

# Análise do Algoritmo LMS Sujeito a uma Não-Linearidade do Tipo Zona-Morta no Caminho Secundário

Márcio H. Costa e José C. M. Bermudez

**Resumo**—Este trabalho apresenta um estudo sobre o algoritmo adaptativo *Least Mean Square* quando o sinal de cancelamento sofre a influência de uma não-linearidade do tipo zona-morta. São desenvolvidas equações recursivas para o comportamento médio dos coeficientes e erro médio quadrático supondo-se sinais gaussianos e adaptação lenta. Simulações de Monte Carlo corroboram os resultados.

**Palavras-Chave**—Filtragem adaptativa, algoritmo LMS, não-linearidades, controle ativo de ruído, zona-morta.

**Abstract**—This work studies the Least Mean Square adaptive algorithm when the canceling signal is subjected to a nonlinear dead-zone characteristic. Recursive equations are developed to the mean weight behavior and mean square error, assuming Gaussian signals and slow adaptation. Monte Carlo simulations validate the theoretical models.

**Index Terms**—Adaptive filtering, LMS algorithm, nonlinearity, active noise control, dead-zone.

## I. INTRODUÇÃO

Filtros adaptativos são sistemas que se caracterizam pela capacidade de auto-ajuste de seus parâmetros de modo a minimizar uma determinada função custo. O grande atrativo desta técnica é a capacidade de otimização de desempenho mesmo em sistemas em que pouca informação *a priori* é disponível, ou ainda, quando as suas características variam no tempo [1]. Sua utilização tem sido amplamente impulsionada pelos crescentes avanços na microeletrônica nas áreas de integração e velocidade de processamento [2].

Dentre as diversas famílias de algoritmos adaptativos, a mais popular é a do gradiente estocástico. Dentro dessa família, o algoritmo *Least Mean Square* (LMS) é o mais conhecido, devido a suas características de robustez e baixo custo computacional. Embora inúmeros outros algoritmos tenham sido propostos desde sua criação, o LMS continua

sendo o algoritmo de referência na avaliação do desempenho de outros algoritmos.

Diversas são as áreas de aplicação para a filtragem adaptativa, como: identificação, estimação, predição, filtragem e controle. Algumas aplicações práticas caracterizam-se pela utilização de amplificadores de potência no chamado caminho secundário (caminho entre a saída do filtro e o ponto de cancelamento). Suas funções são a amplificação dos níveis de tensão e o aumento da capacidade de fornecimento de corrente para o acionamento de transdutores ou sistemas de potência. Este é o caso de sistemas de controle automático de ruído acústico e vibrações (ANC – *active noise control*) [3], onde a natureza do sinal de cancelamento deve ser convertida por um sistema de alto-falantes para a criação do sinal acústico de anti-ruído. Situação similar também é encontrada em sistemas de controle de motores e servo-válvulas [4].

A inclusão de um amplificador de potência no caminho secundário pode acarretar alterações sobre o sinal de cancelamento devido a operações de filtragem. Constantes de tempo muito elevadas implicam em atrasos de tempo significativos, alterando sobremaneira o desempenho do filtro adaptativo [5].

Em [6] foi estudado o comportamento do algoritmo LMS em aplicações ANC quando o conjunto amplificador de potência – alto-falante possui uma característica não-linear do tipo saturação, produzindo distorções no sinal de cancelamento. Esta situação ocorre quando os amplificadores/transdutores são acionados no limite de sua capacidade, o que é característico em aplicações de baixo custo.

Considerações econômicas também fazem da eficiência energética uma preocupação constante no projeto de sistemas eletrônicos, sejam eles alimentados diretamente pela rede ou embarcados (alimentados por baterias) [7].

