

Limite Superior para o Passo de Adaptação do Algoritmo LMS Filtrado

Orlando J. Tobias e Rui Seara

Resumo—Este trabalho apresenta um limite superior para o passo de adaptação do algoritmo LMS filtrado obtido a partir de uma modificação na estrutura desse algoritmo. Tal modificação é baseada na hipótese de que a resposta ao impulso do caminho secundário tenha curta duração. Assim, as expressões analíticas derivadas para o algoritmo LMS filtrado passam a apresentar forma similar às do LMS convencional, possibilitando a direta obtenção de um limite superior para o passo de adaptação, como também de outros parâmetros, tais como erro mínimo, desajuste, dentre outros. Resultados experimentais são apresentados para corroborar a validade das expressões obtidas.

Palavras-Chave—Passo de adaptação, LMS filtrado, hipótese de independência.

Abstract—In this paper, we present an upper bound for the step-size parameter of the FXLMS algorithm. Such a derivation is obtained from a modification in the structure of that algorithm, which is based on the assumption that the impulse response of the secondary path has short duration. Thus, simpler analytical expressions for the first and second moments of the FXLMS algorithm are obtained. The resulting model equations have similar form as those of the ordinary LMS algorithm. This fact permits that important parameters, such as an upper bound for the step-size, minimum error, misadjustment, can be straightforwardly obtained. Experimental results are provided to assess the correctness of the present analysis.

Index Terms—Step-size, filtered LMS, independence assumption.

I. INTRODUÇÃO

O algoritmo LMS filtrado (FXLMS) é amplamente utilizado em aplicações de controle ativo de ruído e vibrações. A existência de uma função de transferência em série com o filtro adaptativo, denotada como caminho secundário, é uma característica distintiva deste algoritmo. Por exemplo, em controle ativo de ruído acústico em dutos, a função de transferência que modela o caminho secundário é representada através de um único bloco, tal como mostrado na Fig. 1(b). Esse bloco inclui as seguintes transferências: conversor D/A, filtro de reconstrução, amplificador de potência, alto-falante, caminho acústico do alto-falante até o microfone de erro, microfone de erro, pré-amplificador, filtro

anti-recobrimento, e conversor A/D. A presença dessa transferência no caminho de adaptação faz com que os modelos analíticos, para os momentos de primeira e de segunda ordens, sejam complexos do ponto de vista matemático. Assim, para facilitar a análise do algoritmo FXLMS, alguns autores assumem a condição de adaptação lenta, a qual permite que seja comutada a posição do bloco do filtro adaptativo com a do caminho secundário, como ilustrado na Fig. 2. Deve-se observar que esta operação não é fisicamente possível, sendo apenas um artifício objetivando facilitar a análise teórica do algoritmo. Entretanto, tal operação permite que agora sejam utilizados, quase que de forma direta, os resultados analíticos do algoritmo LMS convencional [1], sendo esse fato a característica a ser explorada neste trabalho.

O efeito do caminho secundário (S) sobre a modelagem do algoritmo FXLMS resulta em que os modelos para os momentos de primeira e segunda ordens sejam representados por equações de diferenças de ordem superior [2,3]. Dessa forma, as expressões analíticas para o diagrama em blocos da Fig. 1(b) são matematicamente complicadas de se trabalhar, em particular, a expressão da matriz de covariância que fornece o limite superior do passo de adaptação do algoritmo. Na literatura, expressões analíticas para o limite superior do passo de adaptação são obtidas de forma heurística [4], no domínio da frequência [5,6], ou ainda, a partir de modelos que utilizam a teoria da independência [6-8]. Entretanto, trabalhos recentes [2,3] têm mostrado que tal suposição [9] não deve ser mais usada na análise do algoritmo FXLMS. Por outro lado, o algoritmo LMS convencional é descrito por equações de diferenças de ordem um, muito mais simples de serem manipuladas. Assim, o objetivo deste trabalho é, considerando a hipótese de que a resposta ao impulso do caminho secundário tenha curta duração, obter expressões mais simples (do estilo das obtidas para o LMS convencional) para o modelo do algoritmo FXLMS filtrado que permita determinar um limite superior de estabilidade desse algoritmo. Também, por se tratar do caso filtrado, não utilizaremos a teoria da independência na análise aqui apresentada. Na seção correspondente aos resultados experimentais, mostraremos que a suposição de adaptação lenta não é tão restritiva que possa invalidar a análise proposta, desde que a resposta do caminho secundário seja de curta duração. A partir de simulações, verificamos que o limite superior de μ obtido representa uma boa estimativa do valor máximo para o passo de adaptação do algoritmo FXLMS para a condição estabelecida.

