

CÁLCULO DA CAPACIDADE DE CÓDIGOS COM RESTRIÇÕES BI-DIMENSIONAIS USANDO REDES DE PETRI

Edmar C. Gurjão, Francisco M. de Assis
e Angelo Perkusich

Cecilio Pimentel, Tomaz C. Barros

GEPOTI - Grupo de Estudos em Problemas de
Otimização e Transmissão da Informação
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal da Paraíba,
58.109-970 - Campina Grande, PB, Brasil
E-mails: {ecandeia, fmarcos}@dee.ufpb.br

Grupo de Pesquisa em Comunicações
Departamento de Eletrônica e Sistemas
Universidade Federal de Pernambuco
Caixa Postal 7800
50711-970 - Recife, PE, Brasil
cecilio@npd.ufpe.br, tomaz@ee.ufpe.br

RESUMO

Neste artigo é apresentado um procedimento que faz uso de redes de Petri para o cálculo da capacidade de códigos com restrições bi-dimensionais usados para gravação de múltiplas trilhas em paralelo em meios ópticos e magnéticos. A utilização de redes de Petri sistematiza a representação das restrições impostas às seqüências em cada trilha e no conjunto das trilhas simultaneamente. A capacidade do código é calculada a partir da matriz de adjacência da árvore de alcançabilidade da rede de Petri. Uma característica importante do procedimento apresentado é que os modelos podem ser adaptados para introdução (ou supressão) de restrições.

1. INTRODUÇÃO

Seqüências discretas que obedecem à restrições na ocorrência de símbolos adjacentes são usualmente empregadas em sistemas de transmissão digital e sistemas de gravação óptica e magnética. Entre outras exigências, o uso destas seqüências visa reduzir a interferência intersimbólica e aumentar a habilidade de sincronização de relógio de sistemas de gravação.

As regras que especificam o conjunto de seqüências permitidas são denominadas de *restrições de canal*. O conjunto de todas as seqüências binárias que satisfazem uma restrição de canal é denotado por S . Por exemplo, o conjunto S para a restrição de canal unidimensional (d, k) é o conjunto de todas as seqüências binárias tal que o número de 0's entre dois 1's consecutivos é no mínimo d e no máximo k .

O canal discreto sem ruído (DNC, do inglês *discrete noiseless channel*) associado a um conjunto S , é um canal que admite a transmissão somente de seqüências pertencentes a S , sendo esta transmissão livre de erros. A capacidade de um DNC unidimensional foi definida por Shannon co-

mo [1]:

$$C = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\log_2 N(\tau)}{\tau}, \quad (1)$$

sendo $N(\tau)$ o número de seqüências de comprimento τ em S . C representa a taxa máxima de transmissão da informação através do DNC. Shannon propôs uma técnica para determinar $N(\tau)$ (e daí C) que usa uma matriz, denominada *matriz adjacência*, definida a partir de um grafo rotulado que representa as restrições de canal, conhecido como diagrama de estados finito (FSD, do inglês *finite state diagram*). A capacidade é dada por $\log_2 \lambda$, onde λ é o maior autovalor positivo dessa matriz adjacência. Exemplos do cálculo da capacidade unidimensional são encontrados em [2, 3].

Avanços tecnológicos recentes têm possibilitado o aumento da densidade de armazenamento, como por exemplo, o uso de múltiplas cabeças de leitura/gravação operando simultaneamente em n trilhas [4]. Os símbolos lidos/escritos em paralelo em cada trilha são agrupados em um vetor de comprimento n denominado de *vetor de canal*. Um vetor de canal com todas as componentes iguais a zero é denominado de vetor de canal zero. Um DNC bi-dimensional, denotado por DNC-2D, é um canal que admite a transmissão sem ruído de vetores de canal satisfazendo a restrições de ocorrência em intervalos sucessivos.

