

ANÁLISE DO ALGORITMO FXLMS COM UM SISTEMA WIENER-HAMMERSTEIN NO CAMINHO SECUNDÁRIO: UMA APLICAÇÃO EM CONTROLE ATIVO DE RUÍDO

Márcio H. Costa¹, José C. M. Bermudez² e Neil J. Bershad³

¹Grupo de Engenharia Biomédica, Escola de Engenharia e Arquitetura, Universidade Católica de Pelotas, Pelotas-RS, Brazil*

²Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, Brazil

³Department of Electrical and Computer Engineering, University of California, Irvine, CA, USA

E-mails: costa@atlas.ucpel.tche.br, bermudez@fastlane.com.br, bershad@ece.uci.edu

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre o comportamento do algoritmo FXLMS quando o caminho secundário pode ser modelado por um sistema Wiener-Hammerstein. Essa configuração é de especial interesse em aplicações de controle ativo de ruído acústico e vibrações. A característica não-linear é representada pela função erro escalada e modela as distorções introduzidas pelos transdutores e amplificadores. Recursões não-lineares determinísticas são derivadas para o comportamento médio dos coeficientes e para o erro médio quadrático, em regimes transitório e permanente, supondo-se sinais gaussianos e adaptação lenta. Os resultados obtidos mostram que mesmo pequenas não-linearidades podem ter um impacto significativo no desempenho do sistema adaptativo. Simulações Monte Carlo corroboram a validade dos resultados.

ABSTRACT

This paper presents a statistical analysis of the FXLMS algorithm when the secondary-path can be modelled by a Wiener-Hammerstein system. This approach is of special interest in active noise and vibration control applications. The nonlinearity is modelled by a scaled error function that can represent the saturation behavior of the transducers and amplifiers. Deterministic nonlinear recursions are derived for the mean weight and mean square error behavior for transient and steady-state conditions assuming gaussian inputs and slow adaptation. The results obtained show that even little nonlinear effects may have a significant impact on the adaptive system behavior. Monte Carlo simulations are presented which show excellent agreement between the behavior predicted by the theoretical models and the actual algorithm behavior.

1. INTRODUÇÃO

A técnica de controle ativo de ruído acústico e vibrações (*active noise control* - ANC) tem despertado constante interesse na comunidade de controle e processamento de sinais nos últimos anos, em especial na área de filtragem adaptativa [1].

O conceito de controle ativo de ruído foi introduzido por Paul Lueg em 1936 [2] e consiste basicamente no cancelamento das ondas de pressão sonora ou de vibração em uma determinada

região espacial, através da criação de um campo artificial de mesma intensidade e fase inversa. Dessa sobreposição de influências decorre a diminuição ou o cancelamento dos níveis sonoros. Essa solução é praticamente interessante para frequências abaixo de 1kHz, onde soluções passivas podem ser volumosas e possuir peso considerável.

A implementação de sistemas ANC tem aumentado consideravelmente em decorrência dos avanços dos modernos processadores digitais de sinais, permitindo assim, a utilização de técnicas de controle cada vez mais sofisticadas.

Filtros adaptativos apresentam-se como uma alternativa às técnicas de controle convencional. Em particular, o algoritmo *Least Mean Square* (LMS) e suas variantes têm sido amplamente utilizados neste tipo de aplicação [1]. Essa popularidade advém de sua capacidade intrínseca de otimização de desempenho, mesmo em sistemas que não são completamente conhecidos ou, ainda, variantes no tempo [3,4].

O algoritmo LMS filtrado (FXLMS), o mais utilizado em ANC, é uma modificação do LMS onde o sinal de referência é filtrado com o objetivo de compensar os atrasos inerentes ao laço eletroacústico de adaptação (Fig.1). Este procedimento gera correlações nos sinais que complicam sobremaneira a análise do comportamento do algoritmo. Essas correlações invalidam a utilização da teoria da independência, frequentemente empregada para simplificar a análise. Recentemente [5] apresentou um modelo para o algoritmo FXLMS que leva em consideração essas correlações.

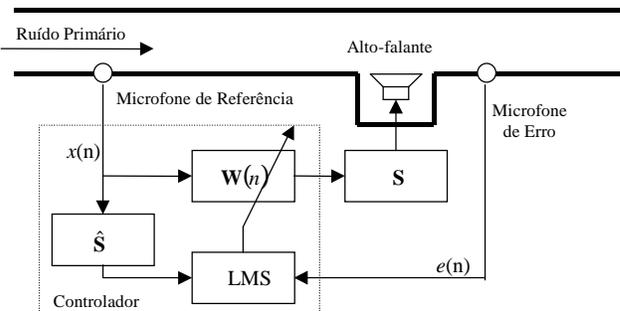


Figura 1. Sistema de controle ativo de ruído acústico em um duto baseado no algoritmo FXLMS.

* Este trabalho foi financiado em parte pela CAPES (PICDT 0129/97-9) e CNPq (352084/92-8).

