

Análise Estatística do Algoritmo LMS no Domínio Transformado

Elen M. Lobato, Orlando J. Tobias e Rui Seara

Resumo—Este artigo apresenta uma análise estatística do algoritmo LMS no domínio transformado (LMS-DT). Esse algoritmo é utilizado como uma alternativa ao algoritmo LMS convencional, visando suplantá-lo os problemas de convergência desse último para o caso de sinais de entrada correlacionados. Através de simulações, pode-se constatar o bom casamento existente entre os resultados determinados via método de Monte Carlo e os obtidos através do modelo analítico proposto, tanto para o comportamento médio dos coeficientes quanto para o erro médio quadrático.

Palavras-Chave—Filtragem adaptativa, modelagem estatística, transformadas ortogonais.

Abstract—This paper presents a statistical analysis of the transform-domain LMS algorithm (TDLMS). That algorithm is used as an alternative to the ordinary LMS algorithm, aiming to overcome the convergence problems from that latter for the case of correlated input signals. Through simulations, we can verify a very good agreement between the results obtained by Monte Carlo method and the ones from the proposed analytical model for both mean coefficient behavior and mean square error.

Index Terms—Adaptive filtering, statistical modeling, orthogonal transforms.

I. INTRODUÇÃO

O algoritmo LMS é um dos algoritmos de adaptação mais utilizados, devido à sua simplicidade de implementação, robustez e baixa complexidade computacional [1-3]. Esse algoritmo, no entanto, apresenta uma baixa taxa de convergência quando o sinal de entrada é correlacionado. Todavia, não é raro encontrar tal condição em situações práticas, o que torna desvantajosa a sua utilização nesse caso. Um caminho para resolver tal problema se faz pela introdução de modificações em sua estrutura que permitam acelerar a velocidade de convergência. Uma modificação freqüentemente empregada é a ortogonalização e normalização do sinal de entrada.

Estruturas que utilizam transformadas ortogonais têm sido propostas na literatura, como uma solução ao problema de convergência do algoritmo LMS [4,5,6]. Narayan *et al.* [4] propuseram o algoritmo LMS no domínio transformado (LMS-DT), que consiste simplesmente do próprio LMS com as entradas pré-processadas pela transformada discreta de

Fourier (*discrete Fourier transform* – DFT) e com um apropriado passo de adaptação (normalizado pela potência do sinal de entrada) para cada coeficiente do filtro adaptativo. O objetivo da DFT é descorrelacionar as amostras do sinal de entrada e o da normalização do passo de adaptação é fornecer uma maior velocidade de convergência ao algoritmo adaptativo. É mostrado, em [7-9], que os algoritmos LMS-DT e LMS convencional possuem o mesmo erro em regime permanente, no entanto, o LMS-DT apresenta uma maior velocidade de convergência.

Do ponto de vista teórico, o descorrelacionador via DFT não é o mais adequado, visto que a DFT não é uma transformação ortogonal ótima. Por outro lado, a transformada de Karhunen-Loève (KLT) é ótima, mas não é viável para ser utilizada na prática por ser dependente do sinal de entrada. Existem outras transformadas ortogonais, independentes do sinal de entrada, que podem atuar como descorrelacionadores de sinais. Nesse ponto, é importante ressaltar que não há qualquer indicativo, ou prova, que garanta a superioridade de uma transformada ortogonal sobre a outra, embora cada uma delas apresente um comportamento “superior” às demais, em função da aplicação desejada. Exemplos de transformadas sub-ótimas aplicadas à filtragem adaptativa são: transformada discreta do cosseno (*discrete cosine transform* – DCT); transformada discreta do seno (*discrete sine transform* – DST); transformada discreta de Hartley (*discrete Hartley transform* – DHT); transformada de Walsh-Hadamard (*Walsh-Hadamard transform* – WHT) e transformada discreta *wavelet* (*discrete wavelet transform* – DWT) [2].

Na literatura, existem poucos trabalhos que apresentam uma análise estatística do algoritmo LMS-DT. Assim, em [10], o modelo analítico proposto não fornece um bom casamento entre as curvas de erro médio quadrático teórica e de sua contraparte experimental. Em [11], é apresentado um modelo estatístico na situação em que o filtro adaptativo é de ordem elevada. Finalmente, [12] apresenta uma análise estatística para o caso em que a variância do sinal de entrada, usada no processo de normalização, é obtida a partir de uma estimativa de primeira ordem. Porém, tal modificação eleva a complexidade computacional do algoritmo LMS-DT. Assim, o presente trabalho propõe uma análise estatística do algoritmo LMS-DT considerando os seguintes tópicos:

- a) o modelo analítico é independente tanto da ordem do filtro adaptativo quanto da matriz de transformação utilizada;

Elen M. Lobato, Orlando J. Tobias e Rui Seara, LINSE – Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, E-mails: {elen, orlando, seara}@linse.ufsc.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES e pelo CNPq.

b) a variância do sinal de entrada, utilizada na etapa de normalização, é obtida através de uma modificação da estimativa usualmente apresentada na literatura. Tal procedimento não eleva a carga computacional do algoritmo adaptativo, como acontece em [12].

