

Construção e Análise de Desempenho de Constelações de Sinais M-PSK em Superfícies Mínimas

Rodrigo Gusmão Cavalcante e Reginaldo Palazzo Jr.

Resumo—Neste trabalho apresentamos uma proposta de construção e de análise de desempenho de sistemas de comunicações utilizando a modulação M-PSK cujos sinais estão contidos em superfícies da família de superfícies mínimas Enneper. Este estudo tem como motivação o fato de que os mergulhos de certos canais discretos sem memória, e que são de interesse prático, ocorrem em superfícies mínimas. Como consequência, mostramos que o desempenho de tais sistemas é melhor do que o desempenho dos sistemas de comunicações tradicionais utilizando a modulação M-PSK.

Palavras-Chave—Constelações de sinais, Superfície Mínimas, Probabilidade de erro e Métricas.

Abstract—In this paper we present a procedure for the construction and the performance analysis of digital communication systems using M-PSK modulation whose signals are on Enneper's minimal surfaces. This study was motivated by the fact that the embedding of certain discrete memoryless channels of practical interest occur in minimal surfaces. As a consequence, we show that the probability of error of such systems is better than that of the traditional ones, however using the M-PSK modulation.

Keywords—Signal constellations, Minimal surfaces, Error probability and metrics.

I. INTRODUÇÃO

Os principais objetivos a serem alcançados na proposta de novos sistemas de comunicações são menor complexidade e melhor desempenho sob o critério da probabilidade de erro (símbolo/bit), ou equivalentemente, fixada uma taxa de erro a relação sinal-ruído seja menor do que aquela necessária pelos sistemas conhecidos.

Nesta direção, iremos considerar cada um dos diagramas de bloco, Fig. 1 como sendo constituído basicamente por um conjunto de “pontos” E_i , juntamente com uma métrica, d_i . Isto torna possível a interpretação de cada bloco como um espaço métrico (E_i, d_i) . Como exemplo, o codificador de fonte consiste de um conjunto de palavras-código, E_1 , com uma distância associada, d_1 , podendo esta ser a distância chiquadrada. O codificador de canal tem associado um conjunto finito de palavras-código, E_2 , e em geral a distância de Hamming, d_2 . O canal, subentendido o modulador e o canal propriamente dito, consiste de um conjunto finito de pontos, E_3 , com uma distância euclidiana, d_3 , (caso do ruído aditivo gaussiano). É importante ressaltar que os decodificadores e os demoduladores usam, em geral, as mesmas distâncias (ou

distâncias similares) associadas aos correspondentes codificadores e moduladores para que não ocorra um descasamento entre os respectivos pares.

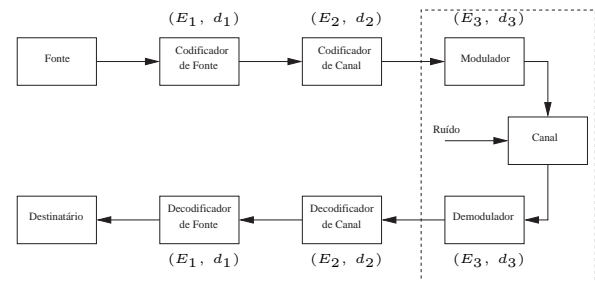


Fig. 1. Modelo de um sistema de comunicações digitais

O que se busca então, é determinar as características geométricas e algébricas associadas à cada conjunto de pontos E_i e, conseqüentemente, aos correspondentes espaços métricos bem como as propriedades e condições que deverão ser satisfeitas pelas transformações que irão conectar os diferentes espaços métricos de tal forma que se consiga determinar o desempenho do sistema de comunicações sob a menor probabilidade de erro, maior taxa de transmissão, menor potência de transmissão, etc.

Geralmente o espaço métrico (E_3, d_3) , consistindo dos blocos modulador/canal e demodulador, é associado ao espaço euclidiano com sua métrica usual. Por essa razão é que, frequentemente, no processo de modulação projetamos constelações de sinais considerando uma estrutura geométrica euclidiana.