Marcellin e Weber [5] introduziram um DNC-2D, com parâmetros $(d, k; n)$, onde cada trilha individualmente deve satisfazer a restrição d (número mínimo de 0's entre dois 1's), enquanto a restrição k limita o número máximo de vetores de canal zero consecutivos. Por exemplo, as seguintes seqüências satisfazem as restrições $(1, 2; 2)$:

| | |
|----------|-------------------------------------|
| trilha 1 | 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 |
| trilha 2 | 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 |

No exemplo acima, o primeiro vetor de canal é $[0, 1]$ e o segundo é $[0, 0]$ (vetor de canal zero). Note que embora cada

trilha individualmente pode ter seqüências de zeros consecutivos de comprimento maiores do que $k = 2$, o número máximo de vetores de canal zero consecutivos é $k = 2$. Este esquema possibilita o aumento substancial da capacidade de armazenamento em relação ao sistema que lê/grava cada trilha individualmente obedecendo a restrição unidimensional (d, k) em cada trilha [5]. Vários DNC-2D têm sido propostos na literatura [5]-[6].

A capacidade por trilha de um DNC-2D é dada por:

$$C = \frac{1}{n} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\log_2 N_n(\tau)}{\tau}, \quad (2)$$

onde $N_n(\tau)$ é o número de vetores de canal de comprimento τ . O método usual para o cálculo da capacidade de um DNC-2D consiste em construir inicialmente o FSD que representa as restrições impostas aos vetores de canal e seguir os procedimentos propostos por Shannon [5]-[6].

Neste artigo, são usadas as Redes de Petri como forma de sistematizar a representação de DNC-2D e calcular a capacidade desses canais. Dois modelos gerais são apresentados e é feita o cálculo da capacidade de um DNC-2D com um deles. Também mostra-se que se forem adicionadas restrições a um DNC-2D, a capacidade desse novo sistema pode ser obtida pelo modelo em rede de Petri do sistema original. Na Seção 2 são definidas as redes de Petri e apresentado o procedimento de cálculo da capacidade dessas redes. Para exemplificar a metodologia proposta, a rede de Petri para a restrição $(d, k; n)$ é apresentada na Seção 3. Uma técnica para redução da matriz adjacência é introduzida na Seção 4. As conclusões deste trabalho são apresentadas na Seção 5.

2. INTRODUÇÃO A REDES DE PETRI

As redes de Petri são uma ferramenta de modelagem matemática com uma representação gráfica. No contexto desse trabalho baseando-se em [7], uma rede de Petri é definida como a sextupla (P, T, F, M, W, M_0) , onde:

1. $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ é um conjunto finito de lugares,
2. $T = \{t_1, t_2, \dots, t_\ell\}$ é um conjunto finito de transições,
3. $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ é um conjunto de arcos,
4. $M : P \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ é o conjunto de marcações,
5. $W : F \times M \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ é a função de ponderação,
6. $M_0 : P \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ é a marcação inicial,
7. $P \cap T = \emptyset$ e $P \cup T \neq \emptyset$.

Uma rede de Petri é um grafo direcionado, ponderado e bipartido consistindo de dois tipos de nós, denominados lugares e transições, onde arcos podem ser direcionados de lugares para transições ou de transições para lugares. A cada arco pode ser associado um número inteiro positivo ou uma função da marcação de algum lugar que é denominado peso ou ponderação do arco. Na representação gráfica, veja Figura 1, lugares são representados por círculos e as transições por barras ou retângulos. A marcação atribui a cada lugar um inteiro não negativo. Se a marcação atribui a um lugar p um inteiro não negativo k , então p é marcado com k fichas. Graficamente, estas fichas são representadas por k pontos localizados no lugar p . A marcação, denotada por M , é um vetor de m componentes, onde m é o número total de lugares da rede. Denota-se $M(p)$, o número de fichas no lugar p .

Na modelagem adotada neste trabalho, lugares representam condições e transições eventos. Uma transição (evento) tem um certo número de lugares de entrada e de lugares de saída representando as pré-condições e pós-condições do evento, respectivamente. A presença de uma ficha em um lugar indica que a condição associada aquele lugar é verdadeira. Numa outra interpretação, k fichas em um lugar indicam que k recursos ou itens de dados estão disponíveis.