Os amplificadores de potência são classificados de acordo com o seu modo de operação, o qual está diretamente relacionado com o consumo e com a distorção linear. Amplificadores classe A possuem uma grande linearidade. Entretanto, caracterizam-se por um grande consumo, visto que os transistores de saída encontram-se sempre trabalhando em sua região ativa. Sua eficiência máxima (em termos de consumo) fica em torno de 25%. Amplificadores classe B oferecem uma significativa melhoria na eficiência do sistema, mas tendo como preço uma distorção linear muito maior. A

Márcio Holsbach Costa está com o Lab. de Eng. Biomédica, Escola de Engenharia e Arquitetura, Universidade Católica de Pelotas, Pelotas-RS. José Carlos Moreira Bermudez está com o Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC. E-mails: m.costa@ieee.org, j.bermudez@ieee.org.br.

cada momento apenas um par de transistores encontra-se conduzindo, levando a uma eficiência máxima de 78,5%. Entretanto, na transição entre o chaveamento dos transistores, a saída do amplificador passa por uma zona-morta de cerca de 1,4V, correspondente ao potencial de barreira de dois transistores. Este efeito causa a chamada distorção por *crossover* [7]. Existem várias outras classes, entretanto todas apresentam um compromisso entre custo do equipamento, consumo de energia e fidelidade.

Em decorrência do exposto, o projetista de sistemas adaptativos, em especial de sistemas embarcados, tem interesse na utilização de amplificadores de baixo custo e elevada eficiência com relação ao consumo. Entretanto, os efeitos da característica não-linear do amplificador sobre o processo de adaptação não são totalmente conhecidos.

Este trabalho apresenta uma análise do comportamento do algoritmo LMS quando o caminho secundário contém uma função não-linear do tipo zona-morta. Operações de filtragem no caminho secundário são desprezadas, visto que sua influência sobre o desempenho do algoritmo tem sido amplamente analisada em outros trabalhos [5,8]. Equações determinísticas recursivas são obtidas para o comportamento médio dos coeficientes e para o erro médio quadrático considerando sinais gaussianos e adaptação lenta. Condições em regime permanente são determinadas supondo-se a convergência do algoritmo. Simulações Monte Carlo ilustram a validade dos modelos obtidos.

Os resultados analíticos demonstram que o grau de não-linearidade do sistema afeta significativamente o comportamento do algoritmo. Os modelos obtidos permitem ao projetista inferências sobre o desempenho do sistema adaptativo em função das características do amplificador de potência escolhido.

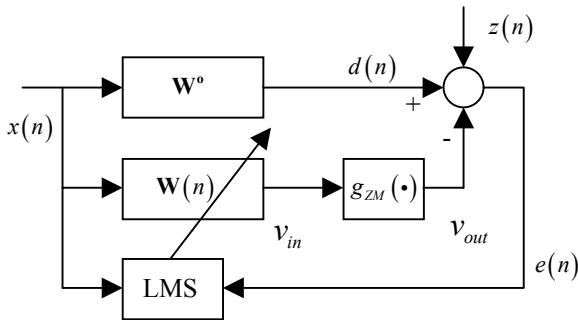


Fig. 1. Sistema analisado.

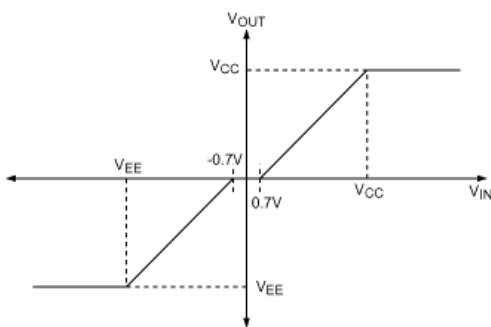


Fig. 2. Característica não-linear do tipo zona-morta (ideal) em amplificadores de potência classe B.

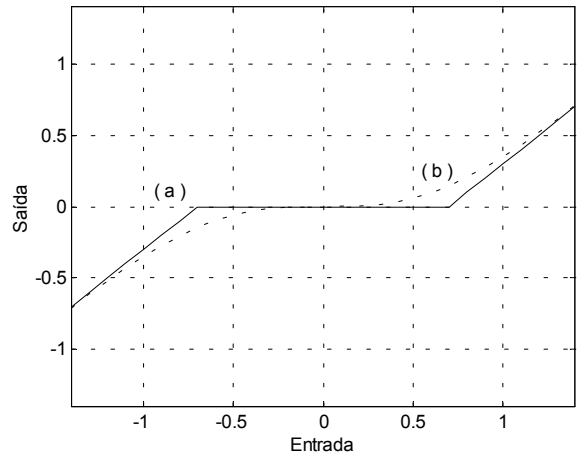


Fig. 3. Comparação entre o modelo analítico e a zona-morta ideal. (a) zona morta ideal (linha contínua), (b) modelo (tracejado).  $\tau = 0,7$ .