Sistemas reais de controle ativo de ruído têm sido analisados teoricamente como problemas puramente lineares [1]. Entretanto, sabe-se que os transdutores (acústicos e de vibração) utilizados em ANC caracterizam-se por possuírem comportamento não-linear [6]. Esse problema geralmente é minimizado limitando-se as excursões do sinal relativamente à capacidade dos atuadores [7-9]. Todavia, por aspectos econômicos, é de grande interesse que as especificações do sistema não sejam desnecessariamente superdimensionadas.

Embora os sistemas monocanais tenham obtido relativo sucesso, diversas aplicações caracterizam-se por um complexo campo acústico. Nessas situações, ou quando o controle global é almejado, são utilizados algoritmos multicanais [10]. Basicamente, esses sistemas utilizam múltiplas fontes secundárias para controlar o ruído simultaneamente em vários sensores de erro posicionados em diferentes regiões.

Em [11] foi apresentada a análise teórica do algoritmo FXLMS, onde uma função não-linear modela a influência do transdutor (alto-falante na Fig. 1) situado após a porção linear do caminho acústico secundário (\mathbf{S} na Fig. 1). Essa representação despreza os atrasos impostos pelos dispositivos eletrônicos de captação do sinal de erro, assim como pelo caminho de propagação do sinal acústico (vibracional) no meio. A modelagem do caminho acústico secundário através de um sistema Wiener-Hammerstein [12] permite a incorporação dessas características ao modelo, possibilitando não apenas uma maior previsibilidade de seu comportamento como também fornecendo a base para o estudo de sistemas multicanais, onde os caminhos de propagação entre os diversos atuadores e sensores de erro devem necessariamente ser levados em consideração.

O presente trabalho investiga o comportamento do sistema adaptativo apresentado na Fig. 2, onde $g(\bullet)$ representa uma não-linearidade do tipo saturação sem memória e \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 são transformações lineares decorrentes do processamento e instrumentação eletrônica e do caminho de propagação do sinal acústico ou vibracional no meio. Ao conjunto ordenado destes três elementos denomina-se sistema Wiener-Hammerstein [12].

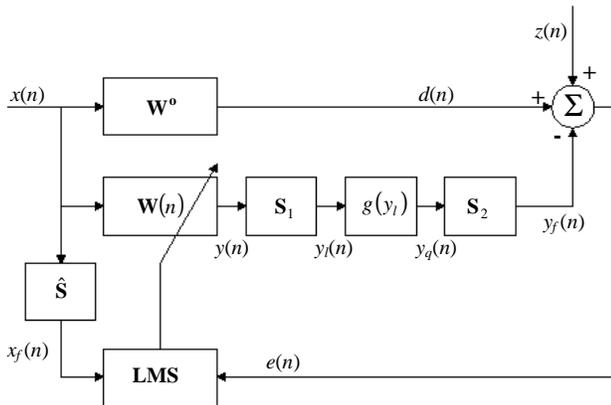


Figura 2. Diagrama em blocos do sistema analisado.

Recursões não-lineares determinísticas são desenvolvidas para o comportamento médio dos coeficientes e para o erro médio quadrático, considerando sinais gaussianos e adaptação lenta. Os

resultados são expressos em função do grau de não-linearidade do sistema. A partir dessas recursões, determina-se o comportamento do algoritmo em regime permanente. A análise não utiliza a teoria da independência.

Os resultados analíticos demonstram que o grau de não-linearidade do sistema pode ter uma influência significativa no comportamento do algoritmo, tanto durante a convergência quanto em regime permanente. Simulações Monte Carlo apresentam excelente concordância com o modelo teórico.

2. ANÁLISE

2.1 O Modelo Analítico

O diagrama em blocos da Fig. 2 apresenta o problema de controle não-linear estudado. $\mathbf{W}^o = [w_0^o \ w_1^o \ \dots \ w_{N-1}^o]^T$ é o vetor de amostras da resposta ao impulso unitário da planta. $\mathbf{W}(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \dots \ w_{N-1}(n)]^T$ é o vetor de coeficientes adaptativos (filtro FIR transversal), $\mathbf{S}_1 = [s_{10} \ s_{11} \ \dots \ s_{1M_1-1}]^T$ é o primeiro filtro do caminho secundário, $\mathbf{S}_2 = [s_{20} \ s_{21} \ \dots \ s_{2M_2-1}]^T$ é o segundo filtro do caminho secundário e $\hat{\mathbf{S}} = [\hat{s}_0 \ \hat{s}_1 \ \dots \ \hat{s}_{M-1}]^T$ é a estimativa da parte linear do caminho acústico secundário. $d(n)$ é o sinal a ser estimado. $e(n)$ é o sinal de erro a ser minimizado. $x(n)$ é o sinal de referência. Assume-se que $x(n)$ seja estacionário, gaussiano, com média zero e variância σ_x^2 . $\mathbf{X}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-N+1)]^T$ é o vetor de dados observados dentro de um intervalo de tempo de N amostras e $\mathbf{X}_f(n) = [x_f(n) \ x_f(n-1) \ \dots \ x_f(n-N+1)]^T$ é o vetor de dados observados filtrados por $\hat{\mathbf{S}}$. $z(n)$ é o ruído de medição, o qual considera-se estacionário, gaussiano, branco, com média zero, variância σ_z^2 e não-correlacionado com qualquer outro sinal. Os vetores \mathbf{W}^o e $\mathbf{W}(n)$ são considerados de mesma dimensão N . Quando possuindo diferentes comprimentos, os mesmos podem ser acomodados com a inserção de zeros.

