

ANÁLISE ESTATÍSTICA DO COMPORTAMENTO DO ALGORITMO LMK (LEAST MEAN KURTOSIS)

Pedro I. Hübscher e José C. M. Bermudez

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Engenharia Elétrica
Laboratório de Pesquisa em Processamento Digital de Sinais (LPDS)
Florianópolis - Santa Catarina - SC - Brasil
e-mail: pedro@eel.ufsc.br, bermudez@fastlane.com.br

Resumo - Este artigo apresenta uma análise estatística para o comportamento do algoritmo do gradiente estocástico LMK (Least Mean Kurtosis), que utiliza como função custo o *kurtosis* do sinal de erro. O algoritmo LMK apresenta desempenho melhor que o algoritmo LMS em diversas situações práticas de interesse, às custas de uma complexidade computacional ligeiramente maior. Equações recursivas determinísticas não-lineares são deduzidas para o comportamento médio dos coeficientes e para o erro médio quadrático, considerando-se sinais de referência gaussianos e brancos e aprendizado lento. O novo modelo analítico descreve o comportamento do algoritmo nos regimes transitório e permanente para qualquer ruído branco com distribuição de probabilidade simétrica e média zero. Exemplos numéricos de simulação Monte Carlo demonstram a validade do modelo analítico.

Palavras-chave: *filtros, algoritmos, filtragem adaptativa, gradiente estocástico.*

Abstract - This paper presents a statistical analysis of the LMK (Least Mean Kurtosis) adaptive algorithm behavior. The LMK algorithm is a stochastic gradient algorithm which uses the *kurtosis* of the error signal as cost function. The LMK algorithm outperforms the LMS algorithm in several applications of practical interest, at the cost of a little increase in computational complexity. Deterministic non-linear recursive equations are derived for the mean weight and mean square error behavior, for white Gaussian reference signals and slow learning. The new model describes the algorithm behavior during transient and in steady-state for any mean zero white noise with symmetric distribution. Monte Carlo simulation examples demonstrate the validity of the analytical model.

Keywords: *filters, algorithms, adaptive filtering, stochastic gradient.*

1. INTRODUÇÃO

A rápida evolução dos processadores digitais de sinal, que se tornaram mais compactos e economicamente viáveis, tornou possível a expansão das aplicações de sistemas adaptativos, que agora são encontrados em áreas como telecomunicações (satélites, telefonia móvel), radar e sonar, controle, processamento de sinais biológicos e também, mais recentemente, em sistemas de controle ativo de ruído acústico [1] e de vibrações [2].

A filtragem adaptativa ganhou impulso com o desenvolvimento do algoritmo LMS (Least Mean Square) [3] há aproximadamente três décadas. Esse algoritmo é utilizado hoje na maioria das aplicações práticas, principalmente devido a sua simplicidade. Existem na literatura modelos analíticos para o comportamento do algoritmo LMS em diferentes condições de operação, o que facilita o seu projeto e implementação. Já para algoritmos que empregam momentos de ordem elevada (maior que 2) do erro de estimação há apenas um limitado número de resultados analíticos, devido principalmente às dificuldades matemáticas inerentes à análise de momentos de ordem elevada.

O algoritmo LMK [4] é um algoritmo baseado no gradiente estocástico. Sua função custo é o *kurtosis* do sinal de erro [5], [6], e está relacionada com o cumulante de quarta ordem do erro. Cumulantes são aditivos em seus argumentos, isto é, o cumulante da soma de dois sinais é igual à soma dos cumulantes individuais. Além disso, todos os cumulantes de ordem maior que dois são iguais a zero para um processo gaussiano de média zero. Assim, a utilização de uma função custo baseada no cumulante de quarta ordem torna o algoritmo imune a ruídos com função de distribuição gaussiana. Como o ruído de medição pode ser considerado resultante da adição de diversas fontes independentes de

ruído em diversas aplicações práticas, sua distribuição tende a uma gaussiana de acordo com o Teorema do Limite Central. Essa propriedade leva naturalmente ao interesse por algoritmos baseados em momentos de ordem elevada [5].