## II. SISTEMA ANC

O sistema analisado é mostrado na Fig. 1.  $d(n)$  é o sinal a ser cancelado.  $y(n)$  é o sinal de saída do filtro adaptativo.  $e(n)$  é o erro de estimação a ser minimizado.  $z(n)$  é o ruído de medição, considerado estacionário, gaussiano, branco, com média zero, variância  $\sigma_z^2$  e estatisticamente independente de  $x(n)$  e  $d(n)$ .  $x(n)$  é o sinal de entrada. Assume-se  $x(n)$  estacionário, gaussiano, com média zero e variância  $\sigma_x^2$ .  $\mathbf{X}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-N+1)]^T$  é o vetor de dados observados. Considera-se que os vetores  $\mathbf{W}^o = [w_0^o \ w_1^o \ \dots \ w_{N-1}^o]^T$  e  $\mathbf{W}(n) = [w_0(n) \ \dots \ w_{N-1}(n)]^T$  têm a mesma dimensão  $N$ . Dimensões diferentes podem ser acomodadas com a inserção de zeros.

A característica não-linear do tipo zona-morta é representada por  $g_{ZM}(\cdot)$  e seu comportamento é apresentado na Fig. 2. Neste trabalho, supõe-se que o limiar de saturação não é atingido pelo sinal de cancelamento.

## III. MODELAGEM DA ZONA-MORTA

O primeiro passo para a análise do comportamento do sistema em questão é a determinação de um modelo analítico para a zona-morta. Este é definido a partir de três premissas: (a) representatividade da função que se deseja modelar, (b) tratabilidade matemática e (c) facilidade de modificações em sua conformação para adequar-se às variações dos sistemas reais. O modelo escolhido utiliza a função erro como forma de aproximação [6]:

$$y = g_{ZM}(x) = x - g(x) = x - \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz \quad (1)$$

onde  $x$  é a entrada,  $y$  a saída,  $g(\cdot)$  a função erro e o parâmetro  $\sigma$  é dado por

$$\sigma^2 = \frac{2}{\pi} \tau^2 \quad (2)$$

onde o parâmetro  $\tau$  corresponde ao ponto de quebra da região linear, supondo-se simetria (0,7V na Fig. 3).

#### IV. ANÁLISE

A equação de atualização dos coeficientes do algoritmo LMS é dada por:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \mu e(n) \mathbf{X}(n) \quad (3)$$

e o erro de estimação por

$$e(n) = \mathbf{W}^{ot} \mathbf{X}(n) + z(n) - g_{ZM}(\mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n)) \quad (4)$$

##### A. Comportamento Médio dos Coeficientes

Substituindo-se (1) em (4) tem-se

$$e(n) = \mathbf{W}^{ot} \mathbf{X}(n) + z(n) - \mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n) + g(\mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n)) \quad (5)$$

Substituindo-se (5) em (3) e tomando-se seu valor esperado condicionado em  $\mathbf{W}(n)$  obtém-se

$$E\{\mathbf{W}(n+1) | \mathbf{W}(n)\} = [\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_{xx}] \mathbf{W}(n) + \mu \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}^o + \mu E\{g(\mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n)) \mathbf{X}(n) | \mathbf{W}(n)\} \quad (6)$$

onde  $\mathbf{R}_{xx}$  é a matriz de autocorrelação do sinal de entrada. Em decorrência da consideração de adaptação lenta, supõe-se independência entre os vetores de coeficientes e de sinal de entrada. O valor esperado restante em (6) pode ser obtido através de [6, Eq. 20] de forma que:

$$E\{g(\mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n)) \mathbf{X}(n) | \mathbf{W}(n)\} = \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{W}^T(n) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}(n) + 1\right)^{-1/2} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}(n) \quad (7)$$

Substituindo-se (7) em (6), tomando-se seu valor esperado e aproximando o valor esperado do quociente pelo quociente dos valores esperados, chega-se finalmente a:

$$E\{\mathbf{W}(n+1)\} = \mu \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}^o + \left[\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_{xx} + \mu \left(\frac{1}{\sigma^2} \text{tr}\{\mathbf{R}_{xx} \mathbf{K}(n)\} + 1\right)^{-1/2} \mathbf{R}_{xx}\right] E\{\mathbf{W}(n)\} \quad (8)$$

onde  $\mathbf{K}(n) = E\{\mathbf{W}(n) \mathbf{W}^T(n)\}$  são os momentos de segunda ordem dos coeficientes.