A não-linearidade é modelada pela seguinte função:

$$g(y) = \int_0^y e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz \quad (1)$$

Note-se que $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} g(y) = y$ and $\lim_{\sigma \rightarrow 0} g(y) = \sigma \sqrt{\pi/2} \operatorname{sgn}(y)$.

Assim, $g(\bullet)$ pode ser variado desde uma função linear até a função sinal de forma contínua através de σ . O comportamento de sistemas altamente não-lineares ($\sigma \rightarrow 0$) pode ser estudado multiplicando-se $g(\bullet)$ por uma constante do tipo A/σ onde $A \in \mathbb{R}^+$. A Fig. 3 mostra gráficos de $g(\bullet)$ para diferentes σ .

A equação de atualização dos coeficientes do algoritmo FXLMS é dada por:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \mu e(n) \mathbf{X}_f(n) \quad (2)$$

onde: $\mathbf{X}_f(n) = \sum_{k=0}^{\hat{M}-1} \hat{s}_k \mathbf{X}(n-k)$ e a equação do erro é dada por:

$$e(n) = \mathbf{W}^o T \mathbf{X}(n) + z(n) - \sum_{j=0}^{M_2-1} s_{2j} g \left[\sum_{i=0}^{M_1-1} s_{1i} \mathbf{W}^T(n-i-j) \mathbf{X}(n-i-j) \right] \quad (3)$$

Substituindo-se (3) em (2), obtém-se:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \mu \mathbf{X}_f(n) \mathbf{X}^T(n) \mathbf{W}^o + \mu z(n) \mathbf{X}_f(n) - \mu \sum_{j=0}^{M_2-1} s_{2j} g \left[\sum_{i=0}^{M_1-1} s_{1i} \mathbf{W}^T(n-i-j) \mathbf{X}(n-i-j) \right] \mathbf{X}_f(n) \quad (4)$$

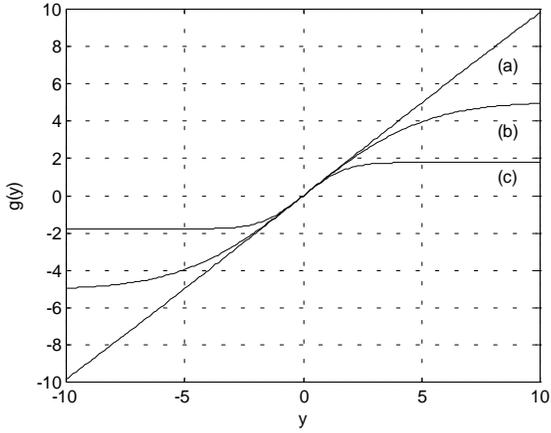


Figura 3. Representações da função $g(\bullet)$ para diferentes σ . (a) $\sigma^2 = 1000$; (b) $\sigma^2 = 16$; (c) $\sigma^2 = 2$.

2.2 Comportamento Médio dos Coeficientes

Tomando-se o valor esperado de (4) condicionado em $\mathcal{W} = \{ \mathbf{W}(n), \mathbf{W}(n-1), \dots, \mathbf{W}(n-M_1-M_2+2) \}$:

$$E \{ \mathbf{W}(n+1) | \mathcal{W} \} = \mathbf{W}(n) + \mu E \{ \mathbf{X}_f(n) \mathbf{X}^T(n) | \mathcal{W} \} \mathbf{W}^o + \mu E \{ z(n) \mathbf{X}_f(n) | \mathcal{W} \} - \mu \sum_{j=0}^{M_2-1} s_{2j} E \left\{ g \left[\sum_{i=0}^{M_1-1} s_{1i} \mathbf{W}^T(n-i-j) \mathbf{X}(n-i-j) \right] \mathbf{X}_f(n) \mid \mathcal{W} \right\} \quad (5)$$

O segundo valor esperado em (5) é nulo, visto que $x(n)$ e $z(n)$ são não-correlacionados e têm média zero. A avaliação das demais esperanças em (5) não é direta, visto que estão envolvidos termos atrasados dos vetores $\mathbf{X}(n)$ e $\mathbf{W}(n)$. Portanto, uma análise exata torna-se uma tarefa matemática bastante complexa. Para prosseguir, considera-se que as correlações entre vetores do sinal de referência são muito mais

significativas que as correlações entre vetores de coeficientes e vetores do sinal de referência. Essa suposição é suportada por extensas simulações numéricas.