Note que o bloco associado a (E_3, d_3) pode ser caracterizado, e assim o faremos, como um canal discreto sem memória. Com isso, a motivação principal deste trabalho vem dos resultados obtidos em [6], onde foram identificados e analisados uma gama considerável de canais discretos sem memória e seus mergulhos em superfícies orientadas com e sem bordos. Ainda em [6] foram apresentados canais tais como o C_4 [3], o C_8 [3] e o C_{16} [3], consistindo de 4, 8 e 16 entradas e saídas e 3 transições por entrada, tendo a propriedade de que um de seus mergulhos ocorre em uma superfície mínima (catenóide) com a seguinte caracterização $2N(4) = 4R_4$, $2N(8) = 8R_4$ e $2N(16) = 16R_4$, respectivamente, onde $2N$ denota o catenóide com 4, 8 e 16 regiões quadrangulares. Como as superfícies mínimas não foram consideradas anteriormente no contexto de Teoria de Comunicações, surge então a necessidade de se propor a construção de constelações

de sinais bem como de realizar a análise de desempenho do correspondente sistema de comunicações.

Naturalmente surge então a pergunta: Qual o desempenho das constelações de sinais quando a estrutura geométrica associada não é mais a euclidiana? Uma abordagem desse problema foi feita em [1] e [2] para o caso particular de constelações de sinais em espaços hiperbólicos, e em [9] e [10] foi analisado o caso das constelações de sinais em variedades riemannianas, dando ênfase especial às superfícies mínimas e aos espaços de curvatura seccional constante.

Neste trabalho concentramos nossos esforços na análise do espaço métrico (E_3, d_3) referente aos blocos modulador/canal e demodulador. Portanto, um dos objetivos deste trabalho é construir e analisar o desempenho de constelações de sinais M-PSK em superfícies mínimas. Para tanto, é necessário estender os conceitos de probabilidade de erro, energia média da constelação de sinais e de ruído para o contexto dessas superfícies.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, apresentamos uma breve revisão dos conceitos sobre superfícies mínimas para os propósitos deste trabalho. Na Seção 3, as considerações e os fundamentos para a realização da construção das constelações de sinais em superfícies mínimas são relacionados. Na Seção 4, a análise de desempenho das constelações de sinais 4, 8 e 16-PSK sobre a família de superfícies mínimas Enneper para $n = 1$ e $n = 3$ são comparadas com as correspondentes para $n = 0$ (caso euclidiano). Mostramos que o desempenho do sistema de comunicações utilizando a modulação PSK em superfícies mínimas da família Enneper é melhor do que o desempenho apresentado por esta mesma modulação no caso euclidiano. Finalmente, na Seção 5, as conclusões são apresentadas.

A. Preliminares sobre as Superfícies Mínimas

A Teoria das Superfícies Mínimas teve sua origem com o seguinte problema proposto por Lagrange em 1762: *Dada uma curva fechada simples (sem auto-intersecções), determinar a superfície de área mínima que tem essa curva como fronteira.* Lagrange apresentou este problema como um exemplo de um método, por ele desenvolvido, para determinar curvas ou superfícies que minimizassem certas quantidades, tais como área, comprimento, energia, etc. Esses métodos constituem o que hoje é chamado de Cálculo das Variações.

As soluções do problema de minimização de área proposto por Lagrange são as superfícies mínimas, que para o caso particular em que a superfície é descrita por $z = f(x, y)$, onde $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, deve satisfazer a seguinte equação de Lagrange

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0, \quad (1)$$

onde $f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $f_{xx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, ... É importante ressaltar que as superfícies mínimas são apenas pontos críticos da função área, e não podemos garantir, sem impor restrições extras, que esses pontos críticos sejam mínimos absolutos da área.

Lagrange observou que as funções lineares $f(x, y) = ax + by + c$, com a, b, c constantes, representando curvas planares,

são soluções triviais de (1). Entretanto, Meusnier identificou a existência de novos exemplos de superfícies mínimas tais como o catenóide (Fig. 2(a)) e o helicóide (Fig. 2(b)).

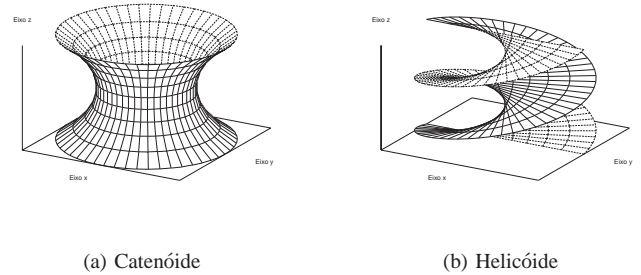


Fig. 2. Superfície mínima catenóide.

Meusnier também identificou as superfícies mínimas como sendo as superfícies com curvatura média nula. Com isso, foi possível obter uma “interpretação geométrica” para as soluções da equação de Lagrange. Para um melhor entendimento dessa interpretação geométrica veja por exemplo [3], [5] e [8].