##### B. Erro Médio Quadrático

Elevando-se a equação (5) ao quadrado e tomando-se seu valor esperado condicionado em  $\mathbf{W}(n)$  obtém-se:

$$E\{e^2(n) | \mathbf{W}(n)\} = \mathbf{W}^{ot} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}^o + \mathbf{W}^T(n) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}(n) + E\{z^2(n)\} - 2\mathbf{W}^{ot} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}(n) + E\{g^2(\mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n)) | \mathbf{W}(n)\} + 2\mathbf{W}^{ot} E\{g(\mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n)) \mathbf{X}(n) | \mathbf{W}(n)\} - 2\mathbf{W}^T(n) E\{g(\mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n)) \mathbf{X}(n) | \mathbf{W}(n)\} \quad (9)$$

onde, da mesma forma que em (6), supõe-se independência entre os vetores  $\mathbf{W}(n)$  e  $\mathbf{X}(n)$ . A solução para o quarto valor esperado de (9) pode ser encontrada em [6, Eq. 24],

resultando:

$$E\{g^2(\mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n)) | \mathbf{W}(n)\} = \sigma^2 \arcsen\left(\frac{\mathbf{W}^T(n) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}(n)}{\mathbf{W}^T(n) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}(n) + \sigma^2}\right) \quad (10)$$

$E\{z^2(n)\} = \sigma_z^2$  é a variância do ruído  $z(n)$  e devido a condição de adaptação lenta pode-se assumir que  $\mathbf{W}(n) \mathbf{W}^T(n) \cong E\{\mathbf{W}(n) \mathbf{W}^T(n)\}$ . Substituindo-se as expressões (7) e (10) em (9) e tomando-se seu valor esperado, chega-se a:

$$\begin{aligned} \xi(n) = E\{e^2(n)\} &= \mathbf{W}^{ot} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}^o + \sigma_z^2 \\ &+ \text{tr}\{\mathbf{R}_{xx} \mathbf{K}(n)\} - 2\mathbf{W}^{ot} \mathbf{R}_{xx} E\{\mathbf{W}(n)\} \\ &+ 2\left(\frac{1}{\sigma^2} \text{tr}\{\mathbf{R}_{xx} \mathbf{K}(n)\} + 1\right)^{-1/2} \\ &\quad \left[\mathbf{W}^{ot} \mathbf{R}_{xx} E\{\mathbf{W}(n)\} - \text{tr}\{\mathbf{R}_{xx} \mathbf{K}(n)\}\right] \\ &+ \sigma^2 \arcsen\left(\frac{\text{tr}\{\mathbf{R}_{xx} \mathbf{K}(n)\}}{\text{tr}\{\mathbf{R}_{xx} \mathbf{K}(n)\} + \sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