Orlando J. Tobias e Rui Seara, LINSE – Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, E-mails: {orlando, seara}@linse.ufsc.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq.

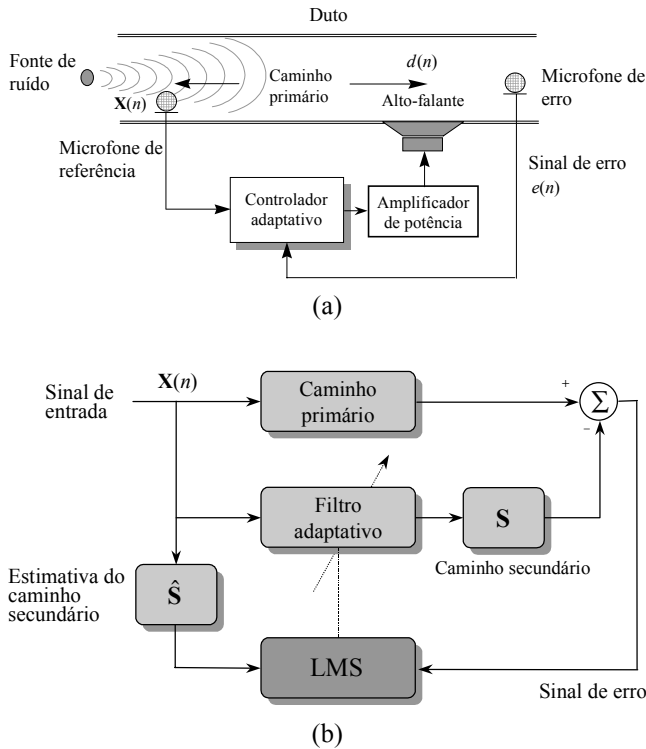


Fig. 1. (a) Caso de um controle ativo de ruído acústico em um duto. (b) Diagrama em blocos do algoritmo LMS filtrado.

O limite superior para o passo de adaptação depende do caminho secundário, no entanto, no caso prático o que temos disponível é apenas sua estimativa. Assim, é proposta uma expressão para determinar tal limite em função da estimativa do caminho secundário (\hat{S}) ao invés de S . Para tal, utilizando [10,11] é possível obter uma aproximação para o limite superior do passo de adaptação, como discutido na Seção 4.

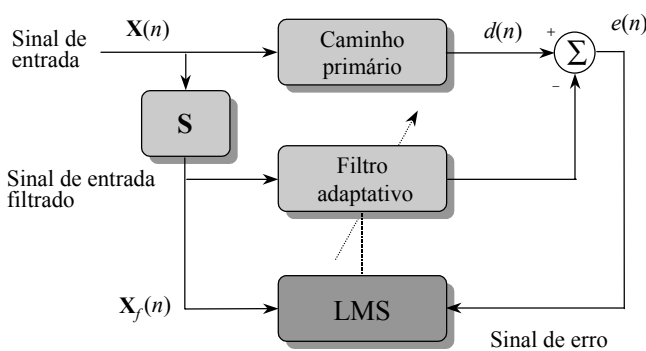


Fig. 2. Diagrama em blocos modificado do algoritmo FXLMS considerando adaptação lenta.

II. ANÁLISE

A. Equação de Atualização dos Coeficientes do Algoritmo FXLMS Modificado

Para determinar a equação de atualização dos coeficientes primeiramente determinaremos, a partir da Fig. 2,

acrescentando-se um ruído de medição $z(n)$ ao sinal $d(n)$, o sinal de erro, dado por:

$$e(n) = d(n) - \mathbf{X}_f^T(n) \mathbf{W}(n) + z(n), \quad (1)$$

onde $\mathbf{X}_f(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{X}(n-i)$ é o vetor de entrada filtrado; o vetor de entrada é definido por: $\mathbf{X}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-N+1)]^T$. As amostras de $\mathbf{X}(n)$, denotadas por $x(n)$, são Gaussianas, com média zero e variância σ_x^2 . O vetor $\mathbf{W}(n) = [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_{N-1}]^T$ representa o vetor de coeficientes do filtro adaptativo e $d(n)$ é o sinal desejado ou sinal primário. Na Eq. (1), $z(n)$ representa um ruído de medição, o qual é i.i.d., com média zero, variância σ_z^2 e independente de qualquer outro sinal no sistema. A resposta ao impulso do caminho secundário, denotado por S , é representada por um filtro FIR de dimensão M , dado por: $[s_0 \ s_1 \ \dots \ s_{M-1}]^T$. Assim, de [6, p.65], a expressão recursiva para atualizar os coeficientes do filtro adaptativo da Fig. 2 é dada por:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \mu [d(n) \mathbf{X}_f(n) - \mathbf{X}_f(n) \mathbf{X}_f^T(n) \mathbf{W}(n) + \mathbf{X}_f(n) z(n)]. \quad (2)$$

É interessante expressar (2) em termos dos coeficientes do caminho secundário, assim, ela é reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \mu \left(\sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{X}(n-i) d(n) \right. \\ \left. - \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} s_i s_j \mathbf{X}(n-i) \mathbf{X}^T(n-j) \mathbf{W}(n) \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{X}(n-i) z(n) \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Neste ponto, é interessante comparar a Eq. (3) com a equação de atualização dos coeficientes para o diagrama em blocos da Fig. 1(b), obtida a partir de [3], dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \mu \left(\sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{X}(n-i) d(n) \right. \\ \left. - \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} s_i s_j \mathbf{X}(n-i) \mathbf{X}^T(n-j) \mathbf{W}(n-j) \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{X}(n-i) z(n) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Tal como foi comentado, (4) é uma equação de diferenças de ordem M , com $M > 1$, enquanto que (3), para o algoritmo FXLMS modificado, é representada por uma equação de primeira ordem. Da comparação entre (3) e (4), podemos verificar que, partindo de (4) pode-se obter (3) na hipótese de

convergência lenta. Assim, podemos utilizar a seguinte aproximação: $\mathbf{W}(n) \approx \mathbf{W}(n-j)$, para $j = 0, \dots, M-1$. Justificando, assim, a comutação entre os blocos correspondentes a $\mathbf{W}(n)$ e \mathbf{S} , resultando na Fig. 2.

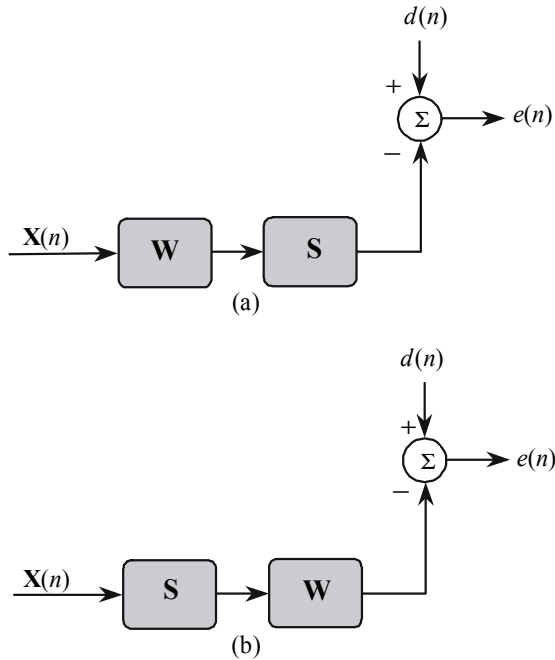


Fig. 3. Diagramas em blocos para a determinação dos coeficientes ótimos: (a) para a Fig. 1(b) e (b) para a Fig. 2.

B. Determinação do Momento de Primeira Ordem do Vetor de Erro nos Coeficientes

O vetor de erro nos coeficientes é obtido a partir do conhecimento do vetor de coeficientes ótimo, denotado por \mathbf{W}_{ot} . Pode-se verificar que para os dois diagramas ilustrados na Fig. 3 obtém-se a mesma expressão para \mathbf{W}_{ot} . Portanto, as duas estruturas devem possuir o mesmo valor em regime permanente para os coeficientes do filtro adaptativo. Assim, de [3], tem-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{W}_{ot} = \tilde{\mathbf{R}}_{ss}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_s, \quad (5)$$

onde o vetor de correlação cruzada $\tilde{\mathbf{P}}_s$ e a matriz de autocorrelação $\tilde{\mathbf{R}}_{ss}$ são, respectivamente, dados por:

$$\tilde{\mathbf{P}}_s = \sum_{i=0}^{M-1} s_i E[d(n)\mathbf{X}(n-i)], \quad (6)$$

e

$$\tilde{\mathbf{R}}_{ss} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} s_i s_j E[\mathbf{X}(n-i)\mathbf{X}^T(n-j)]. \quad (7)$$