Por outro lado, uma solução completamente satisfatória da equação (1) foi obtida por Weierstrass muitos anos depois. Para isso, Weierstrass utilizou uma representação integral para superfícies mínimas em domínios simplesmente conexos para verificar que

$$X(u, v) = Re \left\{ \int_{z_0}^z \frac{1}{2} (\phi_1, \phi_2, \phi_3) d\zeta \right\}, \quad z_0, z \in D, \quad (2)$$

onde

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (f(\zeta)(1 - g^2(\zeta)), i(1 + g^2(\zeta)), 2f(\zeta)g(\zeta)),$$

define, a menos de translações no \mathbb{R}^3 , uma superfície mínima regular parametrizada, localmente restrita a um domínio D simplesmente conexo. Observe que a condição de regularidade da superfície é verificada se os zeros de $f(z)$ coincidem com os pólos de $g(z)$, tal que a ordem do zero seja igual ao dobro da ordem do pólo.

Uma consequência importante dessa representação é que os coeficientes da primeira forma fundamental, $E = E(u, v)$, $F = F(u, v)$ e $G = G(u, v)$, de uma superfície mínima são dados por

$$E = G = \lambda^2 = \frac{1}{4} |f(z)|^2 (1 + |g(z)|^2)^2 \quad \text{e} \quad F = 0. \quad (3)$$

Um outro resultado importante, proveniente dessa representação, é que a expressão da curvatura gaussiana da superfície pode ser expressa por

$$K(u, v) = - \left[\frac{4|g'(z)|}{|f(z)|(1 + |g(z)|^2)} \right]^2. \quad (4)$$

Além de permitir obter exemplos de superfícies mínimas, a representação de Weierstrass desempenha um papel essencial na investigação teórica de tais superfícies. Por exemplo, no contexto da teoria das funções analíticas temos o princípio de Reflexão de Schwarz que aplicado a teoria das superfícies mínimas afirma que se uma superfície mínima contém uma

reta (respectivamente, uma geodésica plana), então a rotação de π radianos em torno dessa reta (respectivamente, a reflexão em relação ao plano da geodésica) é uma simetria da superfície.

Verificamos que o estudo das simetrias de uma superfície mínima é de grande importância na construção e na análise de desempenho das constelações de sinais em tais superfícies, pois podemos utilizar tais simetrias para garantir a existência de estruturas algébricas associadas a certas classes de constelações de sinais e também facilitar os cálculos da probabilidade média de erro e da energia média dessas constelações.

No sentido de estabelecer as simetrias de uma superfície mínima precisamos, de alguma forma, identificar as geodésicas planas da superfície, ou equivalentemente, distinguir dentre as geodésicas da superfície aquelas que são linhas assintóticas ou linhas de curvatura.

As geodésicas $\gamma : [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície mínima $X(u, v)$, obtida de (2), são encontradas como soluções do seguinte sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem

$$\begin{aligned} u''(t) + [(u'(t))^2 - (v'(t))^2](\lambda^2)_u/2\lambda^2 + u'(t)v'(t)(\lambda^2)_v/\lambda^2 &= 0, \\ v''(t) + [(v'(t))^2 - (u'(t))^2](\lambda^2)_v/2\lambda^2 + u'(t)v'(t)(\lambda^2)_u/\lambda^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

O comprimento de arco de uma geodésica $\gamma(t) = (u'(t), v'(t))$ é uma medida de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho, pois a partir do comprimento de arco é possível definir uma medida de distância entre dois pontos na superfície mínima. O comprimento de arco é calculado por

$$l = \int_a^b \sqrt{(u'(t))^2 \lambda^2 + (v'(t))^2 \lambda^2} dt. \quad (6)$$

II. CONSTELAÇÕES DE SINAIS EM SUPERFÍCIES MÍNIMAS

Na construção das constelações de sinais em superfícies devemos considerar a mesma métrica (ou métricas similares) em cada um dos blocos do espaço métrico (E_3, d_3) , veja Fig. 1, com o objetivo de que sejam casadas entre si para que se obtenha o melhor desempenho possível.