##### C. Momentos de Segunda Ordem

Substituindo-se (5) em (3), multiplicando-se pelo seu transposto e tomando-se o valor esperado obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) &= \mathbf{K}(n) + \mu^2 \sigma_z^2 \mathbf{R}_{xx} \\ &- \mu \mathbf{K}(n) \mathbf{R}_{xx} - \mu \mathbf{R}_{xx} \mathbf{K}(n) \\ &+ \mu E\{\mathbf{W}(n)\} \mathbf{W}^{ot} \mathbf{R}_{xx} + \mu \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}^o E\{\mathbf{W}^T(n)\} \\ &+ \mu E\{\mathbf{W}(n) g(\mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n)) \mathbf{X}^T(n)\} \\ &+ \mu E\{g(\mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n)) \mathbf{X}(n) \mathbf{W}^T(n)\} \\ &+ \mu^2 E\{\mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n) \mathbf{W}(n) \mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n)\} \\ &+ \mu^2 E\{\mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n) \mathbf{W}^o \mathbf{W}^{ot} \mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n)\} \\ &- \mu^2 E\{\mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n) \mathbf{W}^o \mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n)\} \\ &- \mu^2 E\{\mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n) \mathbf{W}(n) \mathbf{W}^{ot} \mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n)\} \\ &+ 2\mu^2 E\{g(\mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n)) \mathbf{W}^{ot} \mathbf{X}(n) \mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n)\} \\ &- 2\mu^2 E\{g(\mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n)) \mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n) \mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n)\} \\ &+ \mu^2 E\{g^2(\mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n)) \mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n)\} \end{aligned} \quad (12)$$

A avaliação dos termos em (12) é uma tarefa matemática complexa. Entretanto, visto a consideração de adaptação lenta, é razoável desprezar-se os termos multiplicados por  $\mu^2$ . Desta forma, (12) aproxima-se de:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) &\cong \mathbf{K}(n) - \mu \mathbf{K}(n) \mathbf{R}_{xx} - \mu \mathbf{R}_{xx} \mathbf{K}(n) \\ &+ \mu \left(\frac{1}{\sigma^2} \text{tr}\{\mathbf{R}_{xx} \mathbf{K}(n)\} + 1\right)^{-1/2} \left[\mathbf{K}(n) \mathbf{R}_{xx} + \mathbf{R}_{xx} \mathbf{K}(n)\right] \\ &+ \mu E\{\mathbf{W}(n)\} \mathbf{W}^{ot} \mathbf{R}_{xx} + \mu \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}^o E\{\mathbf{W}^T(n)\} \end{aligned} \quad (13)$$

##### D. Coeficientes em Regime Permanente

Supondo-se a convergência dos coeficientes

$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{\mathbf{W}(n)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} E\{\mathbf{W}(n+1)\}$ , substituindo-se esta relação em (6) e (7), com a hipótese de que as flutuações de  $\mathbf{W}(n)$  sejam desprezíveis em relação ao seu valor médio em regime permanente, chega-se a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{\mathbf{W}(n)\} \cong \left[ 1 - \left( \frac{1}{\sigma^2} \lim_{n \rightarrow \infty} E\{\mathbf{W}^T(n)\} \mathbf{R}_{xx} E\{\mathbf{W}(n)\} + 1 \right)^{-1/2} \right]^{-1} \mathbf{W}^o \quad (14)$$

A partir de (14) é fácil verificar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{\mathbf{W}(n)\} = q \cdot \mathbf{W}^o \quad (15)$$

onde  $q \in \mathbb{R}^+$  é um escalar. Substituindo-se (15) em (14) chega-se à seguinte relação

$$\eta^2 q^4 - 2\eta^2 q^3 + \eta^2 q^2 - 2q + 1 = 0 \quad (16)$$

onde

$$\eta^2 = \frac{\pi}{2\tau^2} \mathbf{W}^{oT} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}^o \quad (17)$$

é denominado grau de não-linearidade do sistema.

A relação (16) é uma equação bi-quadrática [9, pp. 83]. A condição para que uma determinada raiz seja a solução para  $q$  é que a mesma seja real e positiva para todo  $\eta^2 \in [0, \infty)$ . Apenas uma raiz satisfaz esta condição. Seu comportamento em função de  $\eta^2$  pode ser visto na Fig. 4.

#### E. Erro Médio Quadrático em Regime Permanente

Uma estimativa do erro em regime permanente pode ser obtida supondo-se convergência dos coeficientes em (11) e utilizando-se (15):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(n) \cong \sigma_z^2 + v \cdot \mathbf{W}^{oT} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}^o \quad (18)$$

onde

$$v = 1 - 2q + q^2 + \frac{2q(1-q)}{\sqrt{\eta^2 q^2 + 1}} + \frac{1}{\eta^2} \arcsen\left(\frac{\eta^2 q^2}{\eta^2 q^2 + 1}\right) \quad (19)$$

A Fig. 5. apresenta a relação entre o fator  $v$  e o grau de não-linearidade.

