

Capacidade de Sistemas Concorrentes e Redes de Petri

Edmar C. Gurjão, Francisco M. de Assis, Angelo Perkusich e Cecílio Pimentel

Resumo— Neste trabalho apresenta-se uma extensão de uma medida de complexidade para redes de Petri [7], bem como um método para o seu cálculo. O conceito de sistema concorrente com restrição é introduzido juntamente com um método de cálculo da capacidade desse tipo de sistema baseado no modelo de Petri correspondente.

Palavras-Chave— Capacidade, Complexidade, Redes de Petri e Concorrência.

Abstract— In this paper a previously defined complexity measure of Petri nets [7] is extended along with a method to its calculation. The concept of concurrent constrained system is introduced and it is shown that the capacity of this system can be obtained from its specifying Petri net model.

Keywords— Capacity, Complexity, Petri Nets and Concurrency.

I. INTRODUÇÃO

Fundamentalmente a transmissão e a recepção de informação consiste respectivamente na escolha de sinais físicos pelo emissor e no reconhecimento dos sinais recebidos pelo receptor. Os sinais mencionados serão chamados de *eventos* no âmbito deste trabalho. Em sistemas de comunicação ponto-a-ponto (um transmissor e um receptor) os eventos escolhidos/causados respectivamente no transmissor/receptor podem ser facilmente ordenados no sentido definido por Petri [1]. Entretanto, para sistemas de comunicação em rede (vários transmissores vários receptores) esse ordenamento somente é possível para alguns eventos. Esta impossibilidade de ordenamento de eventos define a relação de *concorrência* entre eventos [1]. Por outro lado, apesar do sucesso da teoria da informação em sistemas ponto-a-ponto muitos problemas da teoria de informação para redes ainda estão em aberto [2]. Estes problemas envolvem fenômenos como interferência, cooperação e realimentação.

Um conflito se caracteriza pela escolha excludente entre dois ou mais eventos, dois ou mais eventos são concorrentes quando eles são causalmente independentes,

E. Gurjão, F. Assis e A. Perkusich estão ligados ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Brasil, ecandeia,fmarcos,perkusic@dee.ufcg.edu.br C. Pimentel está ligado ao Departamento de Eletrônica e Sistemas da Universidade Federal de Pernambuco, P.O.Box 7800, 50711-970, Recife, Brasil, cecilio@ufpe.br.

portanto sendo o fluxo de informação em redes produzido por eventos gerados nos transmissores e observados nos receptores é razoável que os problemas da teoria da informação para redes possam ser tratados sob a óptica da teoria dos sistemas concorrentes [1].

A redes de Petri (PN, do inglês *Petri Nets*) constituem uma ferramenta importante surgida no contexto da teoria dos sistemas concorrentes, que permite modelar sistemas que apresentam concorrência, conflito, paralelismo e distribuição. Portanto é natural investigar a aplicação da teoria de Petri no contexto da teoria da informação para redes sendo esta a motivação principal deste trabalho. Por outro lado, também é possível questionar como os resultados da teoria da informação podem ser aplicados no contexto da teoria de redes de Petri para prover novos resultados e metodologias.

Por simplicidade, neste artigo nos concentraremos em sistemas com restrição e sem ruído. Para esses sistemas as medidas de entropia e capacidade são bem conhecidas se a concorrência não está presente [3]. Como exemplo desses sistemas considere o canal discreto sem ruído (DNC, do inglês *Discrete Noiseless Channel*) no qual somente seqüências que obedecem a restrição do canal podem ser transmitidas. A capacidade de um DNC, foi definida em [4] como

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 N(n)}{n}, \quad (1)$$

sendo $N(n)$ o número máximo de seqüências permitidas de comprimento n . A capacidade C representa a taxa máxima de transmissão da informação permitida por esse canal. Sistemas de gravação magnética com restrição nos comprimentos (RLL) são exemplos de DNCs nos quais as seqüências de símbolos gravadas tem uma correspondência unívoca com as seqüências de eventos físicos, especificamente as correntes elétricas polarizadas, então $N(n)$ na Equação 1 pode ser vista como o número de seqüências desses eventos. Note que o número de seqüências válidas é aproximadamente dada por $M(n) \approx 2^{nC}$, desse modo, a capacidade C pode ser vista como uma medida de complexidade do sistema representado pela definição do canal. No caso em que um diagrama finito de transições de estados (FSTD, do inglês *finite state transition diagram*) que modele as