Portanto, se $X : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ for uma superfície regular parametrizada, então $X(u, v)$ induz de maneira natural uma métrica em D , isto é, se $p = (u, v) \in D$, $v_1, v_2 \in T_p X$, definimos o produto interno $\langle v_1, v_2 \rangle_p$ no ponto p como sendo $\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle dX_p(v_1), dX_p(v_2) \rangle_{X(p)}$, onde $T_p X$ é o plano tangente à superfície no ponto p e $dX_p(v_1)$ é a diferencial da aplicação X no ponto p segundo o vetor v_1 . Observe que, nessa situação, X passa a ser uma aplicação isométrica de D em $X(D)$ e que esse espaço bidimensional com métrica induzida da superfície $X(u, v)$ é uma variedade riemanniana bidimensional M com sistema de coordenadas (D, X) . Para um entendimento das variedades riemannianas recomendamos [4] e [11].

Uma constelação de sinais em uma superfície regular parametrizada $X : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um conjunto de pontos bidimensionais da forma

$$\mathcal{X} = \{x_1 = (u_1, v_1), \dots, x_m = (u_m, v_m)\} \subset M.$$

Como neste trabalho trataremos o caso particular em que as constelações de sinais estão definidas em superfícies mínimas, então devemos utilizar a métrica $\lambda^2(u, v)$, equação (3), para construir e analisar o desempenho de tais constelações de sinais. Portanto, a medida de distância a ser adotada entre quaisquer dois pontos em M será dada pela menor distância geodésica entre esses pontos em M .

Neste trabalho vamos relacionar a ação do ruído, $v = (x, y)$, em um canal de transmissão como sendo a aplicação de uma transformação que leva um sinal transmitido $x_m \in M$ em um sinal recebido $y \in M$. Consideraremos que essa transformação é dada por

$$y = (y_1, y_2) = \exp_{x_m}(v), \quad v = (x, y) \in T_{x_m} M, \quad (7)$$

onde $T_{x_m} M$ é o plano tangente a M no ponto x_m e a aplicação $\exp_{x_m} : T_{x_m} M \rightarrow M$ é chamada aplicação exponencial. Geometricamente, $\exp_{x_m}(v)$ é o ponto de M obtido quando percorremos um comprimento igual a $|v|$, a partir de x_m , sobre a única geodésica que passa por x_m com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$.

Observe que a maneira como definimos o ruído em (7) requer que a aplicação exponencial esteja definida para todo $v \in \mathcal{V} \subset T_{x_m} M$, onde \mathcal{V} é um aberto de $T_{x_m} M$. Portanto, se supormos que \mathcal{V} é o espaço amostral de $v = (x, y)$, então podemos caracterizar probabilisticamente o ruído a partir da densidade de probabilidade de v . Dessa forma, a densidade de probabilidade do sinal recebido y dado que o sinal x_m foi transmitido, é dada por

$$p_Y(y/x_m) = p_V(v = \exp_{x_m}^{-1}(y))|J|, \quad (8)$$

onde $|J|$ é o valor absoluto do Jacobiano, J , da transformação das variáveis aleatórias dado por

$$J = \begin{bmatrix} \frac{d \exp_1^{-1}(y)}{dy_1} & \frac{d \exp_1^{-1}(y)}{dy_2} \\ \frac{d \exp_2^{-1}(y)}{dy_1} & \frac{d \exp_2^{-1}(y)}{dy_2} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Seja R_m a região de decisão do sinal x_m , ou seja, o conjunto representando todos os pontos que são decididos como x_m . Então, se o sinal x_m for transmitido, a probabilidade do demodulador não decidir pelo sinal pertencente a R_m , isto é, decidir erroneamente, é dada por

$$P_{e,m} = 1 - \int_{R_m} p_Y(y/x_m) du dv. \quad (10)$$

É importante observar que a probabilidade de erro condicionada ao sinal x_m ter sido transmitido, (10), não depende de uma parametrização específica da superfície e que a probabilidade de erro é invariante por isometrias. A probabilidade de erro média, P_e , de uma constelação de sinais é dada por

$$P_e = \sum_{\mathcal{X}} P(x_m) P_{e,m}, \quad (11)$$

onde $P(x_m)$ é a probabilidade de ocorrência do sinal x_m .