## V. SIMULAÇÕES

Nesta seção são apresentadas simulações com a finalidade de verificar a acurácia das equações (8), (11) e (13). Dois exemplos são apresentados.

*Exemplo 1* – sinal de entrada gaussiano correlacionado, com média zero, potência unitária e dispersão de autovalores de  $\mathbf{R}_{xx}$  igual a 14,87,  $\mu = 0,01$ ,  $\sigma_z^2 = 10^{-6}$ , planta do tipo janela de Hanning normalizada com 10 coeficientes,  $\mathbf{W}(0) = \mathbf{0}$ . Limiares da zona-morta:  $\tau = [10^{-10}; 0,02; 0,1]$ . 500 realizações. O gráficos são desenhados de 50 em 50 amostras (Figs. 6 e 7).

*Exemplo 2* – sinal de entrada gaussiano branco, com média zero e potência unitária,  $\mu = 0,001$ ,  $\sigma_z^2 = 10^{-6}$ , resposta acústica de um ambiente real com 128 coeficientes (Fig. 8),  $\mathbf{W}(0) = \mathbf{0}$ . 500 realizações. Limiares da zona-morta:  $\tau = [10^{-10}; 0,02; 0,1]$ . Figs. 9 e 10.

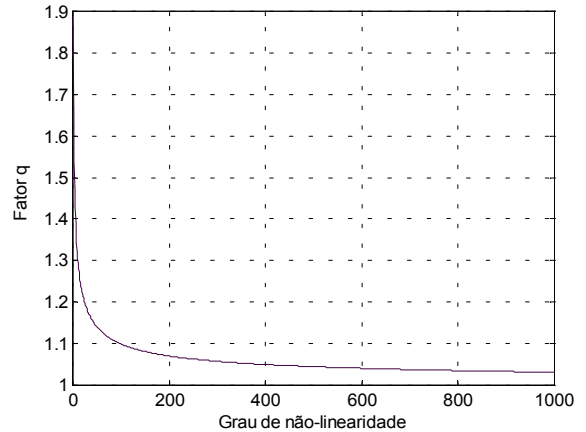


Fig. 4. Fator multiplicativo dos coeficientes em regime permanente ( $q$ ) em função do grau de não-linearidade do sistema ( $\eta^2$ ).

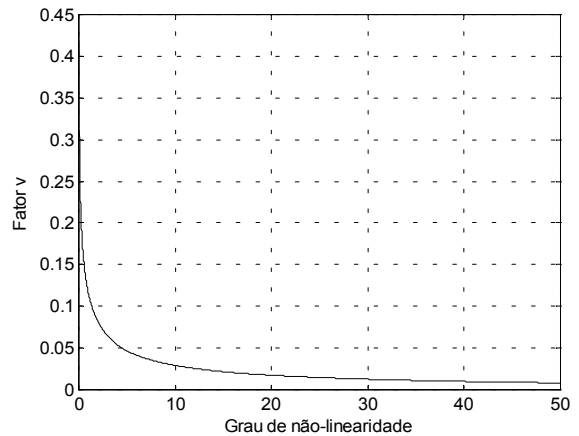


Fig. 5. Fator multiplicativo do erro médio quadrático em regime permanente ( $v$ ) em função do grau de não-linearidade do sistema.

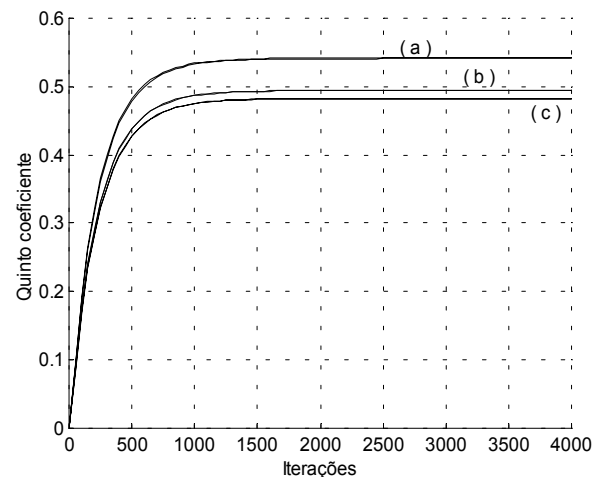


Fig. 6. Evolução do quinto coeficiente do exemplo 1. (a)  $\tau = 0,1$ , (b)  $\tau = 0,02$ , (c)  $\tau = 10^{-10}$ .