Encontra-se na literatura especializada uma grande quantidade de trabalhos utilizando algoritmos adaptativos baseados na minimização de momentos de ordem elevada do erro de cancelamento. Aplicações importantes incluem a equalização autodidata [3] e a identificação de sistemas [8].

Trabalhos disponíveis na literatura mostram que a utilização do algoritmo LMK pode levar a vantagens, quando comparado ao LMS, às custas de um pequeno aumento de complexidade computacional [4]. Para filtros adaptativos de ordem N , o algoritmo LMK requer $2N + 5$ multiplicações e $N + 3$ adições por iteração, enquanto que o LMS requer $2N + 1$ multiplicações e $N + 1$ adições por iteração. Isso os torna praticamente equivalentes em complexidade para filtragens de ordem elevada. Resultados recentes [4], [7] mostram menores desajustes e maiores taxas de convergência quando da utilização do algoritmo LMK.

Apesar das vantagens discutidas acima, o uso do algoritmo LMK é ainda bastante limitado em aplicações em tempo real. Um dos motivos para essa reduzida aplicação é certamente a falta de modelos analíticos capazes de prever seu comportamento. Este artigo apresenta um modelo analítico para o comportamento do algoritmo LMK. Equações recursivas determinísticas são derivadas para o comportamento médio dos coeficientes e para o erro médio quadrático. O modelo proposto assume sinais de entrada gaussianos e brancos e é válido para ruído aditivo branco com qualquer distribuição simétrica de média zero. O novo modelo permite estudar os efeitos da inicialização e da relação sinal-ruído sobre o comportamento do algoritmo. Simulações Monte Carlo são apresentadas para ilustrar a precisão do modelo, tanto durante a convergência quanto em regime permanente.

2. COMPORTAMENTO MÉDIO DOS COEFICIENTES

A Fig. 1 mostra o diagrama de blocos do problema estudado. $W^0 = [w_0^0, w_1^0, \dots, w_{N-1}^0]^T$ é o vetor de N amostras da resposta ao impulso de um sistema linear a identificar. $W(n) = [w_0(n), w_1(n), \dots, w_{N-1}(n)]^T$ é o vetor de coeficientes do filtro adaptativo transversal FIR. $x(n)$ é estacionário, branco, gaussiano, de média zero e com variância σ_x^2 . $X(n) = [x_0(n), x_1(n), \dots, x_{N-1}(n)]^T$ é o vetor de observações do sinal de referência $x(n)$ e $R = E[X(n)X^T(n)] = \sigma_x^2 I$ é a matriz de autocorrelação de $X(n)$. $z(n)$ é um ruído estacionário, branco, de média

zero e variância σ_z^2 , não correlacionado com qualquer outro sinal, não necessariamente gaussiano mas com distribuição simétrica em relação à origem ($f_z(z) = f_z(-z)$). Assim, os momentos de ordem ímpar de $z(n)$ são nulos. $y(n)$ é a saída do filtro adaptativo e $e(n)$ é o sinal de erro cujo *kurto-sis* deve ser minimizado.

Na análise estatística aqui apresentada, assume-se que os vetores $X(n)$ e $X(n - p)$ são independentes para $p > 0$ e que os vetores de coeficientes $W(n)$ são independentes dos vetores de entrada $X(n - k)$, para $k \geq 0$. Essas hipóteses e as apresentadas anteriormente correspondem à utilização da conhecida teoria da independência [9], [3] frequentemente utilizada com sucesso em análises estatísticas de comportamento de algoritmos adaptativos estocásticos. Embora as hipóteses dessa teoria não correspondam à realidade, seu emprego em muitos casos retém informação suficiente sobre a estrutura do processo adaptativo e permite uma modelagem bastante precisa do comportamento do algoritmo. Esse é o caso do algoritmo LMK.