A energia média de uma constelação de sinais \mathcal{X} é definida como

$$E_t = \sum_{\mathcal{X}} P(x_m) d^2(x_m, \bar{x}), \quad (12)$$

onde $d^2(x_m, \bar{x})$ é a distância geodésica ao quadrado entre o sinal x_m e o baricentro da constelação \bar{x} . Sabemos que o baricentro de uma constelação de sinais é o ponto tal que a energia média da constelação de sinais é mínima. Portanto, para determinar \bar{x} devemos calcular a primeira derivada da energia média em relação a x , e supor que a mesma seja zero para $x = \bar{x}$. Dessa maneira, temos que \bar{x} é um ponto que satisfaz as seguintes equações diferenciais parciais

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_t}{\partial u} \Big|_{x=\bar{x}} &= 2 \sum_x P(x_m) d(x_m, \bar{x}) \frac{\partial d(x_m, x)}{\partial u} \Big|_{x=\bar{x}} = 0, \\ \frac{\partial E_t}{\partial v} \Big|_{x=\bar{x}} &= 2 \sum_x P(x_m) d(x_m, \bar{x}) \frac{\partial d(x_m, x)}{\partial v} \Big|_{x=\bar{x}} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

No sentido de explicitar analiticamente a relação sinal-ruído, definimos a energia média do ruído em M , dado que x_m foi transmitido, como sendo

$$\sigma^2 = \int_M d^2(y, x_m) p_Y(y/x_m) du dv. \quad (14)$$

Como mencionado, a densidade de probabilidade do ruído em uma variedade M está associada à densidade de probabilidade de $v \in T_{x_m} M$. Por exemplo, se $v = (x, y)$ é tal que x e y são variáveis aleatórias gaussianas então o vetor v também será gaussiano, pois $T_{x_m} M$ é uma transformação linear. Neste caso, para que a densidade de probabilidade condicional do sinal recebido y dado x_m esteja bem definida devemos supor que a variedade riemanniana M seja completa, isto é, para todo $x_m \in M$ a aplicação exponencial, $\exp_{x_m}(v)$, está definida para todo $v \in T_{x_m} M$.

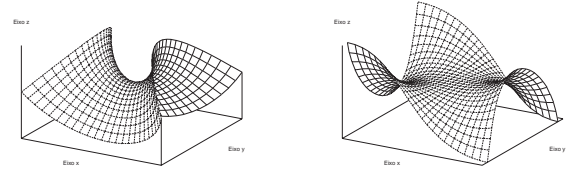
III. ANÁLISE DE DESEMPENHO DE CONSTELAÇÕES M-PSK EM SUPERFÍCIES MÍNIMAS

Nesta seção analisaremos o desempenho das constelações de sinais do tipo M-PSK em uma família de superfícies mínimas obtidas da representação de Weierstrass, (2), com $f(z) = 1$ e $g(z) = z^n = (u + iv)^n$, onde n é um número real não negativo. Chamamos a atenção ao fato de que quando $n = 0$ a superfície mínima gerada é o plano euclidiano. Consequentemente, recaindo no modelo tradicional de análise de um sistema de comunicações.

A Fig. 3 ilustra a família de superfícies mínimas conhecida como a família associada à superfície de Enneper, pois para $n = 1$ a superfície mínima gerada é a de Enneper (Fig. 3(a)), cuja parametrização é dada por

$$X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - u^2v, u^2 - v^2 \right) / 2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

A escolha desta família de superfícies é consequência principalmente do fato de que todas as geodésicas que partem do ponto $p = (0, 0)$ são geodésicas e mais do que isso, que as rotações em torno de p constituem o subgrupo das simetrias das geodésicas, consequentemente formando o correspondente grupo de isometrias. Como os elementos desse grupo podem ser associados a um conjunto de regiões temos que, se a cada uma dessas regiões escolhermos um ponto como o



(a) Superfície de Enneper, $n = 1$ (b) Superfície de Enneper, $n = 3$

Fig. 3. Família de superfícies mínimas de Enneper.

representante da “classe de equivalência”, e mais, que esses pontos tenham o mesmo valor de comprimento de arco do ponto $p = (0, 0)$, então o conjunto desses pontos forma uma constelação de sinais. Do fato de que as regiões contendo os pontos representantes da “classe de equivalência” são congruentes segue que a constelação de sinais é geometricamente uniforme do tipo PSK. Chamamos a atenção ao fato de que a propriedade de congruência de regiões não é típica em superfícies mínimas visto que as mesmas não possuem curvatura gaussiana constante.

Da equação (3), os coeficientes da primeira forma fundamental dessa família de superfícies mínimas são dados por

$$E = G = \lambda^2 = \frac{1}{4} (1 + (u^2 + v^2)^n)^2 \quad \text{e} \quad F = 0. \quad (15)$$

A curvatura gaussiana da família de superfícies mínimas Enneper, decorrente da substituição de (15) em (4), é dada por

$$K_n(u, v) = -16 \frac{n^2 (u^2 + v^2)^{n-1}}{(1 + (u^2 + v^2)^n)^2}. \quad (16)$$

onde explicitamos a dependência de $K(u, v)$ com n .