Como resultado, o modelo estatístico proposto obteve um casamento muito bom com os resultados de simulações, diferentemente dos resultados obtidos em [10]. O artigo é organizado como segue. A Seção II trata os conceitos básicos da filtragem adaptativa no domínio transformado. A Seção III apresenta o procedimento utilizado para determinar a variância do sinal transformado. Na Seção IV, são apresentadas de forma detalhada as considerações para a modelagem estatística do algoritmo LMS no domínio transformado. A Seção V apresenta os resultados de simulações obtidos para um problema de identificação de sistemas. Finalmente, na Seção VI são apresentadas as conclusões do presente trabalho.

II. FILTRAGEM ADAPTATIVA NO DOMÍNIO TRANSFORMADO

Em geral, a filtragem adaptativa no domínio transformado é composta por três estágios [6], tal como ilustra a Fig. 1. Primeiramente, o sinal de entrada é pré-processado por uma matriz ortogonal unitária \mathbf{T} , tal que a entrada transformada é dada por

$$\mathbf{x}_T(n) = \mathbf{T}\mathbf{x}(n), \quad (1)$$

onde $\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T$ representa o vetor de entrada da estrutura adaptativa e $\mathbf{x}_T(n) = [x_0(n), x_1(n), \dots, x_{N-1}(n)]^T$ é o vetor de entrada transformado de dimensão $N \times 1$. A matriz transformação tem dimensão $N \times N$, onde suas linhas (ou colunas) são vetores ortonormais [13], ou seja, é válida a seguinte relação

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^T\mathbf{T} = \mathbf{I}. \quad (2)$$

O processo de ortogonalização, Eq. (1), origina uma matriz de autocorrelação do sinal transformado aproximadamente diagonal. Isso resulta em uma rotação da superfície de desempenho alinhando-a, aproximadamente, com os eixos coordenados [2,5]. Assim, a transformação ortogonal não modifica as propriedades de convergência do algoritmo LMS, pois ela não altera a geometria da superfície de desempenho do erro quadrático médio do algoritmo adaptativo. Em outras palavras, a dispersão dos autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada transformado não é alterada.

O segundo estágio do diagrama em blocos da Fig. 1 realiza a normalização do vetor transformado em relação à sua variância [6]. A relação entre o vetor de entrada transformado e esse mesmo vetor transformado e normalizado é dada pela seguinte expressão:

$$\tilde{\mathbf{x}}_T(n) \triangleq \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{x}_T(n), \quad (3)$$

onde $\tilde{\mathbf{x}}_T(n) = [\tilde{x}_0(n), \tilde{x}_1(n), \dots, \tilde{x}_{N-1}(n)]^T$ é o vetor de

entrada transformado normalizado. A matriz \mathbf{D} é uma matriz diagonal, dada por $\mathbf{D} = \text{diag}[\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{N-1}^2]$. σ_i^2 , para $i = 0, 1, \dots, N-1$, representa a variância do sinal em cada sub-banda da decomposição. Assim, a normalização reduz a excentricidade da superfície de desempenho, isto é, branqueia o sinal, resultando em uma convergência mais rápida do algoritmo, quando comparada à do algoritmo LMS convencional.

Depois de pré-processado, o sinal de entrada é utilizado como entrada de um combinador linear adaptativo, cujos coeficientes são ajustados pelo algoritmo LMS da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{w}}_T(n+1) = \tilde{\mathbf{w}}_T(n) + 2\mu e(n)\tilde{\mathbf{x}}_T(n), \quad (4)$$

onde $\tilde{\mathbf{w}}_T(n) = [\tilde{w}_0(n), \tilde{w}_1(n), \dots, \tilde{w}_{N-1}(n)]^T$ é o vetor de coeficientes do filtro adaptativo e μ é o passo de adaptação. O sinal de erro é obtido a partir da Fig. 1, como segue:

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \tilde{\mathbf{w}}_T^T(n)\tilde{\mathbf{x}}_T(n). \quad (5)$$