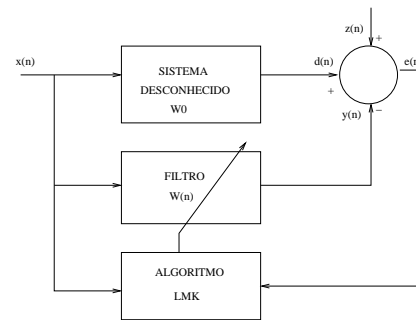


Fig. 1. Diagrama de Blocos.

A equação de atualização dos coeficientes para o algoritmo LMK é [4]:

$$W(n+1) = W(n) + 4\mu \{3E[e^2(n)]e(n) - e^3(n)\} X(n) \quad (1)$$

onde μ é a constante de adaptação. Definindo o vetor erro de coeficientes $V(n) = W(n) - W^0$ tem-se:

$$V(n+1) = V(n) + 4\mu \{3E[e^2(n)]e(n) - e^3(n)\} X(n) \quad (2)$$

Para a implementação do algoritmo (2), $E[e^2(n)]$ deve ser substituído por uma aproximação que possa ser calculada a partir dos sinais disponíveis a cada iteração. Uma aproximação possível é através da equação recursiva [4]

$$E[e^2(n)] = \beta E[e^2(n-1)] + e^2(n), \quad 0 < \beta < 1 \quad (3)$$

com $E[e^2(-1)] = 0$. Outra possibilidade é a utilização da solução de (3), a qual pode ser aproximada com bastante

precisão pelos seus três primeiros termos. Assim,

$$E[e^2(n)] = e^2(n) + \beta e^2(n-1) + \beta^2 e^2(n-2), \quad 0 < \beta < 1 \quad (4)$$

As implementações do algoritmo usando (3) ou (4) não apresentam variações significativas de comportamento. A análise estatística que segue é realizada, sem perda de generalidade, usando (4). Substituindo (4) em (2) tem-se:

$$V(n+1) = V(n) + 4\mu[2e^2(n) + 3\beta e^2(n-1) + 3\beta^2 e^2(n-2)]e(n)X(n) \quad (5)$$

Tomando o valor esperado de (5) obtém-se:

$$\begin{aligned} E[V(n+1)] &= E[V(n)] \\ &+ 4\mu\{2E[e^3(n)X(n)] + 3\beta E[e^2(n-1)e(n)X(n)] \\ &+ 3\beta^2 E[e^2(n-2)e(n)X(n)]\} \end{aligned} \quad (6)$$

Usando $e(n) = z(n) - X^T(n)V(n)$ e o fato de que os momentos ímpares de $z(n)$ são nulos, os valores esperados em (6) ficam:

$$\begin{aligned} E[e^3(n)X(n)] &= -3E[z^2(n)]E[X(n)X^T(n)V(n)] \\ &- E[(X^T(n)V(n))^3 X(n)] \\ E[e^2(n-1)e(n)X(n)] &= -E[z^2(n-1)]E[X(n)X^T(n)V(n)] \\ &- E[(X^T(n-1)V(n-1))^2 X^T(n)V(n)X(n)] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E[e^2(n-2)e(n)X(n)] &= -E[z^2(n-2)]E[X(n)X^T(n)V(n)] \\ &- E[(X^T(n-2)V(n-2))^2 X^T(n)V(n)X(n)] \end{aligned}$$

A determinação dos termos com momentos de $X(n)$ até ordem 2 não apresenta dificuldades. Quanto aos termos com momentos de ordem 3 em $V(n)$ e 4 em $X(n)$, será apresentado o cálculo de um caso. Os demais são obtidos usando a mesma metodologia. Assumindo $X(n)$ e $V(n)$ independentes, a i -ésima componente de $E[(X^T(n)V(n))^3 X(n)]$ condicionada em $V(n)$ é dada por (eliminando o índice n por simplicidade):

$$\begin{aligned} E[(X^T V)^3 x_i | V] &= E\left(\sum_{j=0}^{N-1} x_j v_j \sum_{k=0}^{N-1} x_k v_k \sum_{l=0}^{N-1} x_l v_l x_i | V\right) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} E[x_j x_k x_l x_i] v_j v_k v_l \end{aligned} \quad (8)$$