A expressão para o vetor de erro nos coeficientes é dada por $\mathbf{V}(n) = \mathbf{W}(n) - \mathbf{W}_{ot}$. Assim, subtraindo \mathbf{W}_{ot} de ambos os

lados de (3), determinado o valor esperado da expressão resultante e utilizando (5), tem-se:

$$E[\mathbf{V}(n+1)] = (\mathbf{I} - \mu \tilde{\mathbf{R}}_{ss}) E[\mathbf{V}(n)], \quad (8)$$

onde, para obter (8), é utilizada a seguinte aproximação $E[\mathbf{X}(n-i)\mathbf{X}^T(n-j)\mathbf{V}(n)] \approx E[\mathbf{X}(n-i)\mathbf{X}^T(n-j)]E[\mathbf{V}(n)] \forall i, j$ [3]. É importante notar que com a utilização da teoria da independência [9], o valor esperado $E[\mathbf{X}(n-i)\mathbf{X}^T(n-j)]$ é zero para $i \neq j$.

B. Determinação do Momento de Segunda Ordem do Vetor de Erro nos Coeficientes

Para determinar o erro médio quadrático do sinal de erro, primeiramente, expressamos (1) em função de $\mathbf{V}(n)$, e elevando ao quadrado e tomando o valor esperado da expressão resultante, obtém-se:

$$\begin{aligned} E[e^2(n)] &= E[d^2(n)] - 2\tilde{\mathbf{P}}_s^T (E[\mathbf{V}(n)] + \mathbf{W}_{ot}) \\ &\quad + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{R}}_{ss} E[\mathbf{V}(n)]\mathbf{W}_{ot}^T\} + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{R}}_{ss} \mathbf{W}_{ot} E[\mathbf{V}^T(n)]\} \\ &\quad + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{R}}_{ss} E[\mathbf{V}(n)\mathbf{V}^T(n)]\} + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{R}}_{ss} \mathbf{W}_{ot} \mathbf{W}_{ot}^T\} + \sigma_z^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Observamos que (9) depende da matriz de covariância do vetor de erro nos coeficientes $E[\mathbf{V}(n)\mathbf{V}^T(n)]$, a qual deve ser determinada. Uma expressão recursiva para essa matriz é obtida do produto $\mathbf{V}(n)\mathbf{V}^T(n)$ e determinando o valor esperado da expressão resultante, o qual, utilizando a notação $\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{V}(n)\mathbf{V}^T(n)]$, resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n) &= \mathbf{K}(n-1) - \mu(\mathbf{K}(n-1)\tilde{\mathbf{R}}_{ss} - \tilde{\mathbf{R}}_{ss}\mathbf{K}(n-1)) \\ &\quad + \mu^2(2\tilde{\mathbf{R}}_{ss}\mathbf{K}(n-1)\tilde{\mathbf{R}}_{ss} + \tilde{\mathbf{R}}_{ss}\text{tr}\{\tilde{\mathbf{R}}_{ss}\mathbf{K}(n-1)\}) + \mu^2\tilde{\mathbf{R}}_{ss}\sigma_z^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Agora, é interessante comparar a Eq. (10) com a Eq. (15) de [2], podendo-se observar a maior simplicidade de (10), resultante da comutação dos blocos. Também, devemos notar que as Eqs. (8) e (10) possuem a mesma forma que as correspondentes ao algoritmo LMS clássico [1,12,13]. Essa característica é importante devido ao fato de que é possível estender os resultados disponíveis para o LMS clássico ao caso filtrado. Assim, a partir de (10), o limite superior para o passo de adaptação é obtido de forma direta pela substituição de $\tilde{\mathbf{R}}_{ss}$ por \mathbf{R} na expressão correspondente ao LMS convencional [12,13], resultando em

$$\mu < \frac{2}{3\text{tr}\{\tilde{\mathbf{R}}_{ss}\}}. \quad (11)$$

Para fins práticos, é interessante expressar (11) em termos dos coeficientes do caminho secundário \mathbf{S} , resultando em

$$\mu < \frac{2}{3 \left(Nr(0) \sum_{i=0}^{M-1} s_i^2 + 2N \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1-i} r(i) s_j s_{j+i} \right)}, \quad (12)$$

onde $r(k) = E[x(n)x(n-k)] = E[x(n-k)x(n)]$, para $k = 0, \dots, M+N-2$. Utilizando $\mathbf{S} = [1, 0, \dots, 0]^T$ e um sinal de entrada branco [$r(0) = \sigma_x^2$ e $r(k) = 0$ para $k \neq 0$], a expressão (12) se transforma na conhecida expressão $\mu < 2/(3N\sigma_x^2)$ do algoritmo LMS convencional.