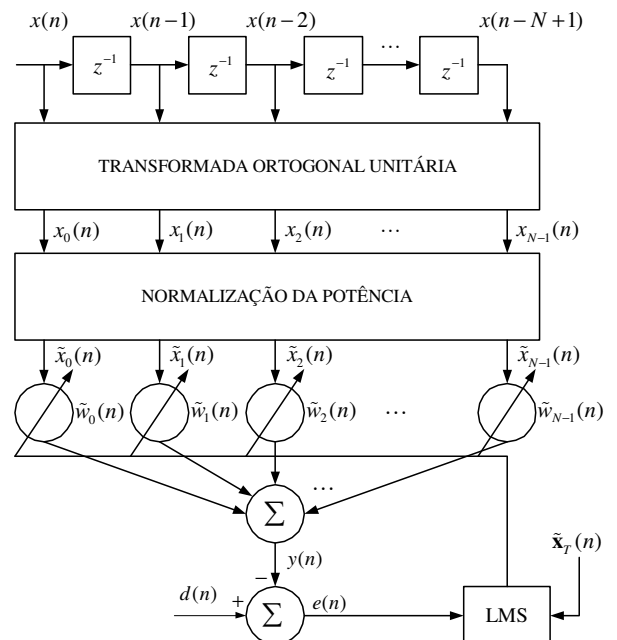


Fig. 1. Diagrama em blocos do filtro adaptativo no domínio transformado/normalizado.

A partir do princípio da conservação de energia, temos que o erro de adaptação deve ser mantido após as operações de transformação ortogonal e normalização de potência do sinal de entrada. Isso resulta na seguinte igualdade $\mathbf{w}_T(n) = \mathbf{D}^{-1/2}\tilde{\mathbf{w}}_T(n)$. Assim, podemos reescrever (4) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_T(n+1) &= \mathbf{D}^{-1/2}\tilde{\mathbf{w}}_T(n+1) \\ &= \mathbf{w}_T(n) + 2\mu\mathbf{D}^{-1}e(n)\mathbf{x}_T(n). \end{aligned} \quad (6)$$

Da Eq. (6), vemos que a etapa de normalização do sinal transformado pode ser interpretada como um fator que modifica o passo de adaptação do algoritmo. Assim, podemos considerar que o passo efetivo de adaptação do algoritmo LMS-DT clássico é dado pela seguinte matriz:

$$\boldsymbol{\mu} = 2\mu\mathbf{D}^{-1}. \quad (7)$$

Note que a Eq. (7) depende do conhecimento prévio da estatística de segunda ordem, através da matriz \mathbf{D} , do sinal de entrada transformado. No entanto, em aplicações práticas, essa informação não se encontra prontamente disponível, exigindo o cálculo através de $\|\mathbf{x}_T(n)\|^2$, ou utilizando algum outro processo que permita obter sua estimativa em tempo real. Assim, para este trabalho é utilizada a segunda opção, descrita a seguir.

III. ESTIMATIVA DA VARIÂNCIA DO SINAL TRANSFORMADO

Vamos considerar que o sinal de entrada seja estacionário com média nula. Assim, uma estimativa para a variância em cada banda pode ser obtida por:

$$\hat{\sigma}_i^2(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_i^2(k), \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (8)$$

Agora, utilizando uma janela de observação constituída por M amostras, podemos determinar, baseado em (8), uma forma recursiva para obter $\hat{\sigma}_i^2(n)$, dada por:

$$\hat{\sigma}_i^2(n) \equiv \hat{\sigma}_i^2(n-1) + \frac{1}{M} [x_i^2(n) - \hat{\sigma}_i^2(n-1)]. \quad (9)$$

Para assegurar a não divisão por zero nos casos em que o sinal de entrada não for persistente, adiciona-se uma pequena constante positiva ε à Eq. (9). Assim,

$$\tilde{\sigma}_i^2(n) = \hat{\sigma}_i^2(n) + \varepsilon. \quad (10)$$

Agora, a matriz de normalização é variante no tempo, sendo denotada por:

$$\hat{\mathbf{D}}(n) = \text{diag}[\tilde{\sigma}_0^2(n) \quad \tilde{\sigma}_1^2(n) \quad \dots \quad \tilde{\sigma}_{N-1}^2(n)]. \quad (11)$$

IV. ANÁLISE ESTATÍSTICA DO ALGORITMO LMS-DT

A. Momento de Primeira Ordem dos Coeficientes do Filtro LMS-DT

Note que no algoritmo LMS-DT clássico, Eq. (6), a matriz \mathbf{D} não depende do tempo n . Entretanto, a variância é obtida a partir de um processo de estimativa [segundo a Eq. (11)]. Esse fato vai afetar o cálculo dos valores esperados dos momentos de primeira e segunda ordens. Portanto, devemos estabelecer algumas considerações a fim de possibilitar a derivação do modelo estatístico. Elas são apresentadas a seguir:

- i) $z(n)$ é um sinal descorrelacionado de qualquer outro sinal no sistema;
- ii) $\mathbf{x}_T(n)$ é um sinal estacionário e Gaussiano com média nula;
- iii) $\mathbf{w}_T(n)$ e $\mathbf{x}_T(n)$ são estatisticamente independentes;
- iv) $\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)$ e $\mathbf{x}_T(n)\mathbf{x}_T^T(n)$ são considerados processos que variam lentamente.