Nessas condições tem-se que: $\tilde{\mathbf{R}}_{\hat{s}} = \sum_{j=0}^{\hat{M}-1} \hat{s}_j \mathbf{R}_{-j}$ com

$$\mathbf{R}_{-j} = E \{ \mathbf{X}(n-j) \mathbf{X}^T(n) \}^1.$$

Note-se que essa simplificação é menos restritiva que a teoria da independência, na qual vetores de entrada atrasados são considerados independentes.

Para avaliar-se a última esperança em (5) é utilizado o teorema de Bussgang [13], obtendo-se:

$$E \left\{ g \left[\sum_{i=0}^{M_1-1} s_{1i} \mathbf{W}^T(n-i-j) \mathbf{X}(n-i-j) \right] \mathbf{X}_f(n) \mid \mathcal{W} \right\} = \frac{\sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{k=0}^{\hat{M}-1} s_{1i} \hat{s}_k \mathbf{R}_{j+i-k} \mathbf{W}(n-i-j)}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{p=0}^{M_1-1} s_{1i} s_{1p} \mathbf{W}^T(n-i-j) \mathbf{R}_{p-i} \mathbf{W}(n-p-j) + 1}} \quad (6)$$

Substituindo-se os resultados obtidos em (5), obtém-se:

$$E \{ \mathbf{W}(n+1) | \mathcal{W} \} = \mathbf{W}(n) + \mu \tilde{\mathbf{R}}_{\hat{s}} \mathbf{W}^o - \mu \sum_{j=0}^{M_2-1} s_{2j} \frac{\sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{k=0}^{\hat{M}-1} s_{1i} \hat{s}_k \mathbf{R}_{j+i-k} \mathbf{W}(n-i-j)}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{p=0}^{M_1-1} s_{1i} s_{1p} \mathbf{W}^T(n-i-j) \mathbf{R}_{p-i} \mathbf{W}(n-p-j) + 1}} \quad (7)$$

Para retirar-se o condicionamento de (7) em \mathcal{W} seria necessário conhecer as funções densidade de probabilidade dos vetores em \mathcal{W} . Visto que essas não são de fácil obtenção, um procedimento aproximado deve ser usado para obter-se a equação do comportamento médio dos coeficientes.

Desprezando-se os efeitos das flutuações dos coeficientes em relação ao seu valor médio em (7) (μ pequeno), tem-se a forma final para o modelo do comportamento médio dos coeficientes:

$$\bar{\mathbf{W}}(n+1) = \bar{\mathbf{W}}(n) + \mu \tilde{\mathbf{R}}_{\hat{s}} \mathbf{W}^o - \mu \sum_{j=0}^{M_2-1} s_{2j} \frac{\sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{k=0}^{\hat{M}-1} s_{1i} \hat{s}_k \mathbf{R}_{j+i-k} \bar{\mathbf{W}}(n-i-j)}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{p=0}^{M_1-1} s_{1i} s_{1p} \text{tr} \{ \mathbf{R}_{p-i} \bar{\mathbf{W}}(n-p-j) \bar{\mathbf{W}}^T(n-i-j) \} + 1}} \quad (8)$$

onde $\text{tr} \{ \bullet \}$ significa o traço da matriz argumento.

¹ A matriz de correlação dos vetores de entrada é definida como: $\mathbf{R}_{-c} = E \{ \mathbf{X}(n-j) \mathbf{X}^T(n-i) \}$. Assim \mathbf{R}_0 corresponde à matriz de autocorrelação de $x(n)$.

Supondo-se que $\sigma \rightarrow \infty$ (caso linear) e $\mathbf{S}_2 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$, (8) reduz-se ao resultado obtido em [5, Eq.16] para o FXLMS convencional (linear).

2.3 Coeficientes em Regime Permanente

Avaliando-se (8) para $n \rightarrow \infty$ pode-se mostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{W}}(n) = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \bar{\mathbf{R}}_{s_2 \hat{s}_1}^{-1} \bar{\mathbf{R}}_{\hat{s}} \mathbf{W}^0 \quad (9)$$

Onde a constante η^2 é denominada de grau de não-linearidade do sistema e é dada por:

$$\eta^2 = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{W}^{0T} \bar{\mathbf{R}}_{\hat{s}}^T \bar{\mathbf{R}}_{s_2 \hat{s}_1}^{-T} \bar{\mathbf{R}}_{s_1 s_1} \bar{\mathbf{R}}_{s_2 \hat{s}_1}^{-1} \bar{\mathbf{R}}_{\hat{s}} \mathbf{W}^0 \quad (10)$$

$$e: \bar{\mathbf{R}}_{s_1 s_1} = \sum_{k=0}^{M_1-1} \sum_{i=0}^{M_1-1} s_{ik} s_{ii} \mathbf{R}_{i-k}, \quad \bar{\mathbf{R}}_{s_2 \hat{s}_1} = \sum_{j=0}^{M_2-1} \sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{k=0}^{\hat{M}-1} s_{2j} s_{1i} \hat{s}_k \mathbf{R}_{i+j-k}$$

De (9) é possível verificar que os coeficientes em regime permanente crescem sem limites à medida que aumenta o grau de não-linearidade do sistema. Para $\eta^2 \geq 1$ (9) é instável e não possui pontos estacionários.