III. LIMITE SUPERIOR PARA APLICAÇÕES PRÁTICAS

O limite superior em (12) depende do modelo do caminho secundário \mathbf{S} , o qual é *a priori* desconhecido. Por outro lado, os sistemas de controle ativo precisam estimar essa função de transferência por questões de implementação do algoritmo adaptativo. Tal estimação pode ser realizada como apresentado em [6, cap.7]. Como resultado deste processo, obtemos $\hat{\mathbf{S}}$ que é uma aproximação de \mathbf{S} . Nesta seção vamos estudar como utilizaremos essa informação na Eq. (12). Assim, assumindo que tal estimação é de ordem suficiente, podemos expressar o caminho secundário como sendo uma função dessa estimação e do correspondente erro de estimação, assim $\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}} + \boldsymbol{\delta}$. O vetor $\boldsymbol{\delta}$ contém os erros de estimação para cada coeficiente, ou seja, $s_i = \hat{s}_i \pm \delta_i$. Se assumimos que na estimativa de \mathbf{S} é utilizado um ruído branco e considerando a relação $\sum_{i=0}^{M-1} s_i^2 = \|\mathbf{S}\|^2 = \|\hat{\mathbf{S}} + \boldsymbol{\delta}\|^2 = \|\hat{\mathbf{S}}\|^2 + 2\hat{\mathbf{S}}^T \boldsymbol{\delta} + \|\boldsymbol{\delta}\|^2$, a expressão (12) pode ser reescrita agora da seguinte forma:

$$\mu < \frac{2}{3N\sigma_x^2 \left(\|\hat{\mathbf{S}}\|^2 + 2\hat{\mathbf{S}}^T \boldsymbol{\delta} + \|\boldsymbol{\delta}\|^2 \right)}. \quad (13)$$

A Eq. (13) pode ser ainda mais simplificada se considerarmos que $\delta_i = \Delta \quad \forall i$ com $\Delta \equiv \|\boldsymbol{\delta}\|/M$ e que os erros são positivos, ou seja, $s_i = \hat{s}_i + \Delta$, o que resulta em um menor valor no lado direito de (13). Em [11] é apresentada uma expressão que relaciona o erro de estimação com o passo de adaptação utilizado pelo algoritmo LMS, efetuando a identificação do caminho secundário. Tal expressão é dada por:

$$10 \log_{10} \frac{1}{\|\boldsymbol{\delta}\|^2} = SNR + 10 \log_{10} \left(\frac{2}{\mu_{SP}} - 1 \right), \quad (14)$$

onde SNR e μ_{SP} representam a razão sinal-ruído e o passo de adaptação, utilizado na identificação em [6, Fig. 7.2],

respectivamente. Como resultado, o limite superior para o passo de adaptação, obtido a partir de (13) e (14), fornece uma indicação do valor a ser utilizado na prática. Como exemplo, consideraremos $N = 64$ e $\mathbf{S} = [1, 5; 1; -0, 7]$, o limite superior para o μ , obtido de (12), é 0,002785, entretanto, de (13) e (14) obtém-se 0,002773. Esse valor é determinado a partir de (14) assumindo que $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}$, $SNR = 20$ dB, $\mu_{SP} = 0,1/M$ e $M = 3$. Assim, o valor estimado de (13) é menor do que o obtido a partir de (12) devido às considerações utilizadas. Tal fato não representa uma desvantagem, já que dessa forma o valor que deve ser utilizado na prática possui uma certa tolerância.

IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Para verificar a Eq. (12), utilizamos uma aplicação de identificação de sistemas com a planta modelada pela função $\text{sinc}_i(\ell)$ com $i = 8, 16, 32, 64, 128$ coeficientes, e $\ell = 0, 1, \dots, i-1$. O caminho secundário é dado por $\mathbf{S} = [1, 5; 1; -0, 7]$ e o sinal de entrada é um ruído branco com variância unitária. A Fig. 4 ilustra os resultados obtidos para o limite superior proposto para o passo de adaptação, Eq. (12), e os valores máximos, obtidos de forma experimental para o diagrama em blocos do algoritmo FXLMS (Fig. 1(b)) (indicados por círculos) e para o algoritmo FXLMS modificado (Fig. 2) (indicados por quadrados). A Fig. 4 também ilustra o valor do passo de adaptação para o qual ambos os diagramas em blocos, Fig. 1(b) e Fig. 2, têm o mesmo comportamento. Esse valor é denotado por μ_{EQ} e foi determinado de forma experimental. Para o exemplo apresentado, obtivemos a seguinte relação: $\mu_{EQ} = 0,2\mu_{\max}$. Entretanto, através de extensivas simulações $0,1\mu_{\max}$ representa um bom valor de referência. Isso significa que a hipótese de convergência lenta pode ser considerada a partir desse valor. Para fins de comparação, na Fig. 4 é mostrada a curva correspondente ao algoritmo LMS convencional (indicada por μ_{LMS}) [12,13], podendo-se observar o efeito do caminho secundário sobre a estabilidade do algoritmo adaptativo. A curva correspondente ao limite superior ($\mu_{[4]} = 1/(\sigma_f^2(N+M))$ dado em [4], obtida de forma heurística, com σ_f^2 representando a variância do sinal de entrada filtrado, coincide com a da Eq. (12). A Fig. 5 mostra a evolução de alguns coeficientes do filtro adaptativo ($w_0(n)$, $w_2(n)$ e $w_5(n)$) obtida via simulação Monte Carlo (média de 100 realizações independentes – curvas irregulares) para ambos os diagramas em blocos (Fig. 1(b) e Fig. 2) e seus respectivos modelos, Eq. (16) de [3] e Eq. (8), utilizando as seguintes condições: planta $\text{sinc}_8(\ell)$ e utilizando dois valores para o passo de adaptação, μ_{\max} e $\mu_{EQ} = 0,2\mu_{\max}$. Note que para valores de μ próximos a μ_{\max} , as simulações Monte Carlo do algoritmo FXLMS modificado não casam com as

correspondentes da Fig. 1(b). Isso é devido ao fato de que a hipótese de adaptação lenta está sendo violada. Entretanto, mesmo nessa condição, a Eq. (12) fornece uma boa estimativa, desde que a resposta ao impulso do caminho secundário seja de curta duração. Tal condição está associada à suposição de que $\mathbf{W}(n) \approx \mathbf{W}(n-j)$, para $i = 0, 1, \dots, M-1$.

V. CONCLUSÕES

Neste trabalho é apresentado um limite superior para o passo de adaptação do algoritmo FXLMS, obtido a partir do algoritmo FXLMS modificado. Tal modificação é baseada na hipótese de que a resposta ao impulso do caminho secundário tenha curta duração. Expressões analíticas mais simples são obtidas decorrentes da comutação da posição dos blocos correspondentes ao filtro adaptativo, $\mathbf{W}(n)$, e ao caminho secundário \mathbf{S} . Tais expressões são similares às obtidas para o algoritmo LMS convencional, permitindo derivar diretamente o limite superior para o passo de adaptação. Para o caso de caminhos secundários longos, em particular para o regime transitório, o comportamento deste modelo simplificado pode diferir do funcionamento real do algoritmo. Isso é uma consequência lógica decorrente da suposição utilizada para derivar tal modelo. Contudo, nesse caso, uma vez atingido o regime permanente, pode-se utilizar o equacionamento obtido para derivar outros importantes parâmetros do algoritmo FXLMS, tais como o erro mínimo, desajuste, dentre outros.