é bem profunda [5]. Os axiomas a seguir [6] definem precisamente as conseqüências da ocorrência de um *step*:

- A1: Um *step* transforma uma marcação M em outra marcação M' .
 A2: *Steps* são a única fonte de mudanças numa PN.
 A3: Um *step* E está habilitado se $\forall t_i \in E : p \in \bullet t_i \Rightarrow M(p) \neq 0$.
 A4: (Regra de disparo) Se um *step* E ocorre em uma marcação M produzindo uma nova marcação M' (representada por $M[E]M'$), então para todo $t_i \in E$, uma ficha é removida de cada lugar em $\bullet t_i$ e acrescentada a cada lugar $p \in t_i^\bullet$.

Estes axiomas definem precisamente a noção de *transição em um step* de uma marcação M para uma nova marcação M' pela ocorrência de um conjunto $E \subseteq T$, isto é, uma conjunto de transições *concorrentes* que podem ocorrer numa PN.

Para representar a relação entre marcações e *steps*, seja a seguinte definição.

Definição 4 (Grafo de cobertura): O grafo de cobertura $G = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ de uma rede de Petri $(\mathbb{H}\mathbb{M}_0)$ é um grafo direcionado (cuja raiz é M_0), e o conjunto de vértices \mathcal{M} é o conjunto de todas as marcações e, $\mathcal{E}\mathcal{C}$ é o conjunto de arcos conectando dois vértices M, M' tais que $M[E]M'$, sendo que M e M' estão em \mathcal{M} e $E \in \mathcal{E}$. Para redes limitadas o grafo de cobertura é denominado de *grafo de alcançabilidade*.

Para construir o grafo de cobertura inicia-se com a marcação M_0 e obtém-se as próximas marcações alcançadas pelos disparos dos *steps* habilitados em M_0 . Para cada nova marcação repete-se o disparo dos *steps* habilitados nessa marcação e observa-se as marcações alcançadas.

Vale observar que um grafo é determinístico se, para vértices $I \in \mathcal{V}$, os arcos de saída de I são rotulados distintamente. Dos axiomas A1-A4 tem-se que o grafo de cobertura é determinístico. Mostra-se em [8] que o número de vértices no grafo de cobertura é sempre finito.

Na próxima seção, uma medida entrópica para as redes de Petri é apresentada.

III. COMPRESSIBILIDADE DAS REDES DE PETRI

Nesta seção a medida entrópica para as redes de Petri, definida em [7] como compressibilidade, é estendida para o cálculo da capacidade de sistemas com concorrência.

A definição de compressibilidade é similar àquela apresentada na Equação 1 para canais discretos sem ruído, sendo que aqui o número de seqüências de comprimento n de símbolos é substituída pelo número de seqüências de comprimento n de *steps*. Em seguida,

define-se um sistema concorrente com restrição a capacidade desse sistema é relacionada com a compressibilidade.

Definição 5: A compressibilidade de uma rede de Petri é dada por

$$H_{PN} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 N(n)}{n} \quad (\text{bits por step}) \quad (2)$$

sendo $N(n)$ o número de seqüências de *steps* de comprimento n nessa rede. O limite em (2) existe porque $N(n)$ é uma função sub-aditiva de n [3, p. 104].

É importante notar que o parâmetro H_{PN} é um expoente para a contagem da seqüência de comprimento n de *steps* no grafo de cobertura, isto é, $N(n)$ cresce aproximadamente com $2^{nH_{PN}}$. Da definição, pode-se dizer que, para um $\epsilon > 0$ arbitrário, existe um inteiro n suficientemente grande tal que

$$2^{n(H_{PN}-\epsilon)} \leq N(n) \leq 2^{n(H_{PN}+\epsilon)}, \quad (3)$$

conseqüentemente é possível mapear cada uma das $N(n)$ seqüências de *steps* em um único bloco de $\lceil n(H_{PN} + \epsilon) \rceil$ bits. Assim, a compressibilidade pode ser interpretada como o número mínimo de bits por *step* necessários para representar completamente o grafo de cobertura. Como toda a informação sobre a rede de Petri está contida no seu grafo de cobertura, conclui-se que a compressibilidade também pode ser interpretada como a complexidade descritiva [9, p.144] da PN que ela foi obtida.