Supondo-se que $\sigma \rightarrow \infty$ e $\mathbf{S}_2 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$, então (9) reduz-se, mais uma vez, ao caso linear de acordo com [5, Eq.18].

2.4 Erro Médio Quadrático

Elevando (3) ao quadrado e tomando-se seu valor esperado condicionado em \mathcal{W} , tem-se:

$$\begin{aligned} E\{e^2(n) | \mathcal{W}\} &= \mathbf{W}^{0T} E\{\mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n) | \mathcal{W}\} \mathbf{W}^0 \\ &+ 2 \mathbf{W}^{0T} E\{z(n) \mathbf{X}(n) | \mathcal{W}\} + E\{z^2(n) | \mathcal{W}\} \\ &- 2 \sum_{j=0}^{M_2-1} s_{2j} E\left\{z(n) g\left[\sum_{i=0}^{M_1-1} s_{1i} \mathbf{W}^T(n-i-j) \mathbf{X}(n-i-j)\right] | \mathcal{W}\right\} \\ &- 2 \mathbf{W}^{0T} \sum_{j=0}^{M_2-1} s_{2j} E\left\{g\left[\sum_{i=0}^{M_1-1} s_{1i} \mathbf{W}^T(n-i-j) \mathbf{X}(n-i-j)\right] \mathbf{X}(n) | \mathcal{W}\right\} \\ &+ E\left\{\left[\sum_{j=0}^{M_2-1} s_{2j} g\left[\sum_{i=0}^{M_1-1} s_{1i} \mathbf{W}^T(n-i-j) \mathbf{X}(n-i-j)\right]\right]^2 | \mathcal{W}\right\} \end{aligned} \quad (11)$$

Os quatro primeiros valores esperados em (11) são facilmente avaliados através das características dos sinais $z(n)$ e $x(n)$ e desprezando-se as correlações entre os vetores $\mathbf{X}(n)$ e $\mathbf{W}(n)$:

$$E\{\mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n) | \mathcal{W}\} \equiv \mathbf{R}_0, \quad E\{z(n) \mathbf{X}(n) | \mathcal{W}\} = \mathbf{0},$$

$$E\left\{z(n) g\left[\sum_{i=0}^{M_1-1} s_{1i} \mathbf{W}^T(n-i-j) \mathbf{X}(n-i-j)\right] | \mathcal{W}\right\} = 0 \quad e$$

$$E\{z^2(n) | \mathcal{W}\} = \sigma_z^2.$$

O quinto valor esperado em (11) já foi avaliado em (6). Substituindo-se $\mathbf{X}(n)$ por $\mathbf{X}_f(n)$:

$$\begin{aligned} E\left\{g\left[\sum_{i=0}^{M_1-1} s_{1i} \mathbf{W}^T(n-i-j) \mathbf{X}(n-i-j)\right] \mathbf{X}(n) | \mathcal{W}\right\} &= \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{M_1-1} s_{1i} \mathbf{R}_{j+i} \mathbf{W}(n-i-j)}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{p=0}^{M_1-1} s_{1i} s_{1p} \mathbf{W}^T(n-i-j) \mathbf{R}_{p-i} \mathbf{W}(n-p-j) + 1}} \end{aligned} \quad (12)$$

O último valor esperado pode ser obtido através do teorema de Bussgang [13]:

$$E\{g(y_1) g(y_2) | \mathcal{W}\} = \sigma^2 \cdot$$

$$\begin{aligned} &\cdot \arcsen \left(\frac{\sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{l=0}^{M_1-1} s_{1i} s_{1l} \mathbf{W}^T(n-i-j) \mathbf{R}_{l+q-i-j} \mathbf{W}(n-l-q)}{\left(\sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{p=0}^{M_1-1} s_{1i} s_{1p} \mathbf{W}^T(n-i-j) \mathbf{R}_{p-i} \mathbf{W}(n-p-j) + \sigma^2\right)^{1/2}} \right) \\ &\cdot \left(\frac{1}{\left(\sum_{l=0}^{M_1-1} \sum_{r=0}^{M_1-1} s_{1l} s_{1r} \mathbf{W}^T(n-l-q) \mathbf{R}_{r-l} \mathbf{W}(n-r-q) + \sigma^2\right)^{1/2}} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Substituindo-se os diversos termos em (11) e supondo-se que o passo de adaptação seja suficientemente pequeno, obtém-se:

$$\begin{aligned} \xi(n) &= E\{e^2(n)\} = \mathbf{W}^{0T} \mathbf{R}_0 \mathbf{W}^0 + \sigma_z^2 \\ &- 2 \sum_{j=0}^{M_2-1} s_{2j} \frac{\sum_{i=0}^{M_1-1} s_{1i} \mathbf{W}^{0T} \mathbf{R}_{j+i} \bar{\mathbf{W}}(n-i-j)}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{p=0}^{M_1-1} s_{1i} s_{1p} tr\{\mathbf{R}_{p-i} \bar{\mathbf{W}}(n-p-j) \bar{\mathbf{W}}^T(n-i-j)\} + 1}} \\ &+ \sigma^2 \sum_{j=0}^{M_2-1} \sum_{q=0}^{M_2-1} s_{2j} s_{2q} \cdot \\ &\arcsen \left(\frac{\sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{l=0}^{M_1-1} s_{1i} s_{1l} tr\{\mathbf{R}_{l+q-i-j} \bar{\mathbf{W}}(n-l-q) \bar{\mathbf{W}}^T(n-i-j)\}}{\left(\sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{p=0}^{M_1-1} s_{1i} s_{1p} tr\{\mathbf{R}_{p-i} \bar{\mathbf{W}}(n-p-j) \bar{\mathbf{W}}^T(n-i-j)\} + \sigma^2\right)^{1/2}} \right) \\ &\cdot \left(\frac{1}{\left(\sum_{l=0}^{M_1-1} \sum_{r=0}^{M_1-1} s_{1l} s_{1r} tr\{\mathbf{R}_{r-l} \bar{\mathbf{W}}(n-r-q) \bar{\mathbf{W}}^T(n-l-q)\} + \sigma^2\right)^{1/2}} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

2.5 Erro em Regime Permanente

A expressão do erro médio quadrático em regime permanente pode ser obtida substituindo-se (9) em (14) para $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(n) = \mathbf{W}^o \mathbf{T} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}^o + \sigma_z^2 - 2\mathbf{W}^o \mathbf{T} \tilde{\mathbf{R}}_{S_2, S_1}^T \tilde{\mathbf{R}}_{S_2, S_1}^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_S \mathbf{W}^o$$

$$+ \frac{\mathbf{W}^o \mathbf{T} \tilde{\mathbf{R}}_S^T \tilde{\mathbf{R}}_{S_2, S_1}^{-T} \tilde{\mathbf{R}}_{S_1, S_1} \tilde{\mathbf{R}}_{S_2, S_1}^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_S \mathbf{W}^o}{\eta^2} \sum_{j=0}^{M_2-1} \sum_{q=0}^{M_2-1} S_{2j} S_{2q} \quad (15)$$

$$\arcsen \left(\frac{\mathbf{W}^o \mathbf{T} \tilde{\mathbf{R}}_S^T \tilde{\mathbf{R}}_{S_2, S_1}^{-T} \sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{l=0}^{M_1-1} S_{1i} S_{1l} \mathbf{R}_{l+q-i-j} \tilde{\mathbf{R}}_{S_2, S_1}^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_S \mathbf{W}^o}{\mathbf{W}^o \mathbf{T} \tilde{\mathbf{R}}_S^T \tilde{\mathbf{R}}_{S_2, S_1}^{-T} \tilde{\mathbf{R}}_{S_1, S_1} \tilde{\mathbf{R}}_{S_2, S_1}^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_S \mathbf{W}^o} \cdot \eta^2 \right)$$

onde: $\tilde{\mathbf{R}}_{S_2, S_1} = \sum_{j=0}^{M_2-1} \sum_{i=0}^{M_2-1} S_{2j} S_{2i} \mathbf{R}_{-i-j}$

Através de (15) pode-se constatar que mesmo para $\eta^2 \geq 1$, valor a partir do qual os coeficientes divergem, o erro médio quadrático é limitado. Isso ocorre porque a não-linearidade limita a potência de $e(n)$ mesmo no caso de instabilidade do algoritmo.

3. SIMULAÇÕES

Nesta seção são apresentadas simulações com a finalidade de verificar a acurácia das equações (8), (9), (14) e (15). Considera-se que o sistema apresentado na Fig. 2 possui os seguintes parâmetros: sinal de excitação correlacionado com dispersão de autovalores de \mathbf{R}_0 igual a 12,42, $\mu = 0,01$, $\sigma_z^2 = 10^{-6}$,

$$\mathbf{W}^o = [0,8639 \ 0,4319 \ 0,2592]^T, \quad \hat{\mathbf{S}} = [0,9402 \ 0,3395 \ 0,0261]^T,$$

$$\mathbf{S}_1 = [0,971 \ 0,2425]^T, \quad \mathbf{S}_2 = [0,9939 \ 0,1104]^T, \quad \mathbf{W}(0) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{S}_1 * \mathbf{S}_2 = [0,9642 \ 0,3482 \ 0,0268]^T, \quad \mathbf{W}^o \mathbf{T} \mathbf{W}^o = 1, \quad \mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_1 = 1,$$