Como $x(n)$ é gaussiano de média zero, o teorema da fatoração dos momentos [10] permite escrever

$$\begin{aligned} E[(X^T V)^3 x_i | V] &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left(E[x_i x_j] E[x_k x_l] + E[x_i x_k] E[x_j x_l] \right. \\ &+ \left. E[x_i x_l] E[x_j x_k] \right) v_j v_k v_l \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} [r_{ij} r_{kl} + r_{ik} r_{jl} + r_{il} r_{jk}] v_j v_k v_l \end{aligned} \quad (9)$$

onde r_{ij} é elemento (i, j) de R . Assim, $r_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $r_{ij} = \sigma_x^2$ para $i = j$. Portanto, retirando o condicionamento em $V(n)$ tem-se:

$$\begin{aligned} E\{E[(X^T V)^3 x_i | V]\} &= E\left\{\sigma_x^2 v_i \left(\sum_{j=0}^{N-1} \sigma_x^2 v_j^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_x^2 v_k^2 + \sum_{l=0}^{N-1} \sigma_x^2 v_l^2 \right)\right\} \\ &= 3\sigma_x^4 E[V^T V v_i] \end{aligned} \quad (10)$$

Para $x(n)$ branco e N suficientemente grande, pode-se desprezar a correlação entre $V^T V$ e cada componente v_i . Então,

$$\begin{aligned} E[(X^T V)^3 x_i] &= 3\sigma_x^4 E[V^T V v_i] \approx 3\sigma_x^4 E[V^T V] E[v_i] \end{aligned} \quad (11)$$

Generalizando para $V(n)$ e reintroduzindo o índice n ,

$$E[(X^T(n)V(n))^3 X(n)] \approx 3\sigma_x^4 E[V^T(n)V(n)] E[V(n)] \quad (12)$$

Para os demais termos em (7) obtém-se:

$$\begin{aligned} E[(X^T(n-1)V(n-1))^2 X^T(n)V(n)X(n)] &\approx \sigma_x^4 E[V^T(n-1)V(n-1)] E[V(n)] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} E[(X^T(n-2)V(n-2))^2 X^T(n)V(n)X(n)] &\approx \sigma_x^4 E[V^T(n-2)V(n-2)] E[V(n)] \end{aligned} \quad (14)$$

Substituindo (12)-(14) e $E[X(n)X^T(n)V(n)] = \sigma_x^2 E[V(n)]$ em (6) e (7) e considerando $V(n-2) \approx V(n-1) \approx V(n)$ para adaptação lenta (μ pequeno), obtém-se uma expressão para o valor médio dos coeficientes para o algoritmo LMK:

$$\begin{aligned} E[V(n+1)] &= \{1 - 12\mu\sigma_x^2(2 + \beta + \beta^2) \\ &\cdot (\sigma_z^2 + \sigma_x^2 E[V^T(n)V(n)])\} E[V(n)] \end{aligned} \quad (15)$$

Note que a estabilidade de $E[V(n)]$ depende da inicialização $V^T(0)V(0)$, distância entre $W(0)$ e W^o .

3. MOMENTOS DE SEGUNDA ORDEM

Pré-multiplicando (2) por sua transposta, resulta:

$$\begin{aligned}
V^T(n+1)V(n+1) &= V^T(n)V(n) + 8\mu [2e^2(n) \\
&+ 3\beta e^2(n-1) + 3\beta^2 e^2(n-2)] e(n)X^T(n)V(n) \\
&+ 16\mu^2 [4e^6(n) + 12\beta e^2(n-1)e^4(n) \\
&+ 12\beta^2 e^2(n-2)e^4(n) + 9\beta^2 e^4(n-1)e^2(n) \\
&+ 18\beta^3 e^2(n-2)e^2(n-1)e^2(n) + 9\beta^4 e^4(n-2)e^2(n)] \\
&\cdot X^T(n)X(n) \tag{16}
\end{aligned}$$