As Figs. 6 e 9 apresentam comparações entre o modelo teórico e simulações Monte Carlo (500 realizações) para o comportamento médio dos coeficientes. São apresentadas três condições de não-linearidade onde verifica-se a alteração do

comportamento dos coeficientes. Nas simulações é utilizado o modelo ideal para a zona-morta. Note-se a excelente concordância para os casos com passo de adaptação pequeno. Os demais coeficientes comportam-se de maneira semelhante.

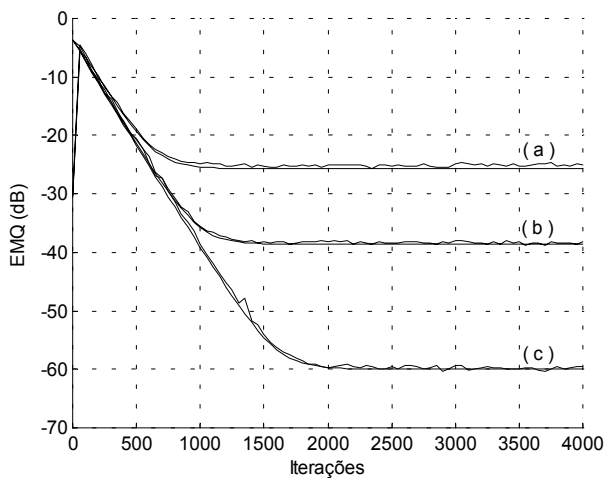


Fig. 7. Erro médio quadrático para o exemplo 1. (a)  $\tau = 0,1$ , (b)  $\tau = 0,02$ , (c)  $\tau = 10^{-10}$ .

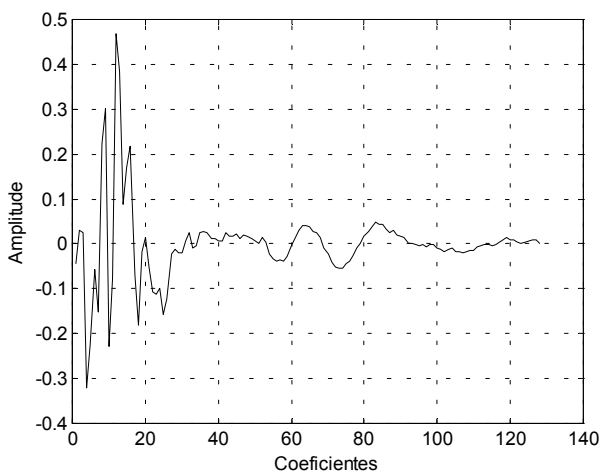


Fig. 8. Resposta acústica de um ambiente real.

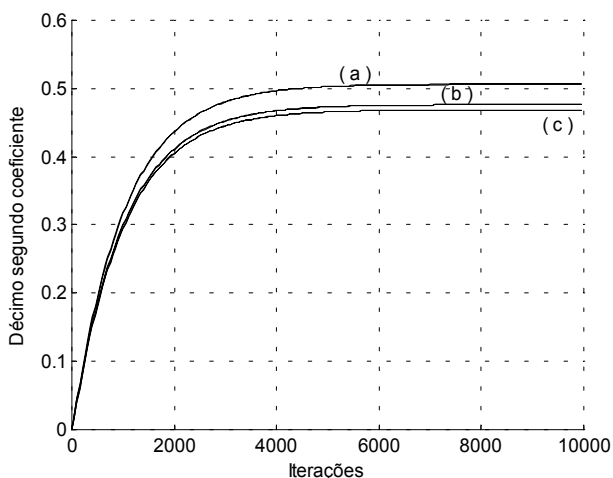


Fig. 9. Evolução do décimo segundo coeficiente do exemplo 2. (a)  $\tau = 0,1$ , (b)  $\tau = 0,02$ , (c)  $\tau = 10^{-10}$ .

