2-2) apresenta apenas dois coeficientes [ $w_0$ ;  $w_1$ ], onde:

$$y_n = w_0 x_n + w_1 x_{n-1} \quad (13)$$

e

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4} E\{(|y_n|^2 - R_2)^2\} \quad (14)$$

é a função custo a ser minimizada.

Uma vez que  $x_{n-1}$  e  $a_n$  são variáveis independentes, e que  $E\{a_n\} = E\{x_{n-1}\} = 0$ , a função custo pode ser reescrita, após as devidas operações algébricas, da seguinte maneira:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4} (w_0^4 E\{a_n^4\} + 6w_0^2(w_1 - \mathbf{a}w_0)^2 E\{a_n^2\} E\{x_{n-1}^2\} + (w_1 - \mathbf{a}w_0)^4 E\{x_{n-1}^4\} - 2R_2 w_0^2 E\{a_n^2\} - 2R_2(w_1 - \mathbf{a}w_0)^2 E\{x_{n-1}^2\} + R_2) \quad (15)$$

onde:

$$R_2 = \frac{E\{|a_n|^4\}}{E\{|a_n|^2\}} \quad (16)$$

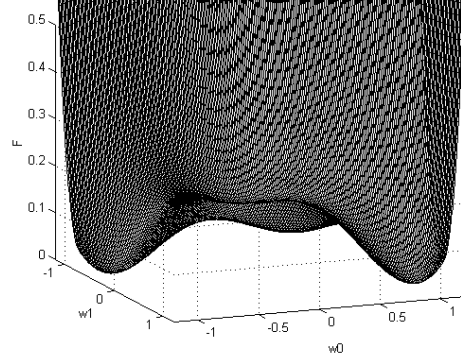
e os valores esperados [7]:

$$E\{|x_n|^2\} = \frac{E\{|a_n|^2\}}{1 - \mathbf{a}^2} \quad (17)$$

e

$$E\{x_n^4\} = \frac{E\{a_n^4\} - 3(E\{a_n^2\})^2}{1 - \mathbf{a}^4} + 3 \left( \frac{E\{a_n^2\}}{1 - \mathbf{a}^2} \right)^2 \quad (18)$$

Para o caso em questão temos que:  $R_2 = 1$ ,  $E\{|x_n|^2\} = 1.5625$  e  $E\{x_n^4\} = 5.0264$ . Na Figura 7 a seguir é possível visualizar a função custo em termos dos parâmetros [ $w_0$ ;  $w_1$ ] do equalizador.



**Figura 7:** Função Custo para o Canal 3, 2-PAM, CMA 2-2 e Filtragem Transversal Tradicional.

Para o caso de filtragem particionada:

$$y_n = [x_n \ x_{n-1}] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$y_n = x_n(w_0 + w_1) + x_{n-1}(w_0 - w_1)$$

operando uma mudança de variáveis tal que:

$$v_0 = (w_0 + w_1) \text{ e } v_1 = (w_0 - w_1) \quad (20)$$

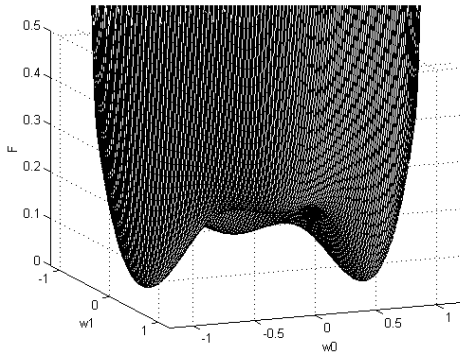
a função custo passa a ser então:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4} (v_0^4 E\{a_n^4\} + 6v_0^2(v_1 - \mathbf{a}v_0)^2 E\{a_n^2\} E\{x_{n-1}^2\} + (v_1 - \mathbf{a}v_0)^4 E\{x_{n-1}^4\} + - 2R_2 v_0^2 E\{a_n^2\} - 2R_2(v_1 - \mathbf{a}v_0)^2 E\{x_{n-1}^2\} + R_2) \quad (21)$$

Uma vez determinada a função custo para o caso particionado, apresentamo-la então na Figura 8 em função dos parâmetros [ $w_0$ ;  $w_1$ ] do equalizador.

Comparando-se as Figuras 7 e 8 podemos verificar que há uma pequena mudança na forma da função custo, porém não o suficiente para eliminar os mínimos locais.