No cálculo dos valores esperados em (16), são desprezados os termos $E[(X^T(n)V(n))^{2k} X^T(n)X(n)]$ para $k > 1$. Durante o transitório ($V(n)$ elevado), esses termos podem ser desprezados para μ suficientemente pequeno porque são flutuações multiplicadas por μ^2 . Em regime permanente, podem ser desprezados porque $E[V(n)] \approx 0$. Usando essas simplificações, tem-se de (16):

$$\begin{aligned}
E[V^T(n+1)V(n+1)] &= E[V^T(n)V(n)] \\
&- 8\mu \left(6E[z^2(n)(X^T(n)V(n))^2] + 2E[(X^T(n)V(n))^4] \right) \\
&- 24\mu\beta \left(E[z^2(n-1)(X^T(n)V(n))^2] \right) \\
&+ E[(X^T(n-1)V(n-1))^2(X^T(n)V(n))^2] \\
&- 24\mu\beta^2 \left(E[z^2(n-2)(X^T(n)V(n))^2] \right) \\
&+ E[(X^T(n-2)V(n-2))^2(X^T(n)V(n))^2] \\
&+ 16\mu^2 \left(60E[z^4(n)(X^T(n)V(n))^2 X^T(n)X(n)] \right. \\
&\left. + 4E[z^6(n)X^T(n)X(n)] \right) \\
&+ 16\mu^2 \left(12\beta E[z^2(n-1)6z^2(n)(X^T(n)V(n))^2 \right. \\
&\left. \cdot X^T(n)X(n) + z^2(n-1)z^4(n)X^T(n)X(n) \right. \\
&\left. + (X^T(n-1)V(n-1))^2 z^4(n)X^T(n)X(n) \right) \\
&+ 16\mu^2 \left(12\beta^2 E[z^2(n-2)6z^2(n)(X^T(n)V(n))^2 \right. \\
&\left. \cdot X^T(n)X(n) + z^2(n-2)z^4(n)X^T(n)X(n) \right. \\
&\left. + (X^T(n-2)V(n-2))^2 z^4(n)X^T(n)X(n) \right) \\
&+ 16\mu^2 \left(9\beta^2 E[z^2(n)6z^2(n-1)(X^T(n-1)V(n-1))^2 \right. \\
&\left. \cdot X^T(n)X(n) + z^2(n)z^4(n-1)X^T(n)X(n) \right. \\
&\left. + z^4(n-1)(X^T(n)V(n))^2 X^T(n)X(n) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ 16\mu^2 \left(9\beta^4 E[z^2(n)6z^2(n-2)(X^T(n-2)V(n-2))^2 \right. \\
&\left. \cdot X^T(n)X(n) + z^2(n)z^4(n-2)X^T(n)X(n) \right. \\
&\left. + z^4(n-2)(X^T(n)V(n))^2 X^T(n)X(n) \right) \\
&+ 16\mu^2 \left(18\beta^3 E[z^2(n-2)z^2(n-1)z^2(n)X^T(n)X(n) \right. \\
&\left. + z^2(n-2)z^2(n)(X^T(n-1)V(n-1))^2 X^T(n)X(n) \right. \\
&\left. + z^2(n-1)z^2(n)(X^T(n-2)V(n-2))^2 X^T(n)X(n) \right. \\
&\left. + z^2(n-2)z^2(n-1)(X^T(n)V(n))^2 X^T(n)X(n) \right) \tag{17}
\end{aligned}$$