Note que substituindo $n = 0$ em (16), a curvatura gaussiana é igual a zero para todos os pontos $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, isto é consequência do fato já mencionado de que a superfície mínima gerada ser o plano euclidiano. Observe que para cada valor de n em $K_n(u, v)$ obtemos uma superfície de revolução, portanto na Fig. 4 ilustramos apenas suas geratrizes para $n = 0, 1, 3$.

Da equação (5), as geodésicas da família de superfícies mínimas Enneper são as soluções do seguinte sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{aligned} u'' + \frac{(u^2 + v^2)^{n-1} [2nu((v')^2 - (u')^2) + 4nu'v'v]}{1 + (u^2 + v^2)^n} &= 0, \\ v'' + \frac{(u^2 + v^2)^{n-1} [2nv((u')^2 - (v')^2) + 4nv'u'u]}{1 + (u^2 + v^2)^n} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Como mencionado, as retas $u(t) = av(t)$, com $a \in \mathbb{R}$, são geodésicas das superfícies mínimas associadas à família Enneper e, portanto satisfazem (17). No sentido de simplificar os cálculos para a determinação da densidade de probabilidade de $v = (x, y)$, iremos fazer uso desse fato e realizar a mudança de coordenadas de M para T_{x_m} , dada por $v = (x, y) = \exp_{x_m}^{-1}(y)$ quando $x_m = (0, 0)$, isto é,

$$x = \frac{u}{2} \left(1 + \frac{(u^2 + v^2)^n}{2n + 1} \right) \quad \text{e} \quad y = \frac{v}{2} \left(1 + \frac{(u^2 + v^2)^n}{2n + 1} \right). \quad (18)$$

Da equação (9), segue que o jacobiano da transformação é

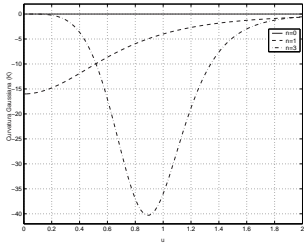


Fig. 4. Geratrizes da curvatura gaussiana da família Enneper para $n = 0, 1, 3$.

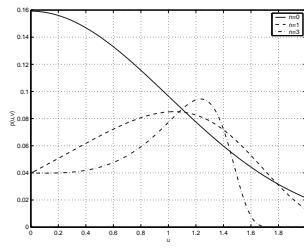


Fig. 5. Geratrizes da densidade gaussiana da família Enneper para $n = 0, 1, 3$.

dado por

$$|J| = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2(n+1)(u^2+v^2)^n + (u^2+v^2)^{2n}}{2n+1} \right). \quad (19)$$

Portanto, das equações (18) e (19) podemos calcular a densidade de probabilidade do sinal recebido com relação ao ponto $(0,0)$ através da equação (8). Para o caso em que as variáveis aleatórias x e y são gaussianas com médias nulas e mesma variância, σ^2 , a densidade de probabilidade do sinal recebido com relação ao ponto $(0,0)$ é dada por

$$p(y/(0,0)) = \frac{1}{8\pi\sigma^2} e^{-\frac{(u^2+v^2)}{8\sigma^2}} \left(1 + \frac{(u^2+v^2)^n}{2n+1} \right)^2 \times \left(1 + \frac{2(n+1)(u^2+v^2)^n + (u^2+v^2)^{2n}}{2n+1} \right). \quad (20)$$

É importante notar que a densidade explicitada pela equação (20) é uma gaussiana circular vista do ponto $(0,0)$ das superfícies mínimas da família Enneper. Da mesma forma que $K_n(u,v)$ gera uma superfície de revolução para cada valor de n , a equação (20) também gera uma superfície de revolução. Então, a Fig. 5 ilustra as geratrizes de $p(y/(0,0))$ para $n = 0, 1, 3$.

Com esses elementos, estamos prontos para analisar o desempenho das constelações de sinais do tipo M-PSK nas superfícies da família Enneper considerando que o ruído seja gaussiano circular.