$$\mathbf{S}_2^T \mathbf{S}_2 = 1.$$

As Figs. 4, 5 e 6 apresentam o comportamento dos três coeficientes do filtro adaptativo ao longo das sucessivas iterações para: $\sigma^2 = 652, 2,61$ e $1,3$, correspondendo a respectivamente um pequeno ($\eta^2 = 0,001$), médio ($\eta^2 = 0,25$) e grande ($\eta^2 = 0,5$) efeito da não-linearidade sobre o sistema. São mostradas as curvas teóricas utilizando a Eq. (8) (linhas contínuas) e simulações Monte Carlo (linhas espiculadas) para 1000 realizações. Os valores em regime permanente concordam com os obtidos analiticamente através de (9).

A Fig. 7 mostra o comportamento do erro médio quadrático para os mesmos valores de η^2 utilizados na análise dos coeficientes. É desenhada uma a cada 50 amostras para melhor visualização. Novamente pode ser constatada a excelente concordância entre teoria (Eq. (14)) e simulação. Note-se a redução do desempenho de cancelamento para o caso (c) com relação ao caso (a) (quase linear). As assíntotas das curvas concordam com os resultados de (15): (a) $-29,67$ dB; (b) $-20,93$ dB e (c) $-14,97$ dB.

A Fig. 8 mostra a função $g(\cdot)$ e histogramas de amplitudes de $y_i(n)$ obtidos a partir de simulações para todas as 8000 iterações e 10 realizações. Pode-se claramente verificar que para os casos (b) e (c) o sistema opera na região não-linear.

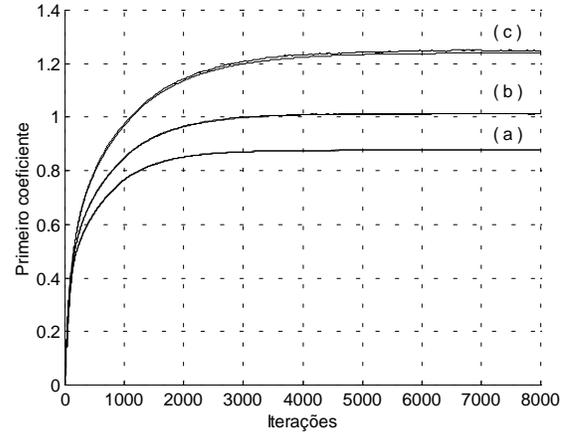


Figura 4. Comportamento médio do primeiro coeficiente. (a) $\eta^2 = 0,001$; (b) $\eta^2 = 0,25$; (c) $\eta^2 = 0,5$.

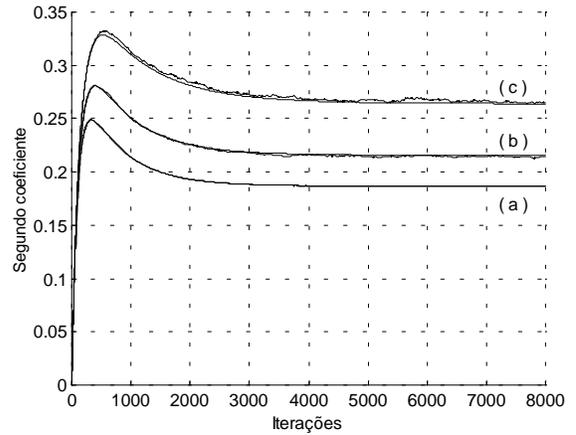


Figura 5. Comportamento médio do segundo coeficiente. (a) $\eta^2 = 0,001$; (b) $\eta^2 = 0,25$; (c) $\eta^2 = 0,5$.

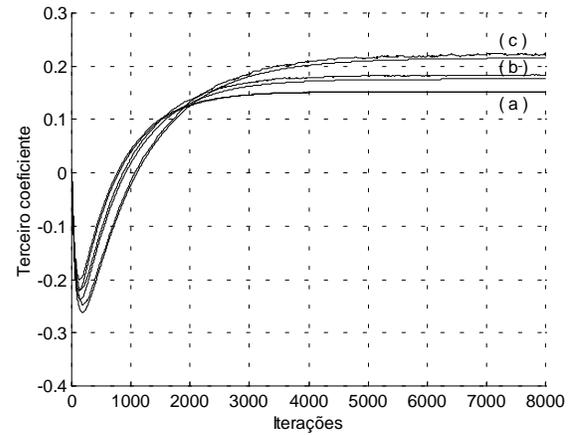


Figura 6. Comportamento médio do terceiro coeficiente. (a) $\eta^2 = 0,001$; (b) $\eta^2 = 0,25$; (c) $\eta^2 = 0,5$.