A família de eventos de uma rede de Petri, denotada por $\mathcal{L}(T)$, é a coleção dos sub-conjuntos do conjunto das transições, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_\ell\}$. Por exemplo se $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ tem-se $\mathcal{L}(T) = \{\emptyset, \{t_1\}, \{t_2\}, \{t_3\}, \{t_1, t_2\}, \dots, \{t_1, t_2, t_3\}\}$. Em geral para um dado sistema representado por uma rede de Petri nem todos os eventos podem ocorrer. Denomina-se conjuntos dos eventos permitidos, representados por E , o subconjunto da família $\mathcal{L}(T)$ dos eventos que podem ocorrer no sistema.

O conjunto de marcações geradas a partir de M_0 e de seus sucessores, pela ocorrência dos eventos permitidos, é denominado de conjunto alcançável, sendo denotado por $RS(M_0)$. A árvore de alcançabilidade é aquela cujo conjunto de vértices é $RS(M_0)$ e os arcos são os eventos que fazem as transições entre as marcações [7].

A *compressibilidade* de uma rede de Petri foi definida em [8] pelo logaritmo do maior autovalor da matriz de adjacência da árvore de alcançabilidade da rede. A capacidade de um DNC associado com um conjunto de restrições S pode ser obtida calculando a compressibilidade da rede de Petri que o representa. Esta é a idéia básica explorada neste trabalho.

A seguir são apresentados dois modelos para a restrição $(d, k; n)$.

3. MODELOS PARA O DNC-2D

Nesta seção são apresentados dois modelos em rede de Petri para os sistemas de gravação $(d, k; n)$. O primeiro represen-

ta a gravação em uma trilha pelo disparo de uma transição, onde cada trilha é considerada isoladamente. O segundo considera a gravação nas n trilhas, representando a gravação dessas n trilhas pelo disparo seqüencial de n transições, uma em cada “sub-modelo”. O disparo de uma transição representada por um retângulo vazio ou hachuriado, corresponde à gravação de um símbolo 0 ou 1, respectivamente.

O primeiro modelo é apresentado na Figura 1. Neste modelo emprega-se os conceitos de *transição com prioridade* e de *arco cujos pesos dependem da marcação de um lugar*. A transição em preto ligada aos contadores é uma com prioridade 2, e as demais com prioridade 1. O disparo dessa transição aumenta a prioridade das transições que lhe seguem, a saber as que estão hachuriadas. Com isto garantindo que na próxima gravação será emitido pelo menos um símbolo 1 em uma das trilhas. Após o disparo de uma dessas transições, as prioridades retornam ao nível anterior.

O rótulo w dos arcos que ligam as transições aos seus respectivos contadores (lugares *Cont1* e *Cont2*) indica que estes são arcos cujo valor do peso é igual à marcação do lugar de entrada da transição. Deste modo, o disparo dessas transições retira todas as fichas que estiverem nos respectivos contadores.

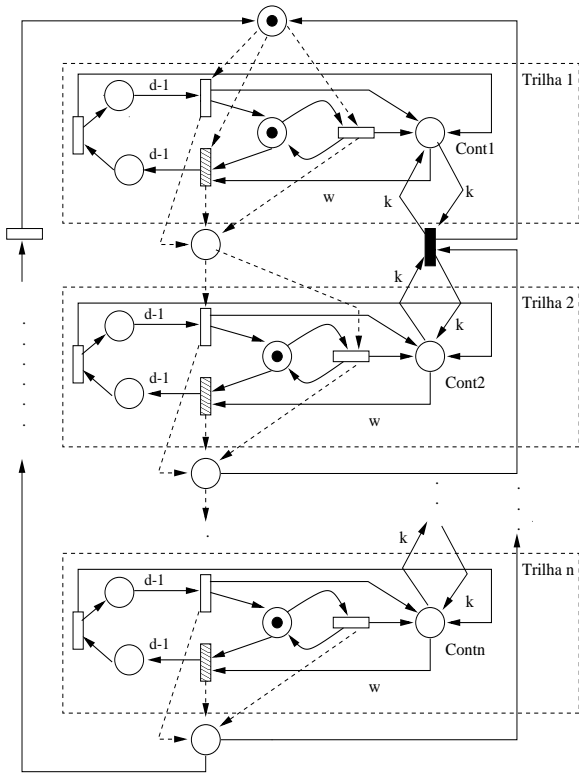


Figura 1: Rede de Petri com prioridade e ponderação variável de arcos para restrição $(d, k; n)$.