Assim, de acordo com as premissas estabelecidas, a equação de adaptação dos coeficientes do LMS-DT pode ser reescrita como:

$$\mathbf{w}_T(n+1) = \mathbf{w}_T(n) + e(n)\hat{\boldsymbol{\mu}}(n)\mathbf{x}_T(n), \quad (12)$$

onde

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}(n) = 2\mu\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n), \quad (13)$$

e

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}_T^T(n)\mathbf{x}_T(n) + z(n). \quad (14)$$

Na Eq. (14), $z(n)$ representa o ruído de medição, com variância σ_z^2 . Agora, substituindo (13) e (14) em (12) e tomando o valor esperado em ambos os lados de (12), obtém-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}_T(n+1)] &= E[\mathbf{w}_T(n)] + 2\mu E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\mathbf{x}_T(n)d(n)] \\ &\quad - 2\mu E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\mathbf{x}_T(n)\mathbf{x}_T^T(n)\mathbf{w}_T(n)] \\ &\quad + 2\mu E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\mathbf{x}_T(n)z(n)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Assim, através das considerações (i), (ii) e (iii) em (15), determina-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}_T(n+1)] &= E[\mathbf{w}_T(n)] + 2\mu E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\mathbf{x}_T(n)d(n)] \\ &\quad - 2\mu E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\mathbf{x}_T(n)\mathbf{x}_T^T(n)]E[\mathbf{w}_T(n)]. \end{aligned} \quad (16)$$

O valor esperado $E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\mathbf{x}_T(n)\mathbf{x}_T^T(n)]$ de (16) é obtido considerando (iv), a qual permite o uso do princípio da média [14], resultando, assim, na seguinte aproximação:

$$E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\mathbf{x}_T(n)\mathbf{x}_T^T(n)] \approx E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)]E[\mathbf{x}_T(n)\mathbf{x}_T^T(n)]. \quad (17)$$

Substituindo (17) em (16), obtém-se a seguinte expressão para o momento de primeira ordem dos coeficientes do filtro LMS-DT:

$$E[\mathbf{w}_T(n+1)] = \{\mathbf{I} - 2\mu E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)]\mathbf{R}_T\}E[\mathbf{w}_T(n)] + 2\mu E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)]\mathbf{p}_T, \quad (18)$$

onde $\mathbf{p}_T = E[\mathbf{x}_T(n)d(n)]$. Utilizando (13), a expressão (18) pode ser reescrita como segue

$$E[\mathbf{w}_T(n+1)] = (\mathbf{I} - E[\hat{\boldsymbol{\mu}}(n)]\mathbf{R}_T)E[\mathbf{w}_T(n)] + E[\hat{\boldsymbol{\mu}}(n)]\mathbf{p}_T. \quad (19)$$

Note que para concluir o cálculo do momento de primeira ordem, devemos determinar o valor esperado $E[\hat{\boldsymbol{\mu}}(n)]$. Para tal, na Eq. (10), vamos desconsiderar os efeitos de ε [$\varepsilon \ll \sigma_i^2(n)$], e assumiremos que o processo $\{x_i(n)\}$ tenha distribuição Gaussiana, e o processo $\{x_i^2(n)\}$ tenha uma distribuição de *qui*-quadrado (χ^2) com M graus de liberdade [15]. Portanto, o valor esperado procurado é dado por (Apêndice):

$$E[\hat{\boldsymbol{\mu}}(n)] = 2\mu E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)] = \frac{2\mu M}{(M-2)} [\text{diag}(\mathbf{R}_T)]^{-1}. \quad (20)$$

Substituindo (20) em (19), obtém-se a expressão para o momento de primeira ordem do algoritmo LMS-DT. Assim,

$$E[\mathbf{w}_T(n+1)] = E[\mathbf{w}_T(n)] - 2\mu \frac{M}{M-2} [\text{diag}(\mathbf{R}_T)]^{-1} \{\mathbf{R}_T E[\mathbf{w}_T(n)] + \mathbf{p}_T\}. \quad (21)$$