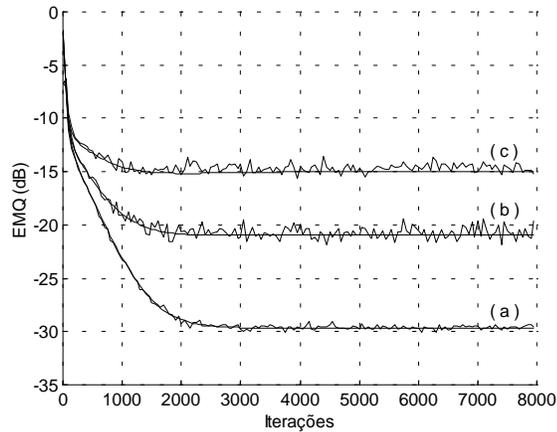


Figura 7. Erro médio quadrático (EMQ). (a) $\eta^2 = 0,001$; (b) $\eta^2 = 0,25$; (c) $\eta^2 = 0,5$.

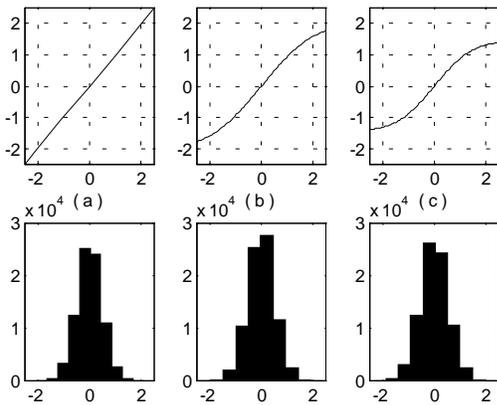


Figura 8. Histogramas de amplitude. (a) $\eta^2 = 0,001$; (b) $\eta^2 = 0,25$; (c) $\eta^2 = 0,5$.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma análise estatística do comportamento do algoritmo FXLMS quando o caminho secundário pode ser modelado por um sistema Wiener-Hammerstein. Este problema é de especial interesse em sistemas de controle ativo de ruído acústico e vibrações. Os elementos lineares do caminho secundário criam correlações no sinal de controle que podem não ser desprezíveis. O grau de não-linearidade do sistema depende diretamente da potência desse sinal e da capacidade dos atuadores.

Equações recursivas foram desenvolvidas para o comportamento médio dos coeficientes e para o erro médio quadrático, considerando sinais gaussianos e adaptação lenta. A partir dessas recursões, as condições de regime permanente foram determinadas. Nessa análise a teoria da independência é evitada. As expressões teóricas desenvolvidas são capazes de prever adequadamente o comportamento do algoritmo durante todas as fases do processo de adaptação para diferentes graus de não-

linearidade. Simulações Monte Carlo corroboram os resultados teóricos.

5. REFERÊNCIAS

- [1] Kuo, S.M. e Morgan, D.R., *Active Noise Control Systems: Algorithms and DSP Implementations*, New York: John Wiley, 1996.
- [2] Guicking, D., "On the Invention of Active Noise Control", *Journal of the Acoustical Society of America*, 87, 2251-2254, 1990.
- [3] Widrow, B. and Stearns, S.D., *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, N.J., 1985.
- [4] Haykin S. *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, segunda edição, 1991.
- [5] Tobias, O.J., Bermudez, J.C.M. e Bershad, N.J., "Mean Weight Behavior of the Filtered-X LMS Algorithm", *IEEE Trans. on Signal Processing*, 48(4), 1061-1075, 2000.
- [6] Bernhard, R.J., Davies, P. e Kurth, S.W., "Effects of Nonlinearities on System Identification in Active Noise Control Systems", *Proceedings of National Conference of Noise Control Engineering, Noise-Con'97*, 231-236, 1997.
- [7] Elliot, S.J e Nelson, P.A., "Active Noise Control", *IEEE Signal Processing Magazine*, outubro, 12-35, 1993.
- [8] Suykens, J., Vandewalle, J. e Ginderdeuren, "Feedback Linearization in Electrodynamic Loudspeakers", *Journal of the Audio Engineering Society*, 43(9), 690-694, 1995.
- [9] Hansen, C., "Active Noise Control – From Laboratory to Industrial Implementation", *Proceedings of National Conference of Noise Control Engineering, Noise-Con'97*, University Park, Pennsylvania, USA, livro 2, 3-38, 1997.
- [10] Elliot, S.J., Stothers, I.M. e Nelson, P.A., "A Multiple Error LMS Algorithm and Its Application to the Active Control of Sound and Vibration", *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 35(10), 1423-1434, 1987.
- [11] Costa, M.H., Bermudez, J.C.M. e Bershad, N.J., "Statistical Analysis of the FXLMS Algorithm with a Nonlinearity in the Secondary Path", *ISCAS'99*, Orlando-Florida, USA, 1999.
- [12] Aguirre, L.A., *Introdução à Identificação de Sistemas – Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*, Editora UFMG, 2000.
- [13] Bussgang J.J., "Cross-correlation functions of amplitude-distorted gaussian signals", *Relatório Técnico 216*, Research Laboratory of Electronics, MIT, Cambridge, MA, março, 1952.