Para uma PN com um conjunto de transições $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{|T|}\}$, existem no máximo $2^{|T|} - 1$ *steps*, pois eles foram definidos como conjuntos não vazios de T . Assim, $N(n) \leq (2^{|T|} - 1)^n$ para todo n , o portanto:

$$\frac{\log_2 N(n)}{n} \leq \log_2(2^{|T|} - 1), \quad (4)$$

então $H_{PN} \leq |T|$. Observa-se que para sistemas sem concorrência o conjunto $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{|T|}\}$ pode formar no máximo $|T|^n$ seqüências de eventos (não de *steps*) de comprimento n , então sua compressibilidade é limitada por $H_{PN} \leq \log |T| < |T|$.

A observação a seguir é válida para redes de Petri limitadas, isto é, PN tais que para qualquer lugar, $M(p_i) \leq b, b > 0$.

Observação 1: Para uma rede de Petri limitada com $|P|$ lugares e conjunto de transições: $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{|T|}\}$

$$H_{PN} \leq \min(|T|, |P| \times \log_2(b+1)) \quad (5)$$

A. Calculando a Compressibilidade

O comportamento assintótico de $N(n)$ para uma rede de Petri pode ser obtida de seu grafo de cobertura. Como o grafo de cobertura tem um número finito de vértices, é

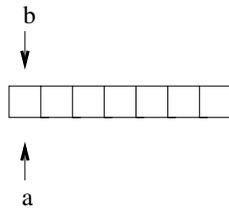


Fig. 2. Representação de dois usuário escrevendo independentemente em um mesmo papel.

possível construir uma matriz finita de adjacências \mathbf{A}_{PN} deste grafo (a (i, j) -ésima entrada de \mathbf{A}_{PN} é o número de arcos iniciando no vértice i e terminando no vértice j). Usando um argumento similar ao de Shannon [4], a compressibilidade é determinada pelo logaritmo na base dois do maior autovalor de \mathbf{A}_{PN} .

É um assunto de investigação futura construir um método de calcular a compressibilidade de uma PN “direto da sua estrutura”. Conclui-se que as redes de Petri são uma “compactação” bastante eficiente de um sistema concorrente enquanto o seu grafo de cobertura é um tipo de “aproximação por retorno a máquina de estados finitos”.

Arcos no grafo de cobertura de uma PN correspondem a *steps* representando eventos no sistema físico. Porém nem todos os eventos físicos tem informação distinta. Por exemplo, seja um sistema no qual dois usuário a e b podem independentemente (concorrentemente) perfurar um mesmo espaço, veja Figura 2. Se a , b ou ab marcam tem-se a mesma informação, portanto é necessário atribuir símbolos idênticos a esses eventos físicos. Assim, é de interesse construir um grafo que caracteriza as seqüências de símbolos sobre um alfabeto \mathcal{A} que obedecem a um conjunto de restrições. Para tratar com ocorrência simultânea de símbolos, tem-se as seguintes definições.

Definição 6 (Grafo de cobertura rotulado): Seja uma PN com grafo de cobertura $G = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$. O grafo de cobertura rotulado $G_{\mathcal{A}}$ consiste no par (G, \mathcal{L}) , sendo que a função de rotulação $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ associa a cada arco (*step*) $E \in \mathcal{E}$ um rótulo $\mathcal{L}(E)$ do alfabeto finito \mathcal{A} .

Observe que o grafo base de $G_{\mathcal{A}}$ é o grafo de cobertura G .

Definição 7 (Sistemas concorrentes restringidos): Seja $G_{\mathcal{A}}$ um grafo de cobertura de uma PN. Um sistema concorrente restringido sobre o alfabeto \mathcal{A} é conjunto de todas as seqüências obtidas pela leitura dos rótulos de caminhos no grafo $G_{\mathcal{A}}$.