B. Erro Quadrático Médio

Elevando ao quadrado ambos os lados de (14), e calculando o valor esperado da expressão resultante de acordo com as considerações (i)-(iv), obtém-se

$$E[e^2(n)] = E[d^2(n)] - 2\mathbf{p}_T^T E[\mathbf{w}_T(n)] + \text{tr}\{\mathbf{R}_T E[\mathbf{w}_T(n)\mathbf{w}_T^T(n)]\} + \sigma_z^2(n), \quad (22)$$

onde a matriz de covariância dos coeficientes do filtro LMS-DT, denotada por $\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{w}_T(n)\mathbf{w}_T^T(n)]$, é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) = & \mathbf{K}(n) - 2\mu\mathbf{K}(n)E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)]\mathbf{R}_T - 2\mu E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)]\mathbf{R}_T\mathbf{K}(n) \\ & + 4\mu^2\{2E[\hat{\mathbf{D}}^{-2}(n)]\mathbf{R}_T\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_T \\ & + E[\hat{\mathbf{D}}^{-2}(n)]\mathbf{R}_T\text{tr}\{\mathbf{R}_T\mathbf{K}(n)\} \\ & + 2\mu E[\mathbf{w}_T(n)]\mathbf{p}_T^T E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)] \\ & - 8\mu^2 E[\hat{\mathbf{D}}^{-2}(n)]\mathbf{R}_T E[\mathbf{w}_T(n)]\mathbf{p}_T^T \\ & - 8\mu^2 E[\hat{\mathbf{D}}^{-2}(n)]\mathbf{p}_T E[\mathbf{w}_T^T(n)]\mathbf{R}_T \\ & + 2\mu E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)]\mathbf{p}_T E[\mathbf{w}_T^T(n)] + 4\mu^2 E[\hat{\mathbf{D}}^{-2}(n)]\mathbf{R}_T\sigma_z^2 \\ & - 4\mu^2 E[\hat{\mathbf{D}}^{-2}(n)]\mathbf{R}_T\text{tr}\{E[\mathbf{w}_T(n)]\mathbf{p}_T^T\} \\ & - 4\mu^2 E[\hat{\mathbf{D}}^{-2}(n)]\mathbf{R}_T\text{tr}\{\mathbf{p}_T E[\mathbf{w}_T^T(n)]\} \\ & + 8\mu^2 E[\hat{\mathbf{D}}^{-2}(n)]\mathbf{p}_T\mathbf{p}_T^T + 4\mu^2 E[\hat{\mathbf{D}}^{-2}(n)]\mathbf{R}_T\text{tr}\{E[d^2(n)]\}. \end{aligned} \quad (23)$$

O valor esperado $E[\hat{\mathbf{D}}^{-2}(n)]$ em (23), é determinado de forma similar ao obtido para $E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)]$, sendo sua expressão dada por (Apêndice):

$$E[\hat{\mathbf{D}}^{-2}(n)] = \frac{M^2}{(M-2)(M-4)} [\text{diag}(\mathbf{R}_T)]^{-2}. \quad (24)$$

V. RESULTADOS

Com o objetivo de avaliar o modelo proposto, são apresentados dois exemplos aplicados a um problema de identificação de sistemas (Fig. 2). Como sinal de entrada é usado um sinal correlacionado obtido a partir de um processo auto-regressivo (AR) de segunda ordem, dado por:

$$x(n) = \alpha_1 x(n-1) + \alpha_2 x(n-2) + v(n), \quad (25)$$

onde $v(n)$ é um ruído branco com variância unitária. α_1 e α_2 são os coeficientes do processo AR, sendo seus valores $\alpha_1 = -0,1833$ e $\alpha_2 = 0,85$.

Para ambos os exemplos, o sistema a ser identificado tem como resposta ao impulso o vetor $\mathbf{p}_{\text{plant}}$. As simulações Monte Carlo são obtidas de 400 realizações independentes. Em cada exemplo são utilizados dois valores de μ , $\mu_1 = 0,5\mu_{\text{max}}$ e $\mu_2 = 0,1\mu_{\text{max}}$, com μ_{max} (obtido experimentalmente) sendo o máximo valor do passo de adaptação para o qual o algoritmo adaptativo ainda converge. O ruído de medição, $z(n)$, possui variância $\sigma_z^2 = 10^{-4}$ (SNR = 40dB); a constante ϵ , utilizada em (10), é 0,01. Os valores iniciais usados para $E[\mathbf{w}_T(n)] = \mathbf{0}$ e $\mathbf{K}(n) = \mathbf{0}$. A seguir, são descritos os casos avaliados:

Exemplo 1: Neste caso são usadas as seguintes condições: vetor de entrada $\mathbf{x}(n)$ com dimensão $N=8$ e amostras obtidas através de (25); dispersão dos autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada igual a 46,12; em (9), $M=64$; matriz de transformação: DWT-Haar; planta obtida por: $\mathbf{p}_{\text{plant}} = \text{sinc}(n/8)$, $n=1,2,\dots,N$; e $\mu_{\text{max}} = 0,01$. A Fig. 3 ilustra, para cada valor de μ utilizado ($0,5\mu_{\text{max}}$ e $0,1\mu_{\text{max}}$), as simulações Monte Carlo e os resultados do modelo proposto, segundo as Eqs. (21) e (22). Através da Fig. 3, observamos uma boa concordância entre os resultados do modelo proposto e os obtidos, via simulação Monte Carlo, para os dois valores de μ utilizados.