A determinação das parcelas de (17) usa a mesma metodologia empregada anteriormente. Adicionalmente, considera-se que $E[(V^T(n)V(n))^2] \approx E[V^T(n)V(n)]E[V^T(n)V(n)]$. Essa aproximação considera que as flutuações de $V^T(n)V(n)$ podem ser desprezadas face ao seu valor médio, o que é perfeitamente aceitável para um modelo estatístico de segunda ordem. Assim, tem-se, após algum trabalho matemático,

$$E[(X^T(n)V(n))^2] = \sigma_x^2 E[V^T(n)V(n)] \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
E[(X^T(n)V(n))^4] &= 3\sigma_x^4 E[V^T(n)V(n)V^T(n)V(n)] \\
&\approx 3\sigma_x^4 E[V^T(n)V(n)]E[V^T(n)V(n)] \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[(X^T(n-i)V(n-i))^2(X^T(n)V(n))^2] \\
&= \sigma_x^4 E[V^T(n)V(n)V^T(n)V(n)] \\
&\approx \sigma_x^4 E[V^T(n)V(n)]E[V^T(n)V(n)], \\
&(V(n-i) \approx V(n), i = 1, 2) \tag{20}
\end{aligned}$$

$$E[X^T(n)X(n)] = N\sigma_x^2 \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
E[(X^T(n)V(n))^2 X^T(n)X(n)] \\
&= (N+2)\sigma_x^4 E[V^T(n)V(n)] \tag{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[(X^T(n-i)V(n-i))^2 X^T(n)X(n)] \\
&= E[(X^T(n-i)V(n-i))^2]E[X^T(n)X(n)] \\
&= \sigma_x^2 E[V^T(n-i)V(n-i)]N\sigma_x^2, i = 1, 2 \\
&\approx N\sigma_x^4 E[V^T(n)V(n)], V(n-i) \approx V(n) \tag{23}
\end{aligned}$$

Substituindo (18)-(23) em (17) tem-se:

$$\begin{aligned}
& E[V^T(n+1)V(n+1)] = E[V^T(n)V(n)] \\
& - 8\mu \left[6 + 3\beta + 3\beta^2 \right] \left[\sigma_z^2 \sigma_x^2 + \sigma_x^4 E[V^T(n)V(n)] \right] \\
& \cdot E[V^T(n)V(n)] \\
& + \left[(N+2)(60 + 9\beta^2 + 9\beta^4) + N(12\beta + 12\beta^2) \right] \\
& \cdot 16\mu^2 E[z^4(n)] \sigma_x^4 E[V^T(n)V(n)] \\
& + \left[6(N+2)(12\beta + 12\beta^2) + 6N(9\beta^2 + 9\beta^4) \right] \\
& + (3N+2)18\beta^3 \left[16\mu^2 \sigma_z^4 \sigma_x^4 E[V^T(n)V(n)] \right] \\
& + \left[\sigma_z^2 \sigma_x^2 E[z^4(n)](12\beta + 21\beta^2 + 9\beta^4) \right] \\
& + 4E[z^6(n)]N\sigma_x^2 + \sigma_z^6 N\sigma_x^2 18\beta^3 \left[16\mu^2 \right] \quad (24)
\end{aligned}$$

A Eq. (24) modela o comportamento dos momentos de segunda ordem do vetor erro de coeficientes (traço da matriz de correlação). Note que (24) é uma equação não-linear em $E[V^T(n)V(n)]$. Além disso, para uma mesma potência do ruído de medição σ_z^2 , o comportamento do algoritmo depende da sua função de distribuição. $E[z^4(n)]$ afeta a estabilidade, o regime permanente e a taxa de convergência. $E[z^6(n)]$ afeta o regime permanente.

A partir de (24) pode-se determinar o comportamento do erro médio quadrático (EMQ). Sabe-se que [3]

$$\xi_{LMK}(n) = \sigma_z^2 + tr[RK(n)] \quad (25)$$

onde $K(n) = E[V(n)V^T(n)]$ é a matriz de correlação de $V(n)$. Para $x(n)$ branco, $R = \sigma_x^2 I$ e (25) fica:

$$\xi_{LMK}(n) = \sigma_z^2 + \sigma_x^2 tr[K(n)] \quad (26)$$

O modelo proposto para o algoritmo LMK é então formado pelas expressões (15), (24) e (26).