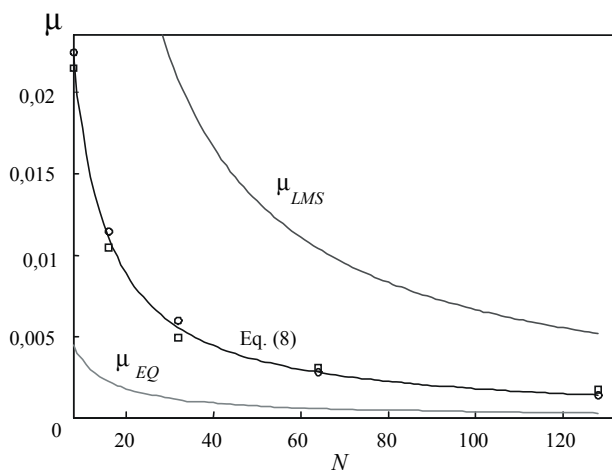


Fig. 4. Limites de estabilidade em função do número de coeficientes, N , obtidos da Eq. (12) e de forma experimental para ambos os diagramas em blocos: algoritmo FXLMS (\square), algoritmo FXLMS modificado (\circ). Algoritmo LMS clássico (μ_{LMS}) [13]. Curva μ_{EQ} , indicando a região de adaptação lenta.

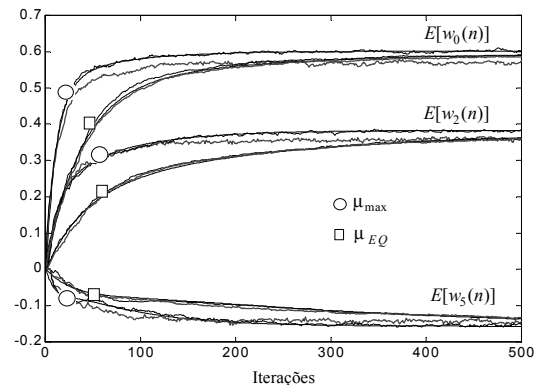


Fig. 5. Simulações numéricas: $E[\mathbf{W}(n)]$ para μ_{\max} e $0,2\mu_{\max}$. Linhas (—): obtidas utilizando (8) e (16) de [2]. Curvas irregulares grossas: simulações para a Fig. 1(b) (média de 100 realizações). Curvas irregulares finas: simulações para a Fig. 2 (média de 100 realizações).

REFERÊNCIAS

- [1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
- [2] O. J. Tobias, J. C. M. Bermudez, R. Seara and N. Bershada, "An improved model for the Second moment of the Filtered-X LMS algorithm", *Proc. AS-SPCC 2000*, pp. 337-341, Lake Louise, Alberta, Canada, Oct. 2000.
- [3] O. J. Tobias, J. C. M. Bermudez, and N. J. Bershada, "Mean weight behavior of the Filtered-X LMS algorithm", *IEEE Trans. Signal Processing.*, vol. 48, pp. 1061-1075, April 2000.
- [4] S. J. Elliott and P. A. Nelson, "Active noise control", *IEEE Signal Process. Mag.*, pp. 12-35, Oct. 1993.
- [5] P. L. Feintuch, N. J. Bershada and A. K. Lo, "A frequency domain model for filtered LMS algorithms - stability analysis, design, and elimination of the training mode," *IEEE Trans. on Signal Processing*, pp. 1518-1531, April 1993.
- [6] S. M. Kuo and D. R. Morgan, *Active Noise Control Systems: Algorithms and DSP Implementations*, New York: John Wiley, 1996.
- [7] E. Bjarnason, "Analysis of the Filtered-X LMS algorithm," *IEEE Trans. on Speech and Audio Processing*, pp. 504-514, Nov. 1995.
- [8] I. Kim, H. Na, K. Kim, and Y. Park, "Constraint filtered-X and filtered-U least-mean-square algorithms for the active control of noise in ducts," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 95, pp. 3379-3389, June 1994.
- [9] J. E. Mazo, "On the independence theory of equalizer convergence," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 58, pp. 963-993, May-June, 1979.
- [10] Y. Kajikawa, J. Yabuki and Y. Nomura, "Stable condition considering modeling error in the filtered-X LMS algorithm", *Proc. ISCAS 2000*, pp. III-642 - III-645, Geneva, Switzerland, May 2000.
- [11] H. Itakura and I. Nishikawa, "Echo cancellation property of echo canceller using the NLMS algorithm", *Trans. of IEICE*, vol. J60-A, pp. 1015-1022, Nov. 1977.
- [12] L. L. Horowitz and K. D. Senne, "Performance advantage of complex LMS for controlling narrow-band adaptive arrays", *IEEE Trans. on Circuits and Syst.*, vol. CAS-28, pp. 562-576, June 1981.
- [13] A. Feuer and E. Weinstein, "Convergence analysis of LMS filters with uncorrelated gaussian data", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 33, pp. 222-230, Feb. 1985.