O segundo modelo $(d, k; n)$ é apresentado na Figura 2.

Nesse modelo, os eventos considerados correspondem ao disparo seqüencial de n transições, uma em cada “sub-modelo”, que é representado na figura como Trilha i , $i = 1, \dots, n$. A marcação inicial do lugar denominado *Contador* é $2kn + 2n - 1$. Os arcos marcados com peso x indicam que serão retiradas todas as fichas desse lugar. A rede de Petri para o caso particular da restrição $(1, 3; 2)$ é mostrada na Figura 3. Observe que no lugar *Contador* a marcação apresentada indica $2 \times 3 \times 2 + 2 \times 2 - 1 = 15$ fichas nesse lugar.

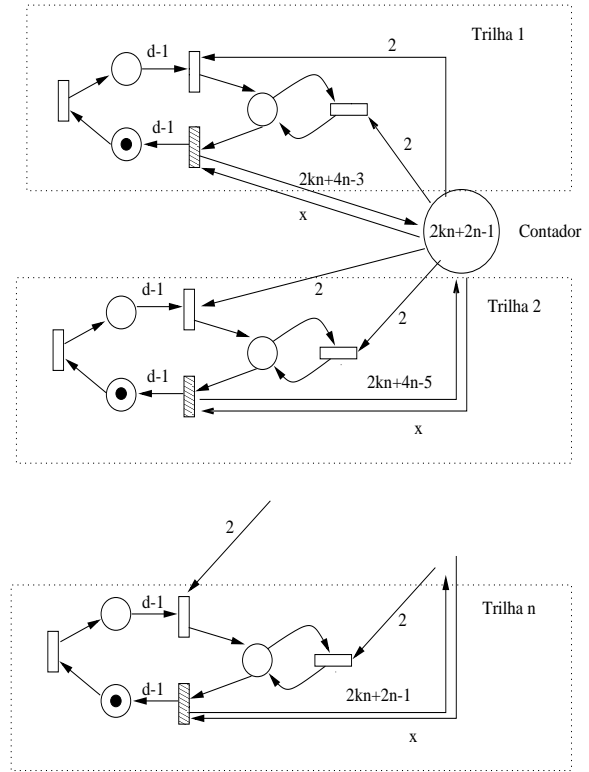


Figura 2: Rede de Petri para restrição $(d, k; n)$.

O modelo da Figura 1 gera mais marcações que o segundo, pois cada gravação em cada uma das trilhas gera um evento e que alcança uma marcação. Já o segundo cada marcação é alcançada por um evento que representa a gravação nas n trilhas.

Para o cálculo da capacidade são observados os eventos da rede, conforme mostrado na Tabela 1 para o modelo $(1, 3; 2)$. As marcações deste modelo estão ilustradas na Tabela 2. A marcação M_0 é alcançada quando ocorre o evento e_8 que representa a gravação de 1 em ambas as trilhas. As três seguintes M_1 a M_3 são alcançadas quando ocorre a gravação de zeros nas duas trilhas, e as demais indicam as combinações que podem ser gravados respeitando as restrições.

A matriz de adjacência é construída verificando-se qual

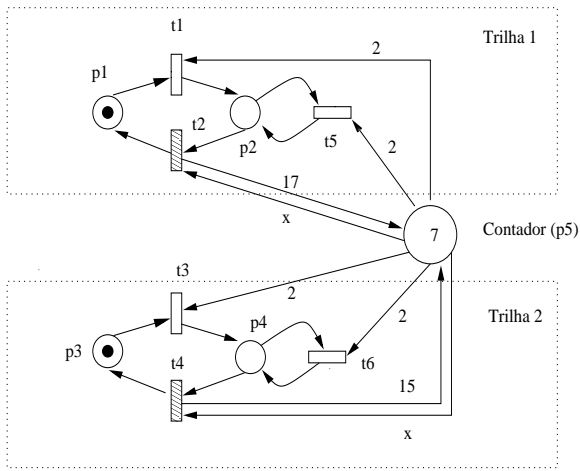


Figura 3: Modelo para $d = 1, k = 3$ com $n = 2$ trilhas.