Aqui é importante notar que uma função como (21) não é unimodal, ou seja, apresenta mínimos locais. Dessa forma a operação de particionamento não altera a forma da função objetivo de maneira a torná-la convexa, porém, permite que os mínimos locais sejam evitados ou ultrapassados no decorrer da adaptação, conforme verificou-se após exaustivas simulações. É esse aspecto que discutiremos a seguir.



**Figura 8:** Função Custo para o Canal 3, 2-PAM e CMA 2-2 e Filtragem Transversal Particionada.

## 6. O EQUALIZADOR DE FORÇAGEM A ZERO

Considere o caso do equalizador de forçagem a zero, particionado. Dessa forma podemos definir [8]:

$$t_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j w_{ak-j} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j w_{sk-j} \quad (22)$$

e

$$W_s = C_a W_{\perp s} \quad e \quad W_a = C_s W_{\perp a} \quad (23)$$

Assim:

$$y_n = t_0 a_n + \sum_{k \neq n} a_k t_{n-k} \quad (24)$$

e aplicando-se o objetivo desejado, ou seja,  $y_n = a_n$ , temos:

$$t_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j w_{ak-j} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j w_{sk-j} = \delta_k \quad (25)$$

ou na forma da sua transformada Z:

$$T(z) = H(z)W_a(z) + H(z)W_s(z) = 1 \quad (26)$$

onde isolando-se  $W_a(z)$  e  $W_s(z)$ :

$$W_a(z) + W_s(z) = \frac{1}{H(z)} \quad (27)$$

É importante ressaltar que o lado esquerdo da equação acima não pode ser simplesmente substituído por  $W(z) = W_a(z) + W_s(z)$ , uma vez que os equalizadores simétrico e anti-simétrico são adaptados independentemente pelas equações (7) e (8).

O que a equação (27) nos sugere é que a operação de particionamento aumenta o grau de liberdade do sistema na minimização da função objetivo, o que permitiria, em hipótese, evitar ou ultrapassar os mínimos locais conforme o ocorrido nas diversas simulações aqui apresentadas.

## 7. CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos algumas aplicações de filtros FIR particionados como equalizadores cegos utilizando os algoritmos de Sato e Stop-and-Go. Analisamos, também, o efeito do particionamento na função custo de Godard. Os resultados de diversas simulações demonstraram um desempenho superior da técnica proposta quanto a sua capacidade de evitar a convergência de algoritmos do tipo Bussgang para mínimos locais.

Porém, uma vez que não é adicionada nenhuma forma de diversidade no sistema não se pode esperar que o efeito da operação de particionamento seja o mesmo das técnicas espaçadas fracionalmente ou multicanal. Contudo, os resultados aqui obtidos são bastante instigantes, onde uma alteração estrutural do equalizador permite uma melhora de desempenho não apenas em termos de velocidade [3,4], mas também em qualidade de convergência.

## 8. REFERÊNCIAS

- [1] Ching P. C., Wan K. F. "A Unified Approach to Split Structure Adaptive Filtering", Proceedings of IEEE 1995 International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS'95, Vol. 3, May 1995.
- [2] Widrow B., Stearns S. D. "Adaptive Signal Processing", Prentice-Hall, 1985.
- [3] Resende L. S., Romano J. M. T., Bellanger M. G. "Adaptive Split Transversal Filtering: A Linearly-Constrained Approach", Proceedings of IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium, AS-SPCC 2000, October 2000.
- [4] Resende L. S., Romano J. M. T., Bellanger M. G. "Multi-Split Adaptive Filtering", Proceedings of 2001 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP '01.
- [5] Anderson B. D. O, Ding Z., Johnson Jr. C. R., Kennedy R. A. "Local Convergence of the Sato Blind Equalizer and Generalizations Under Practical Constraints", IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 39, No.1, January 1993.
- [6] Ding Z., Li Y., Liu K. J. R. "Length and Cost Dependent Local Minima of Unconstrained Blind Channel Equalizers", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 44, No.11, November 1996.
- [7] Anderson B. D. O, Ding Z., Johnson Jr. C. R., Kennedy R. A. "Ill-Convergence of Godard Blind Equalizers in Data Communication Systems", IEEE Transactions on Communications, Vol. 39, No.9, September 1991.
- [8] Proakis J. G., "Digital Communications", McGraw-Hill, Third Edition, 1995.