Uma constelação de sinais M-PSK nas superfícies da família Enneper consiste do conjunto de pontos $\mathcal{X} = \{x_1 = u_1 + jv_1, \dots, x_m = u_m + jv_m\}$ dados por

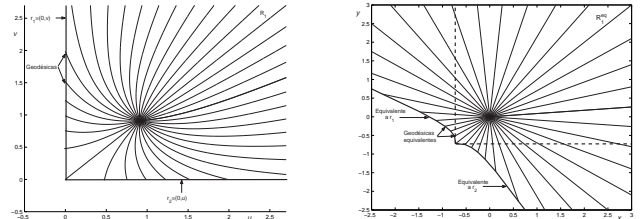
$$x_i = \rho e^{j\theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

onde $\theta_i = 2(i-0.5)\pi/m$, $i = 1, 2, \dots, m$ e ρ é a distância geodésica, obtido de (6), entre um ponto $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ e a origem $(0,0)$, dada por

$$d(u,v) = \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2} \left(1 + \frac{(u^2+v^2)^n}{2n+1} \right). \quad (21)$$

Considere, por exemplo, uma constelação 4-PSK com energia média igual a 1 no espaço bidimensional M com métrica induzida da superfície mínima de Enneper. Dessa forma, $\rho = 0.91069$. Neste caso, a Fig. 6(a) ilustra a região de decisão do sinal $x_1 \in \mathcal{X}$, em M , como sendo a área limitada pelas retas $r_1 = (u, 0)$ e $r_2 = (0, v)$, para $u > 0$ e $v > 0$.

Observe que a forma como definimos a ação do ruído pela



(a) Na variedade M .

(b) No plano tangente $T_{x_1}M$.

Fig. 6. Região de decisão do sinal x_1 da constelação 4-PSK para $n = 1$.

aplicação exponencial permite-nos encontrar uma região de decisão equivalente ao sinal x_1 , R_1^{eq} , no plano tangente $T_{x_1}M$, Fig. 6(b), como sendo a área limitada pelas curvas equivalentes em $T_{x_m}M$ às retas r_1 e r_2 em M .

Esse conceito de região de decisão equivalente é um artifício muito importante, principalmente quando a variedade M não for de curvatura gaussiana constante, pois o cálculo da probabilidade de erro de símbolo, $P_{e,m}$, em M pode se tornar um tanto quanto difícil.

Sabemos que a única superfície mínima com curvatura gaussiana constante é o plano, $K_n(u,v) = 0$, e, portanto, a análise de desempenho das constelações de sinais em superfícies mínimas, exceto o plano, apresenta grande complexidade. Entretanto, a curvatura gaussiana de uma superfície mínima é sempre não positiva para todos os seus pontos, então pelo teorema de Hadamard, [4], temos que a aplicação exponencial é um difeomorfismo global de T_pM sobre M . Portanto, para esse caso particular, uma maneira de obtermos $P_{e,m}$ é integrar a densidade de probabilidade de $v \in T_{x_m}M$, que gera o ruído da variedade, sobre uma região de decisão equivalente R_m^{eq} em $T_{x_m}M$, obtida da região de decisão R_m em M . Dessa forma, temos por um abuso de notação que $R_m^{eq} = \exp_{x_m}^{-1}(R_m)$.

A Fig. 7 mostra as curvas da probabilidade de erro versus a relação sinal ruído de uma constelação 4-PSK em espaços bidimensionais com métrica induzida da família Enneper, para $n = 0, 1, 3$. Observe que as constelações para $n = 1, 3$ possuem desempenhos superiores aos da constelação 4-PSK no plano euclidiano ($n = 0$). Esse fato pode ser melhor entendido quando observamos a Fig. 6(b), pois a região de decisão equivalente, R_1^{eq} , contém a região de um mesmo sinal 4-PSK quando a superfície é o plano.

Da mesma forma que a constelação 4-PSK, as constelações 8-PSK e 16-PSK apresentam desempenhos superiores nos espaços bidimensionais para $n = 1, 3$, quando comparados àqueles das constelações bidimensionais 8-PSK e 16-PSK para $n = 0$. As Figs. 8 e 9 ilustram tal afirmação.