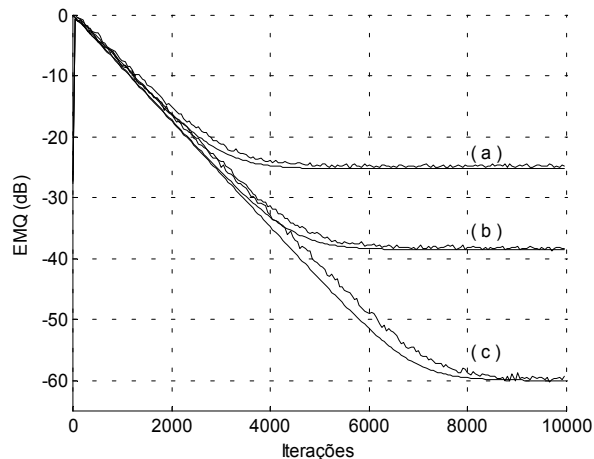


Fig. 10. Erro médio quadrático para o exemplo 2. (a)  $\tau = 0,1$ , (b)  $\tau = 0,02$ , (c)  $\tau = 10^{-10}$ .

As Figs. 7 e 10 demonstram o impacto do grau de não-linearidade sobre o erro médio quadrático. Note-se que  $\eta^2$  consiste em uma relação entre a potência na saída da planta e o parâmetro representativo da não-linearidade  $\tau^2$ . Este resultado concorda com os obtidos em [6] para um efeito não-linear do tipo saturação. Simulações também confirmam a validade dos modelos para regime permanente.

## VI. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma análise estatística do comportamento do algoritmo LMS quando o caminho secundário sofre a influência de uma não-linearidade do tipo zona-morta. Este problema é de especial interesse em sistemas de baixo consumo para aplicações embarcadas de controle ativo de ruído acústico e vibrações. A previsão de impacto das características das diferentes classes de amplificadores de potência sobre o comportamento do algoritmo LMS permite ao projetista a otimização de seu sistema em termos da relação consumo  $\times$  desempenho. Equações recursivas foram desenvolvidas para o comportamento médio dos coeficientes e para o erro médio quadrático, considerando sinais gaussianos e adaptação lenta. A partir dessas recursões, as condições de regime permanente foram determinadas. Simulações Monte Carlo corroboram os resultados teóricos.

## ACKNOWLEDGMENTS

Este trabalho foi financiado em parte pela FAPERGS (01/1173-0) e CNPq (352084/92-8).

## REFERENCES

- [1] D.G. Manolakis, V.K. Ingle, e S.M. Kogon, *Statistical and Adaptive Signal Processing*, McGraw-Hill, 2000.
- [2] P. Lapsley, J. Bier, A. Shoham e E.A. Lee, *DSP Processor Fundamentals*, IEEE Press, 1997.
- [3] S.M. Kuo e D.R. Morgan, *Active Noise Control Systems*, John Wiley & Sons, 1996.
- [4] G. Tao e P.V. Kokotovic, *Adaptive Control of Systems with Actuator and Sensor Nonlinearities*, John Wiley & Sons, 1996.

- [5] O.J. Tobias, J.C.M. Bermudez e N.J. Bershad, "Mean Weight Behavior of the Filtered-X LMS Algorithm", *IEEE Trans. on Signal Processing*, 48(4), 1061-1075, 2000.
- [6] M.H. Costa, J.C.M. Bermudez e N.J. Bershad, "Stochastic Analysis of the LMS Algorithm with a Saturation Nonlinearity Following the Adaptive Filter", *IEEE Trans. on Signal Processing*, 49(7), 1370-1387, 2001.
- [7] A.S. Sedra e K.C. Smith, *Microelectronic Circuits*, Oxford, 1998.
- [8] G. Chen, T. Sone, N. Saito, M. Abe e S. Makino, "The Stability and Convergence Characteristics of the Delayed-X LMS Algorithm in ANC Systems", *Journal of Sound and Vibration*, 216(4), 637-648, 1998.
- [9] D. Zwillinger, *Standard Mathematical Tables and Formulae*, CRC.