A capacidade de um sistema concorrente restringido é definido de forma natural pela Equação 1, sendo $N(n)$ visto como o número de seqüências de subconjuntos permitidos de um alfabeto \mathcal{A} . Propõe-se o seguinte

procedimento para o cálculo da capacidade:

1. Construa o modelo em rede de Petri do sistema e obtenha seu grafo de cobertura
2. Defina uma função $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ que associa a cada *step* um dos símbolos de \mathcal{A}
 - 2.1 Se o grafo $G_{\mathcal{A}}$ é determinístico obtenha o maior autovalor da matriz de adjacências desse grafo. A capacidade é o logaritmo desse maior autovalor.
 - 2.2 Se $G_{\mathcal{A}}$ não é determinístico, um algoritmo que produz um grafo determinístico a partir dele, chamado de *construção de subconjuntos* (*subset construction*) [3, p. 76], pode ser aplicado e a capacidade é o logaritmo na base dois do maior autovalor da matriz de adjacência do novo grafo, que agora é determinístico.

Se o grafo $G_{\mathcal{A}}$ é determinístico, *steps* em seqüências de símbolos de \mathcal{A} . Neste a capacidade de um sistema restringido é igual a compressibilidade do seu modelo em PN.

B. Exemplos de Sistemas Concorrentes com Restrição

Nesta seção apresenta-se exemplos sistemas concorrentes com restrição. Apesar de sua simplicidade, esses exemplos servem para ilustrar os conceitos básicos apresentados neste trabalho.

1) *Sistema de Transmissão em Múltiplas Trilhas:* Bruck e Blaum [10] propuseram um sistema de comunicação assíncrono que consiste de vários sub-canais em paralelo. Nesse sistema a transmissão em cada sub-canal é feita pela presença ou ausência de transições elétricas. Usando essa idéia como base tem-se o sistema com restrição definido a seguir.

Seja um sistema com várias trilhas em paralelo. Nesse sistema as transmissões em cada sub-canal são feitas por presença e ausência de transições elétricas, como em [10]. Aqui, tem-se a restrição que após inserir uma transição em uma linha em seguida tem-se ao menos uma ausência de transição. Além disso, a ausência de transição simultaneamente no conjunto de trilhas só é permitida ocorrer uma vez.

A capacidade de um sistema desse tipo com n linhas e sem qualquer restrição é $C = n$ bits por uso, pois o transmissor pode enviar em qualquer subconjunto do conjunto de trilhas.

O modelo desse sistema em rede de Petri para duas linhas é apresentado na Figura 3. Nesse modelado as transições t_1 e t_3 representam ausência de sinal, enquanto t_2 e t_4 representam presença de sinal na linha. O transmissor pode usar as linhas independentemente, o que é representado no modelo pela possibilidade de disparar as transições de cada “sub-modelo”, p.ex. os disparos de t_1 e t_2 são independentes dos disparos de t_3

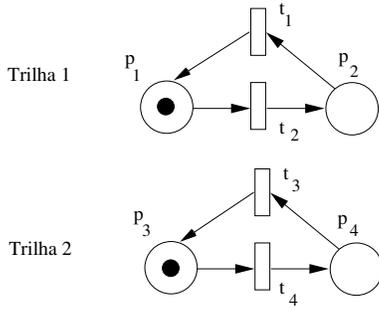


Fig. 3. Modelo em rede de Petri para o sistema de duas linhas em paralelo com restrição.

e t_4 . Esse modelo só representará corretamente o sistema após a rotulação.

O grafo de alcançabilidade dessa rede está apresentada na Figura 4. Usando esse grafo obtém-se a compressibilidade da rede $H_{PN} \cong 1 \ 2 \ 3$.

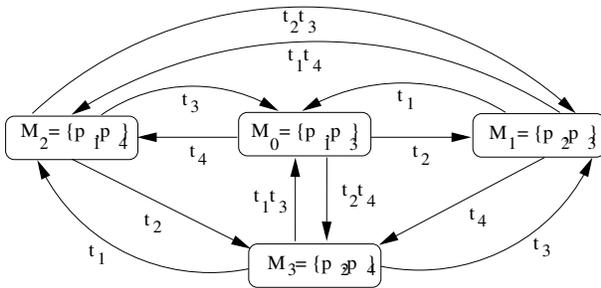


Fig. 4. Grafo de alcançabilidade do modelo da Figura 3.

Para que a rede modele a informação na forma de símbolos gravados faz-se necessário usar uma função de rotulação dos *steps*. Essa função está descrita na Tabela I.