Exemplo 2: As condições para este exemplo são: vetor de entrada $\mathbf{x}(n)$ com dimensão $N=32$ e amostras obtidas através de (25); dispersão dos autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada igual a 120,89; em (9), $M=128$; matriz de transformação: DCT; planta obtida de $\mathbf{p}_{\text{plant}} = \text{sinc}(n/4)$, $n=1,2,\dots,N$; $\mu_{\text{max}} = 0,005$. A Fig. 4 mostra, para cada valor de μ ($0,5\mu_{\text{max}}$ e $0,1\mu_{\text{max}}$), as simulações Monte Carlo e os resultados do modelo proposto, segundo as Eqs. (21) e (22). Da mesma forma que para o Exemplo 1, neste caso é também obtido um bom casamento entre as curvas do modelo proposto e as obtidas via simulação Monte Carlo.

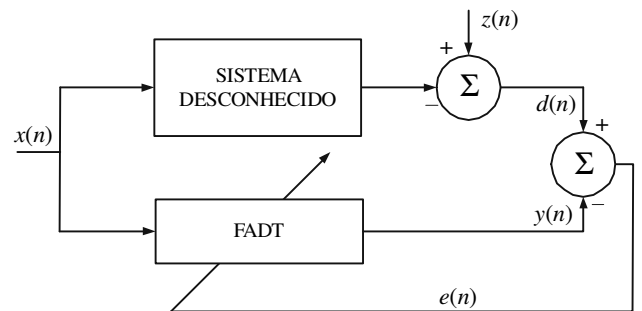
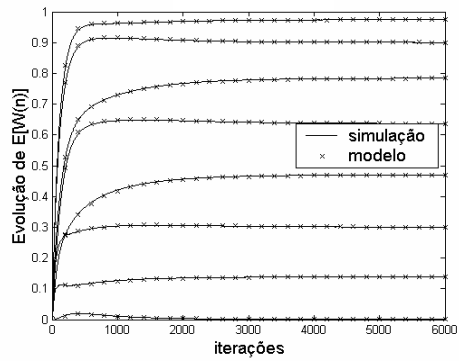


Fig. 2. Diagrama em blocos para identificação de sistemas.

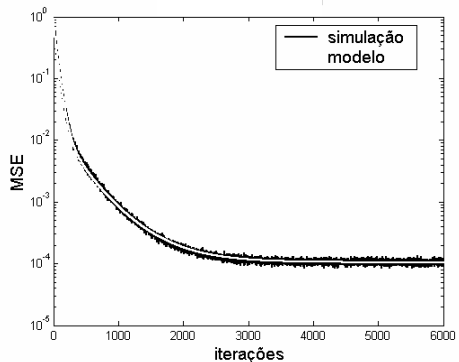
As simulações numéricas mostram que o modelo proposto se comporta de maneira satisfatória para diferentes matrizes de transformação, diferentes ordens do filtro adaptativo, e diferentes janelas de observação utilizadas para se obter a estimativa da variância do sinal de entrada.

VI. CONCLUSÕES

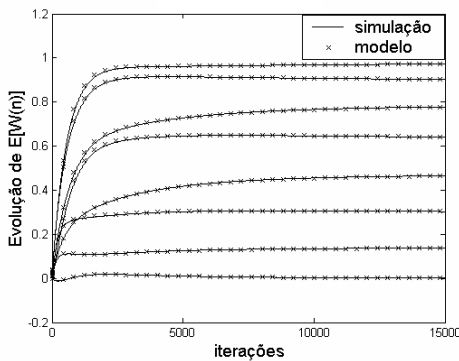
Este artigo apresenta um modelo estatístico para o algoritmo LMS-DT independente da ordem do filtro adaptativo e da transformação utilizada. Também, foi proposta uma alteração da estimativa de potência média do sinal de entrada, melhorando sua precisão sem contudo aumentar significativamente a carga computacional do algoritmo. Os resultados experimentais confirmam a qualidade do modelo proposto.



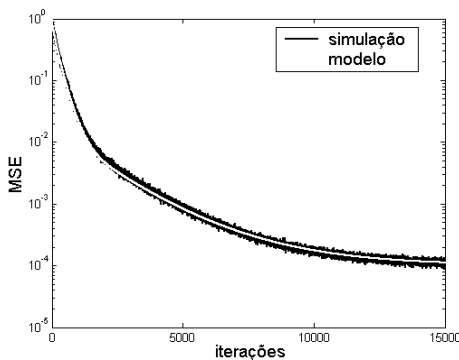
(a)



(b)