4. EXEMPLOS

Esta seção apresenta resultados de simulações para validar o modelo desenvolvido. Considere o sistema da Fig. 1 com $W^0 = [0, 0482; 0, 1447; 0, 2411; 0, 3376; 0, 4340; 0, 4822; 0, 4340; 0, 3376; 0, 2411; 0, 1447; 0, 0482]$, $W^{0T}W^0 = 1$, $\sigma_x^2 = 1$ e $z(n)$ gaussiano com $\sigma_z^2 = 0, 1$. Para a identificação do sistema, foram empregados $\beta = 0, 5$ e dois valores de μ : $\mu_1 = 0, 001 = \mu_{max}/1, 4$ e $\mu_2 = 0, 00014 = \mu_{max}/10$ ($\mu_{max} \approx 0, 0014$, determinado por simulação). Os coeficientes foram inicializados em $W(0) = 0$. As Figs. 2 e 3 mostram o comportamento médio dos coeficientes $w_4(n)$ e $w_5(n)$ dado pela equação (15) e obtido por simulação (50

realizações). Os demais coeficientes possuem comportamento semelhante. As Figs. 4 e 5 mostram o comportamento do erro médio quadrático para $\mu = \mu_1$ e $\mu = \mu_2$ obtido por simulação (50 realizações) e pela equação (26). O EMQ em excesso ($\xi_{LMK}(\infty) - \sigma_z^2$) em regime permanente obtido de (26) foi de 0, 00181 (-17,1 dB) para μ_1 e de 0, 000247 (-26,1 dB) para μ_2 . Os resultados obtidos em simulação foram, respectivamente, 0, 00148 (-18,3 dB) e 0, 000210 (-26,8 dB), para uma média de 50 realizações.

Os resultados apresentados mostram que o modelo descreve com bastante precisão o comportamento do algoritmo, mesmo para μ próximo do limite de estabilidade, já que as hipóteses simplificadoras utilizadas na construção do modelo foram feitas para aprendizado lento. A utilização de um valor de μ pequeno, no entanto, é o caso de maior interesse para aplicações em tempo real, nas quais dipõem-se de apenas uma realização dos processos envolvidos. Por isso, deve-se usar μ pequeno para que o comportamento do algoritmo em uma realização não se afaste excessivamente do comportamento médio.

5. CONCLUSÕES

Este artigo apresenta uma análise estatística para o comportamento do algoritmo adaptativo LMK (Least Mean Kurtosis) para sinais de referência brancos e gaussianos e aprendizado lento. Equações recursivas não-lineares são derivadas para o momento de primeira ordem dos coeficientes e para o erro médio quadrático. Exemplos apresentados mostram que o modelo desenvolvido descreve com precisão o comportamento do algoritmo tanto no regime transitório como em regime permanente. O modelo é válido para ruído branco com qualquer distribuição de probabilidade simétrica e média zero.

6. REFERÊNCIAS

- [1] Morgan, D.R. and Kuo, S.M., *Active Noise Control Systems: Algorithms and DSP Implementations*, first edition, NY:John Wiley and Sons, 1996.
- [2] Woodard, S.E. and Nagchaudhuri, A., "Application of Least Mean Square Algorithms to Spacecraft Vibration Compensation", *The Journal of the Astronautical Sciences*, v. 48, n.1, p.83-90, jan-mar/1998.
- [3] Haykin, S., *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, NJ, third edition, 1996.

- [4] Tanrikulu, O. and Constantinides, A.G., "Least Mean Kurtosis: A Novel Higher-Order Statistics Based Adaptive Filtering Algorithm", *Electronic Letters*, 30(3): 189-190, feb/1994.
- [5] Nikias, C.L. and Petropolu, A.P., *Higher-Order Spectra: a Nonlinear Signal Processing Framework*, Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall,1993
- [6] Constantinides, A.G. and Pazaitis, D.I., "A Novel Kurtosis Driven Variable Step-Case Adaptive Algorithm", *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 47, n.3, mar/1999.
- [7] Tanrikulu, O., *Adaptive Signalling Processing Algorithms with Accelerated Convergence and Noise Immunity*, Ph. D. Thesis, Department of Electrical Engineering, Imperial College, London, 1995.
- [8] Douglas, S.C. and Meng, E.T.H.Y., "Stochastic Gradient Adaptation Under General Error Criterion", *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(6): pag. 1335-1351, jun/1994.
- [9] Mazo, J.E., "On The Independence Theory of Equalizer Convergence", *The Bell-System Technical Journal*, vol. 58, n. 5, pag. 963-993, may-jun/1979.
- [10] Papoulis, A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 3. ed., McGraw-Hill, 1991.