Como podemos observar, existe um ganho de desempenho, em termos da probabilidade média de erro, das constelações M-PSK na família Enneper ($n > 0$) quando comparadas com as constelações M-PSK no espaço euclidiano ($n = 0$). Este fato pode ser explicado, como em [10], pelo fato das superfícies mínimas terem curvatura gaussiana não positiva e pelo Teorema de Rauch, [4], que intuitivamente, exprime o fato

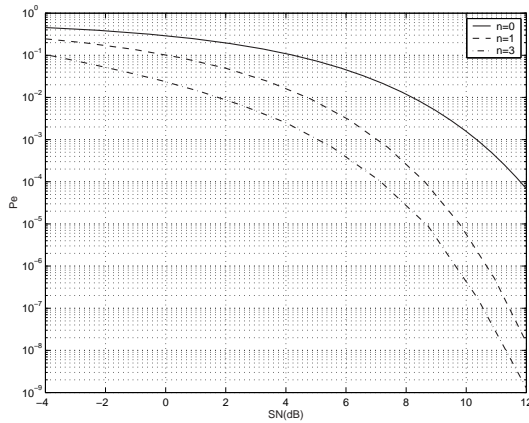


Fig. 7. $P_e \times SNR$ de uma constelação 4-PSK na família Enneper, para $n = 0, 1, 3$.

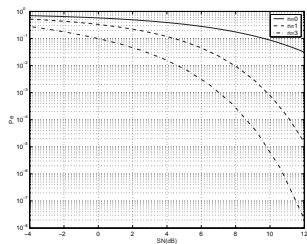


Fig. 8. $P_e \times SNR$ da constelação 8-PSK na família Enneper, para $n = 0, 1, 3$.

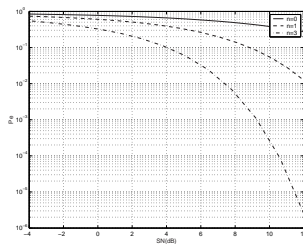


Fig. 9. $P_e \times SNR$ da constelação 16-PSK na família Enneper, para $n = 0, 1, 3$.

de que se as curvaturas gaussianas aumentam os comprimentos diminuem. Então para o caso particular do ruído gaussiano circular, temos que P_e diminui com o aumento da distância mínima da constelação, e esta aumenta com a redução da curvatura para uma mesma energia média da constelação. Por essa razão, é que na Fig. 6(b), a região equivalente R_1^{eq} correspondendo ao sinal x_1 em $T_{x_1}M$, para $n = 1$, é “maior” do que a região em tracejado correspondendo ao mesmo sinal x_1 em $T_{x_1}M$, para $n = 0$ (caso euclidiano).

IV. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos uma proposta de construção e de análise de desempenho de sistemas de comunicações utilizando a modulação M -PSK cujos sinais pertencentes à essas constelações estão contidos nas superfícies da família de superfícies mínimas Enneper. Este estudo teve como motivação o fato de que os mergulhos de certos canais discretos sem memória, de interesse prático, ocorrem em superfícies mínimas. Como consequência, mostramos que o desempenho de tais sistemas é melhor do que aqueles tradicionalmente utilizados em sistemas de comunicações. Consequentemente, inserindo no contexto de Teoria das Comunicações esta nova família de superfícies.

Agradecimentos - Os autores agradecem à FAPESP, ao CNPq e à CAPES pelo suporte financeiro recebido durante o período da realização desta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPESP, ao CNPq e à CAPES pelo suporte financeiro recebido durante o período da realização desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- [1] E. Agustini, *Constelações de Sinais em Espaços Hiperbólicos*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas, Brasil, 2002.
- [2] E.B. da Silva, *Constelação de Sinais e Análise de Desempenho no Plano Hiperbólico*, Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Campinas, Brasil, 2000.
- [3] M.P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1976.
- [4] M.P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, Projeto Euclides, 1979.
- [5] Carmo, M. P., *Superfícies Mínimas, 16 Colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA, Rio de Janeiro, 1987.
- [6] J.D. de Lima, e R. Palazzo Jr., “Embedding discrete memoryless channels on compact and minimal surfaces,” *IEEE Information Theory Workshop*, Bangalore, India, Oct. 20-25, 2002.
- [7] J.G. Proakis, *Digital Communications*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1989.
- [8] J. Lucas M. Barbosa, A. Gervásio Colares, *Minimal Surfaces in R^3* , *Lecture Notes in Mathematics*, No. 1195, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [9] R.G. Cavalcante, *Análise de Desempenho de Constelações de Sinais em Variedades Riemannianas*, Dissertação de Mestrado, FEEC-UNICAMP, Campinas, Brasil, 2002.
- [10] R.G. Cavalcante, e R. Palazzo Jr., “Performance analysis of M-PSK signal constellations in Riemannian varieties,” *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, 2003.
- [11] W. Klingenberg, *A Course in Differential Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1978.