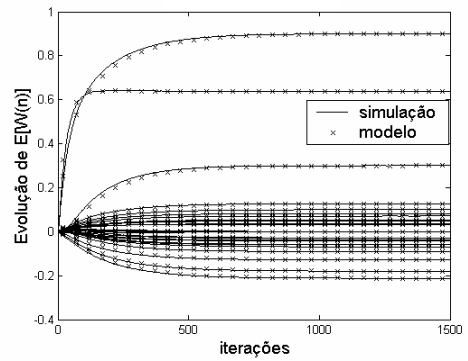


(c)

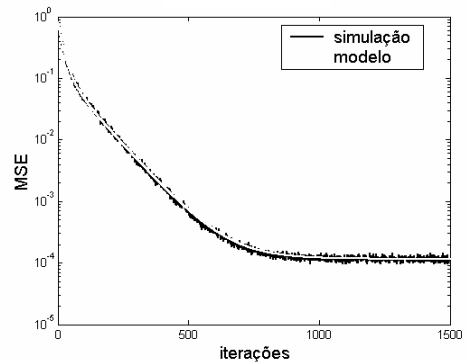


(d)

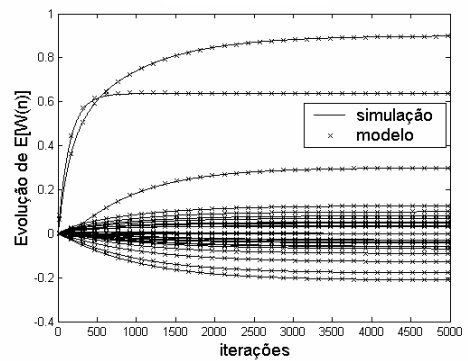
Fig. 3. Simulações numéricas para o Exemplo 1. (a) Evolução dos pesos para $\mu = 0,5\mu_{\max}$; (b) evolução do MSE para $\mu = 0,5\mu_{\max}$; (c) evolução dos pesos para $\mu = 0,1\mu_{\max}$; (d) evolução do MSE para $\mu = 0,1\mu_{\max}$.



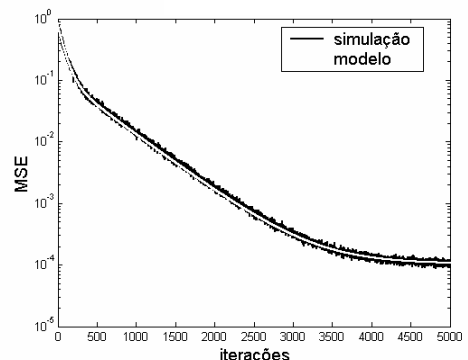
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 4. Simulações numéricas para o Exemplo 2. (a) Evolução dos pesos para $\mu = 0,5\mu_{\max}$; (b) evolução do MSE para $\mu = 0,5\mu_{\max}$; (c) evolução dos pesos para $\mu = 0,1\mu_{\max}$; (d) evolução do MSE para $\mu = 0,1\mu_{\max}$.

REFERÊNCIAS

- [1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 3ed. Englewood Cliffs, NJ. Ed. Prentice-Hall, 1996.
- [2] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive Filters: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, 1998.
- [3] B. Widrow and S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985.
- [4] S. S. Narayan, A.M. Peterson and M.J. Narasimha, "Transform Domain LMS Algorithm," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 31 (3), 1983, pp. 609-615.
- [5] D. F. Marshall, W. K. Jenkins and J. J. Murphy, "The use of orthogonal transforms for improving performance of adaptive filters," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 36 (4), 1989, pp. 474-484.
- [6] F. Beaufays, "Transform-Domain Adaptive Filters: an Analytical Approach," *IEEE Trans. on Signal Processing*, 43(2), 1995, pp. 422-431.
- [7] B. Farhang-Boroujeny and S. Gazor, "Performance Analysis of Transform Domain Normalized LMS Algorithm," *Int. Conf. on Acoust, Speech and Signal Processing*, vol. 3, Apr. 1991, pp. 2133-2136.
- [8] J. Lee and C. Un, "Performance of Transform-Domain LMS Adaptive Digital Filters," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 34, Jun. 1986, pp. 499-510.
- [9] J. Lee and C. Un, "On the Convergence Behaviour of Frequency-Domain LMS Adaptive Digital Filters," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 9, Mar. 1984, pp. 467-470.
- [10] S. J. Chern, J. C. Horng and K. M. Wong, "The Performance of the Hybrid LMS Adaptive Algorithm," *Elsevier Signal Processing* 44, 1995, pp. 67-88.
- [11] S. Hosur and A. H. Tewfik, "Wavelet Transform Domain Adaptive FIR Filtering," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45 (3), 1997, pp. 617-630.
- [12] D. I. Kim and P. De Wilde, "Performance Analysis of the DCT-LMS Adaptive Filtering Algorithm," *Elsevier Signal Processing*, vol. 80, 2000, pp. 1629-1654.
- [13] J. L. Boldrini et al., *Álgebra Linear*, 3ed., Editora Harbra, 2001.
- [14] C. G. Samson and U. Reddy, "Fixed Point Error Analysis of the Normalized Ladder Algorithm," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 31 (5), 1983, pp. 1177-1191.
- [15] A. Papoullis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 3ed., McGraw-Hill, 1991.