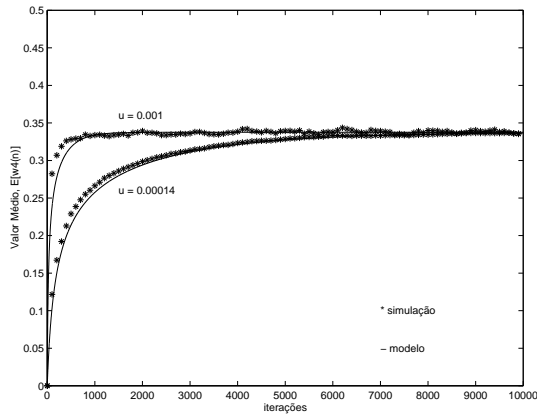


Fig. 2. $E[w_4(n)]$ (modelo e simulação).

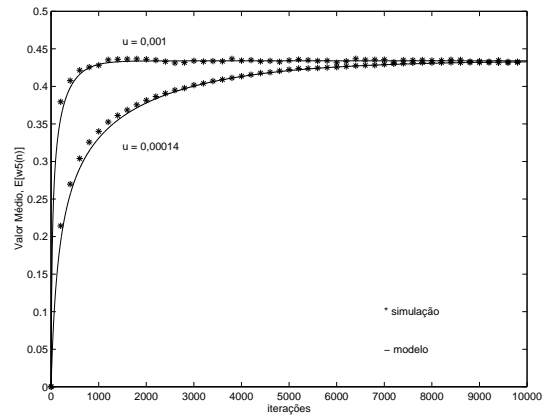


Fig. 3. $E[w_5(n)]$ (modelo e simulação).

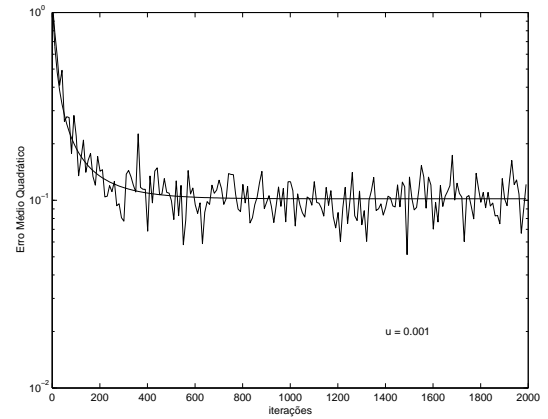


Fig. 4. EMQ, $\mu = 0,001$ (modelo e simulação).

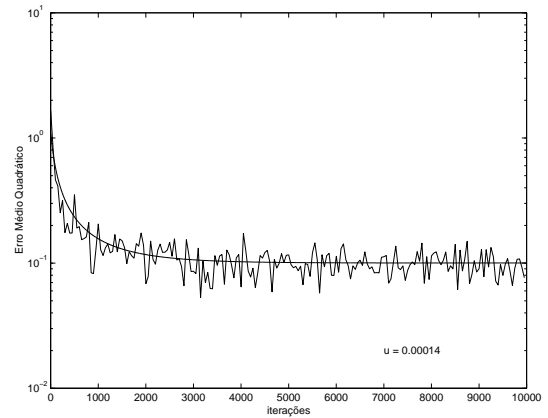


Fig. 5. EMQ, $\mu = 0,00014$ (modelo e simulação).