TABELA I
FUNÇÃO DE ROTULAÇÃO DOS *steps* DO GRAFO DE ALCANÇABILIDADE DA FIGURA 4

Step	t_1	t_2	t_3	t_4	t_1, t_3	t_1, t_4
$\mathcal{L}(Step)$	(0,0)	(1,0)	(0,0)	(0,1)	(0,0)	(0,1)
Step	$\{t_2, t_3\}$	$\{t_2, t_4\}$				
$\mathcal{L}(Step)$	(1,0)	(1,1)				

Aplicando a rotulação da Tabela I ao grafo de cobertura obtém-se um grafo não determinístico. Seguindo o procedimento proposto de tornar o grafo determinístico pelo uso do algoritmo de construção de subconjuntos, tem-se que a capacidade do sistema com a restrição é $C = 0,5 \text{ bits/s}$.

2) Sistema de Gravação Assíncrono com Múltiplas Trilhas: Marcellin e Weber [11] propuseram uma aumento na densidade de gravação pelo uso de múltiplas

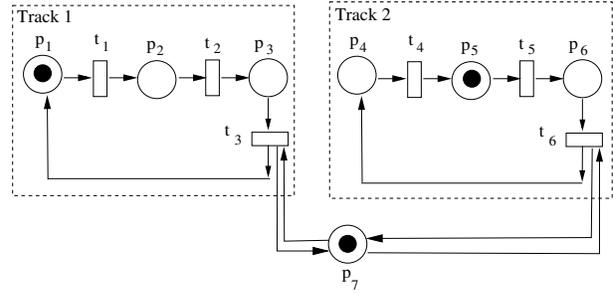


Fig. 5. Modelo em rede de Petri para um sistema de gravação assíncrono com duas trilhas nas quais a gravação em cada trilha satisfaz a restrição $(\#, \#)$ com $d = 2, k = 2$ e seu grafo de alcançabilidade.

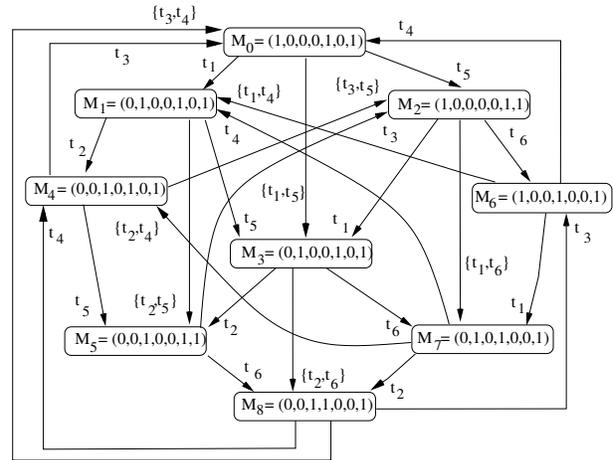


Fig. 6. Modelo em rede de Petri para um sistema de gravação assíncrono com duas trilhas nas quais a gravação em cada trilha satisfaz a restrição $(\#, \#)$ com $d = 2, k = 2$ e seu grafo de alcançabilidade.

trilhas de leitura/escrita, cada uma obedecendo a uma restrição (d, k) e operando simultaneamente em N trilhas em paralelo. Esse segundo exemplo considera uma modificação (abstrata) do esquema de Marcellin. Considere agora um sistema com duas trilhas satisfazendo a restrição $(d = 2, k) \neq 2$ em cada uma das trilhas e com uma restrição adicional que não é possível gravar 1 simultaneamente em ambas as trilhas. A trilha 1(2) é atribuída ao usuário 1(2), respectivamente.

Além das restrições acima descritas, considera-se dois métodos de operação: o método síncrono no qual ambos os usuários são obrigados a gravar informação na trilha respectiva, e o método assíncrono que considera as trilhas se movimentando em conjunto e cada usuário pode gravar independentemente na sua própria trilha. Então, três situações distintas podem ocorrer em um dado intervalo: somente o primeiro usuário está gravando, ou somente o segundo está gravando ou ambos estão gravando simultaneamente.