APÊNDICE

Desprezando-se os efeitos de ε na Eq. (10) e assumindo que $x_i(n)$ é uma variável aleatória com distribuição Gaussiana, média nula e variância σ_i^2 , a variável aleatória $z_i = x_i^2(n) + x_i^2(n-1) + \dots + x_i^2(n-M+1)$ terá distribuição de qui-quadrado com M graus de liberdade, com função densidade de probabilidade definida por [15]:

$$f_{z_i}(z_i) = \frac{z_i^{(M/2)-1} e^{-z_i/2\sigma_i^2} u(z_i)}{2^{M/2} \sigma_i^M \Gamma(M/2)}, \quad (\text{A.1})$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função gama. Definindo-se então uma variável aleatória $y_i = M/z_i$, tem-se

$$f_{y_i}(y_i) = (z_i^2/M) f_{z_i}(z_i). \quad (\text{A.2})$$

Expressando o valor esperado de y_i em função de z_i , pode-se escrever:

$$E[y_i] = \int_{-\infty}^{\infty} (M/z_i) f_{z_i}(z_i) dz_i. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo (A.1) em (A.3), obtém-se:

$$E[y_i] = \frac{M}{2^{M/2} \sigma_i^M \Gamma(M/2)} \int_0^{\infty} z_i^{(M/2)-2} e^{-z_i/2\sigma_i^2} dz_i. \quad (\text{A.4})$$

Fazendo-se $z'_i = \frac{z_i}{2\sigma_i^2}$ em (A.4), tem-se:

$$E[y_i] = \frac{M}{2\sigma_i^2 \Gamma(M/2)} \int_0^{\infty} z_i'^{(M/2)-2} e^{-z'_i} dz'_i. \quad (\text{A.5})$$

Como $(M/2) > 0$, $\int_0^{\infty} z_i'^{(M/2)-2} e^{-z'_i} dz'_i = \Gamma[(M/2)-1]$. Assim,

(A.5) torna-se:

$$E[y_i] = \frac{M \Gamma[(M/2)-1]}{2\sigma_i^2 \Gamma(M/2)}. \quad (\text{A.6})$$

Agora, usando a propriedade $\Gamma(b+1) = b\Gamma(b)$ [15], tem-se:

$$E[y_i] = \frac{M}{(M-2)\sigma_i^2}, \quad (\text{A.7})$$

podendo-se então escrever:

$$E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)] = \frac{M}{(M-2)} [\text{diag}(\mathbf{R}_T)]^{-1}, \quad (\text{A.8})$$

onde \mathbf{R}_T é a matriz de autocorrelação do sinal de entrada transformado. Similarmente, tem-se para um elemento da diagonal de $\hat{\mathbf{D}}^{-2}(n)$:

$$E[y_i^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (M/z_i)^2 f_{z_i}(z_i) dz_i, \quad (\text{A.9})$$

onde $f_{z_i}(z_i)$ é a mesma função definida em (A.1), logo:

$$E[y_i^2] = \frac{M^2}{2^{M/2} \sigma_i^M \Gamma(M/2)} \int_0^{\infty} z_i^{(M/2)-3} e^{-z_i/2\sigma_i^2} dz_i. \quad (\text{A.10})$$

Fazendo-se $z'_i = \frac{z_i}{2\sigma_i^2}$, pode-se reescrever (A.10) como:

$$E[y_i^2] = \frac{M^2}{4\sigma_i^4 \Gamma(M/2)} \int_0^{\infty} z_i'^{(M/2)-3} e^{-z'_i} dz'_i. \quad (\text{A.11})$$

Como: $\int_0^{\infty} z_i'^{(M/2)-3} e^{-z'_i} dz'_i = \Gamma[(M/2)-2]$, tem-se:

$$E[y_i^2] = \frac{M^2 \Gamma[(M/2)-2]}{4\sigma_i^4 \Gamma(M/2)}. \quad (\text{A.12})$$

Novamente, aplicando a propriedade $\Gamma(b+1) = b\Gamma(b)$, obtém-se:

$$E[y_i^2] = \frac{M^2}{(M-2)(M-4)\sigma_i^4}, \quad (\text{A.13})$$

logo,

$$E[\hat{\mathbf{D}}^{-2}(n)] = \frac{M^2}{(M-2)(M-4)} [\text{diag}(\mathbf{R}_T)]^{-2}. \quad (\text{A.14})$$