Tabela 1: Eventos permitidos para restrição $(1, 3; 2)$.

| | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| $e_0 = \{t_1, t_3\}$ | $e_1 = \{t_1, t_6\}$ | $e_2 = \{t_1, t_4\}$ |
| $e_3 = \{t_5, t_3\}$ | $e_4 = \{t_5, t_6\}$ | $e_5 = \{t_5, t_4\}$ |
| $e_6 = \{t_2, t_3\}$ | $e_7 = \{t_2, t_6\}$ | $e_8 = \{t_2, t_4\}$ |

a marcação é alcançada dado a ocorrência de um evento permitido. Seguindo esse procedimento obtém-se para o código $(1, 3; 2)$ a matriz de adjacência mostrada em (3), cujo logaritmo do maior autovalor fornece a capacidade de código.

$$\mathbf{A}_{132} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

3.1. Sistema $(c, j; d, k; n)$

Em [9], foi proposto outro sistema de gravação em várias trilhas que impõe mais uma restrição a que foi apresentada em [5]. Nesse sistema os bits gravados ao mesmo tempo nas n trilhas obedecem a uma restrição unidimensional (d, k) cujos valores são dados por (c, j) , gerando os códigos

Tabela 2: Marcações para restrição $(1, 3; 2)$.

| | |
|----------------------------|--------------------------|
| $M_0 = [1, 0, 1, 0, 15]$, | $M_1 = [0, 1, 0, 1, 11]$ |
| $M_2 = [0, 1, 0, 1, 7]$, | $M_3 = [0, 1, 0, 1, 3]$ |
| $M_4 = [0, 1, 1, 0, 15]$, | $M_5 = [1, 0, 0, 1, 17]$ |

$(c, j; d, k; n)$.

O cálculo da capacidade para esses códigos é feito montando uma matriz de adjacência na qual os estados são as combinações permitidas pelas restrições. Os modelos em rede de Petri apresentados podem ser usados para calcular a capacidade dos sistemas $(c, j; d, k; n)$. Partindo-se da matriz obtida para um sistema $(d, k; n)$, retirando as linhas e colunas correspondentes as marcações que podem ser alcançadas por eventos que não obedecem a restrição (c, j) .

Como exemplo seja um código $(c = 1, j = 2; d = 1, k = 3; n = 2)$, para obter a capacidade desse código pode-se usar o modelo para o código $(d = 1, k = 3; n = 2)$ apresentado na Figura 3, cuja matriz de adjacência é dada por (3). Nesse caso a restrição $(c = 1, j = 2)$ proíbe apenas a gravação de uns ao mesmo tempo nas trilhas. Como esse evento leva somente a marcação M_0 , retira-se a linha e a coluna correspondente a essa marcação, obtendo a matriz (4), que fornece a sua capacidade.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Dessa forma obtém-se um procedimento geral para o cálculo da capacidade de códigos cujas restrições sejam derivadas do código $(d, k; n)$. Partindo do modelo original são retiradas as linhas e colunas correspondentes as marcações alcançadas pelos eventos proibidos.

4. REDUÇÃO DA MATRIZ DE ADJACÊNCIA

Dado um modelo em rede de Petri, a matriz de adjacência pode ter linhas repetidas. Pode-se tirar proveito desse fato no cálculo dos autovalores da matriz original realizando uma redução nessa matriz, obtendo outra de menor tamanho que tenha os mesmos autovalores.

Essa redução pode ser feita observando da teoria de matrizes, a transformação de semelhança dada por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}\mathbf{A}\mathbf{E}^{-1}, \quad (5)$$

que resulta numa matriz \mathbf{B} com os mesmos autovalores de \mathbf{A} .