A rede de Petri para o método assíncrono está ilustrada na Figura 5. Observa-se que, quando as transições t_3 e t_6

estão habilitadas simultaneamente elas estão em conflito, e somente uma delas pode ocorrer, mas após a ocorrência de t_3 (t_6) uma ficha é colocada de volta no lugar p_6 e no próximo instante t_6 (t_3) pode ocorrer. O conflito entre t_3 e t_6 pode ser usado para representar a restrição na gravação simultânea de símbolos 1 em ambas as trilhas. O grafo de alcançabilidade deste modelo é mostrado na Figura 6. Na marcação $M_0 = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$ os steps t_2 , $\{t_2, t_5\}$ e t_5 podem ocorrer. Observe que o step $\{t_2, t_5\}$ representa a ocorrência concorrente destas duas transições.

Na Figura 6 existem ao menos três arcos de saída de cada nó (marcação), assim usando o alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$, pode-se construir uma rotulação bijetiva \mathcal{L} . Um exemplo dessas rotulações está mostrada na Tabela II. Esta função transforma o grafo de cobertura mostrado na Figura 6 em um grafo determinístico.

TABELA II
FUNÇÃO DE ROTULAÇÃO PARA O GRAFO DA FIGURA 6

Step	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
$\mathcal{L}(\text{Step})$	0	0	1	2	2
Step	t_6	$\{t_1, t_4\}$	$\{t_1, t_5\}$	$\{t_1, t_6\}$	$\{t_2, t_5\}$
$\mathcal{L}(\text{Step})$	2	1	1	1	1
Step	$\{t_3, t_4\}$	$\{t_3, t_5\}$			
$\mathcal{L}(\text{Step})$	0	0			

A compressibilidade dessa rede é $H_{PN} = 1,5273$ e usando a função de rotulação da Tabela II este valor de H_{PN} é a capacidade do sistema modelado por essa rede. Qualquer outra função de rotulação que use um alfabeto com tamanho menor que 3 formatá um grafo não determinístico, e portanto de compressibilidade menor que $H_{PN} = 1,5273$.

Se o sistema é forçado a ser síncrono, o conjunto de steps consiste de um subconjunto daqueles mostrados na Figura 6, que pode ser obtido removendo os steps de cardinalidade um, que correspondem a ocorrência de uma única transição.

IV. CONCLUSÕES

Neste artigo foi definida uma de complexidade, denominada de compressibilidade, para as redes de Petri. Foi mostrado que é possível calcular a compressibilidade de uma rede a partir do seu grafo de cobertura. Algumas propriedades da compressibilidade foram estabelecidas.

Para relacionar eventos físicos de uma sistema com a informação que eles produzem foi mostrado que deve-se rotular esses eventos. O sistema definido a partir do grafo de cobertura de uma rede de Petri, e de uma rotulação aplicada a esse grafo foi denominado de sistema concorrente com restrição. Foi proposto um

método de cálculo da capacidade desses sistemas e foram apresentados alguns exemplos .

O problema de calcular a compressibilidade de uma rede de Petri a partir de sua estrutura foi colocado como assunto para uma futura investigação.

REFERÊNCIAS

- [1] Carl Adam Petri. Concurrency Theory. In *Lecture Notes in Computer Science*, pages 4–24, 1987.
- [2] Anthony Ephremides and Bruce Hajek. Information Theory and Communication Networks: An Unconsummated Union. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44(6):2416–2434, 1998.
- [3] Douglas Lind and Brian Marcus. “An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding”. Cambridge University Press, New York, USA, 1995.
- [4] Claude E. Shannon. *A Mathematical Theory of Communication, Key Papers on Information Theory*. IEEE Press, New York, 1948.
- [5] Tadao Murata. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications. *Proceedings of the IEEE*, 77(4):541–580, April 1987.
- [6] C. A. Petri. Nets, Time and Space. *Theoretical Computer Science*, (153):3–48, 1996.
- [7] Francisco M. de Assis and T. C. Barros. Evaluation of Petri Nets Compressibility. *1997 IEEE International Symposium on Information Theory*, page 323, September 1997.
- [8] Wolfgang Reisig. *Petri Nets, An Introduction*. Springer-Verlag, New York ISBN 0-387-13723-8, 1985.
- [9] Thomas M. Cover and Joy A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 1991.
- [10] Mario Blaum and Jehoshua Bruck. Coding for Skew-Tolerant Parallel Assynchronous Communications. *IEEE Transactions on Information Theory*, 39(2):379–388, March 1993.
- [11] M. W. Marcellin and H. J. Weber. Two-dimensional modulation codes. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 10(1):254–266, January 1992.