Como no caso aqui considerado, a matriz \mathbf{A} tem linhas repetidas, a matriz \mathbf{E} será usada para eliminar uma linha repetida por vez. Como exemplo se quisermos eliminar a terceira linha, de \mathbf{A} uma matriz 4×4 , que é idêntica a sua segunda linha, usa-se a matriz

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Deve-se observar que a operação EA afeta as linhas de A , enquanto AE^{-1} opera nas colunas de A .

No caso do cálculo dos autovalores das matrizes como linhas repetidas, pode-se usar o seguinte algoritmo:

1. Enquanto A tiver linhas repetidas faça:
 - (a) Aplique a transformação EAE^{-1} que zera a linha k duplicada;
 - (b) retire a linha e coluna k da matriz.

Como exemplo da aplicação do algoritmo proposto acima, seja um modelo em rede de Petri, cuja matriz de adjacência para o espaço de transições é por (7). Os autovalores dessa matriz são: $\lambda_1 = 2,4736$, $\lambda_2 = -0,9005 + 0,6510i$, $\lambda_3 = -0,9005 - 0,6510i$, $\lambda_4 = 0,3274$, $\lambda_5 = -1,0000$ e λ_6 a λ_9 todos são zero.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

As linhas 6, 7, 8 e 9 são repetições de linhas anteriores da matriz. Dessa forma aplicando o algoritmo obtém-se:

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Os autovalores de A_6 são $\lambda_1 = 2,4736$, $\lambda_2 = -0,9005 + 0,6510i$, $\lambda_3 = -0,9005 - 0,6510i$, $\lambda_4 = 0,3274$ e $\lambda_5 = -1,0000$. Essa matriz tem os mesmos autovalores de que a matriz original.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada a utilização das redes de Petri para o cálculo da capacidade de DNC's bi-dimensionais. A metodologia apresentada sistematiza a modelagem das restrições e simplifica desta forma o cálculo da capacidade, obtido a partir do cálculo da compressibilidade da rede de Petri.

Foram ilustrados dois modelos para a restrição $(d, k; n)$. Com a metodologia apresentada é possível obter a capacidade para vários valores de d , k e n , além da capacidade de outros códigos que acrescentem outras restrições, apenas

eliminando linhas e colunas da matriz adjacência que sejam alcançadas por eventos não permitidos.

Como o cálculo da capacidade é feito usando o maior autovalor de uma matriz, foi mostrado um algoritmo que reduz a matriz que tenha linhas repetidas, mantendo o maior autovalor.

6. REFERÊNCIAS

- [1] Claude E. Shannon. *A Mathematical Theory of Communication, Key Papers on Information Theory*. IEEE Press, New York, 1948.
- [2] Brian H. Marcus, Paul H. Siegel, and Jack K. Wolf. "Finite-State Modulation Codes for Data Storage". *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 10(1):5–37, January 1992.
- [3] Douglas Lind and Brian Marcus. "An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding". Cambridge University Press, New York, USA, 1995.
- [4] L. C. Barbosa. "Simultaneous detection of read-back signals from interfering magnetic recording tracks using array heads". *Transactions on Magnetics*, 26(26):2163–2165, September 1990.
- [5] M. W. Marcellin and H. J. Weber. "Two-dimensional modulation codes". *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 10(3):254–266, September 1992.
- [6] A. Kato and K. Zeger. "On the capacity of two-dimensional run-length constrained channels". *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(45):1527–1540, July 1999.
- [7] Tadao Murata. "Petri Nets: Properties, Analysis and Applications". *Proceedings of the IEEE*, pages 541–580, April 1989.
- [8] Francisco M. de Assis and Tomaz C. Barros. "Evaluation of Petri Nets Compressibility". *1997 IEEE International Symposium on Information Theory*, page 323, June 29 - July 4 1997.
- [9] Gregory L. Silvas and B.V.K. Kumar. "A Simple Two-Dimensional Run-Length-Limited Code for Ultra-High-Density Magnetic Recording". *Proceedings of International Communications Conference - ICC'95*, pages 633–637, 1995.