

Expressões para a Probabilidade de Erro de Bit de Esquemas de Modulação 64-QAM e M -PAM para um Canal com Desvanecimento Rayleigh

Waslon Terllizzie A. Lopes, Francisco Madeiro e Marcelo S. Alencar

Resumo—Neste trabalho são apresentadas expressões exatas para a probabilidade de erro de bit (BEP) dos esquemas de modulação 64-QAM e M -PAM para um canal com desvanecimento Rayleigh. Diferentemente das abordagens apresentadas na literatura, o canal de comunicações é visto como um canal sujeito ao ruído aditivo, que é modelado como a razão entre uma variável aleatória (v.a.) gaussiana e uma v.a. Rayleigh. A partir da função cumulativa de probabilidade (FCP) do processo que modela esse ruído aditivo são obtidas expressões exatas para a BEP desses esquemas de modulação.

Palavras-Chave— Comunicações móveis, canal com desvanecimento Rayleigh, probabilidade de erro de bit, QAM, PAM.

Abstract— This paper presents exact expressions for the bit error probability (BEP) of 64-QAM and M -PAM for a Rayleigh fading channel. Unlike the approaches presented in the literature, the communication channel is seen as an additive noisy channel where the additive noise is modeled as the ratio between a Gaussian random variable (r.v.) and a Rayleigh r.v. By using the cumulative density function of this additive noise, exact expressions for the BEP of those schemes are obtained.

Keywords— Mobile communications, Rayleigh fading channel, bit error probability, QAM, PAM.

I. INTRODUÇÃO

A obtenção de taxas de transmissão elevadas, com confiabilidade, sujeitas à restrição de disponibilidade de um canal com largura de faixa muito limitada, constitui um dos grandes desafios em sistemas de comunicações sem fio. O canal móvel, por exemplo, apresenta eficiência espectral muito abaixo do seu limite teórico. O esquema QAM (*quadrature amplitude modulation*) é uma técnica de modulação atraente no que diz respeito à eficiência em termos de largura de faixa. Estudos (e.g. [1]–[6]) têm sido desenvolvidos no sentido de avaliar o desempenho de esquemas de modulação QAM em termos de probabilidade de erro de bit (BEP, *bit error probability*). Nesse contexto, a obtenção de expressões fechadas para a BEP de esquemas QAM é um problema relevante em sistemas de comunicações.

Estudos relatados na literatura têm apresentado expressões para a BEP de esquemas QAM em um canal com ruído aditivo gaussiano branco (AWGN, *additive white Gaussian noise*). Convencionalmente, aproximações para a BEP de esquemas de modulação QAM têm sido obtidas calculando a probabilidade

de erro de símbolo ou simplesmente estimando-a com o uso de limites inferiores/superiores [7]. Aproximações melhores para a BEP de esquemas QAM sujeitos a AWGN foram apresentadas recentemente em [1], [2]. É importante mencionar que apesar de algumas expressões aproximadas apresentadas na literatura fornecerem valores de BEP com precisão para uma relação sinal-ruído (SNR, *signal-to-noise ratio*) elevada, a avaliação da BEP utilizando essas expressões tende a se afastar dos valores exatos correspondentes ao ser considerada uma baixa SNR. Apesar de muita atenção ter sido dedicada à avaliação de desempenho de QAM em termos de probabilidade de erro de bit, só recentemente, em uma contribuição de Cho e Yoon [8], foi obtida uma expressão exata, fechada, para a probabilidade de erro de bit do esquema QAM M -ário (M -QAM) em um canal AWGN quando utilizado um mapeamento de Gray.

Em se tratando da avaliação de desempenho de esquemas QAM em um canal com desvanecimento Rayleigh, a probabilidade de erro de bit tem sido objeto de interesse em alguns trabalhos, podendo ser citadas as contribuições de Fortune *et al.* [3], [5], Shayesteh e Aghamohammadi [4] e Vitthaladevuni e Alouini [9].

Em [10] é apresentado um método conveniente para obter expressões fechadas para a BEP de esquemas de modulação sujeitos ao desvanecimento Rayleigh. No método, o canal com desvanecimento Rayleigh é visto como um canal sujeito a um ruído aditivo, denotado por $m(t)$, o qual é modelado como a razão entre uma variável aleatória (v.a.) gaussiana e uma v.a. Rayleigh. O método consiste em usar a função cumulativa de probabilidade (FCP) desse ruído, dada por [11]

$$P_{\mathcal{M}}(m) = \int_{-\infty}^m p_{\mathcal{M}}(x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + N_0}} + 1 \right), \quad (1)$$

para obter as expressões para a BEP. No presente artigo, esse método é usado para obter expressões fechadas para a BEP dos esquemas 64-QAM e M -PAM sujeitos ao desvanecimento Rayleigh.

II. BEP PARA O ESQUEMA 64-QAM EM UM CANAL COM DESVANECIMENTO RAYLEIGH

No esquema 64-QAM, a informação a ser transmitida é mapeada em símbolos com 6 bits e cada símbolo é usado para definir uma única amplitude e uma única fase da portadora. A duração de cada símbolo determina a largura de faixa do sinal 64-QAM. A Fig. 1 ilustra uma constelação com 64 níveis em que cada ponto corresponde a um símbolo 64-QAM.

Os símbolos da constelação 64-QAM podem ser vistos como dois sinais AM (cada um com oito níveis) que são

Waslon Terllizzie Araújo Lopes e Marcelo Sampaio de Alencar, Laboratório de Comunicações, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, PB, Brasil, E-mails: {waslon,malencar}@dee.ufcg.edu.br.

Francisco Madeiro, Departamento de Estatística e Informática, Universidade Católica de Pernambuco, Recife, PE, Brasil, E-mail: madeiro@dei.unicap.br.

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

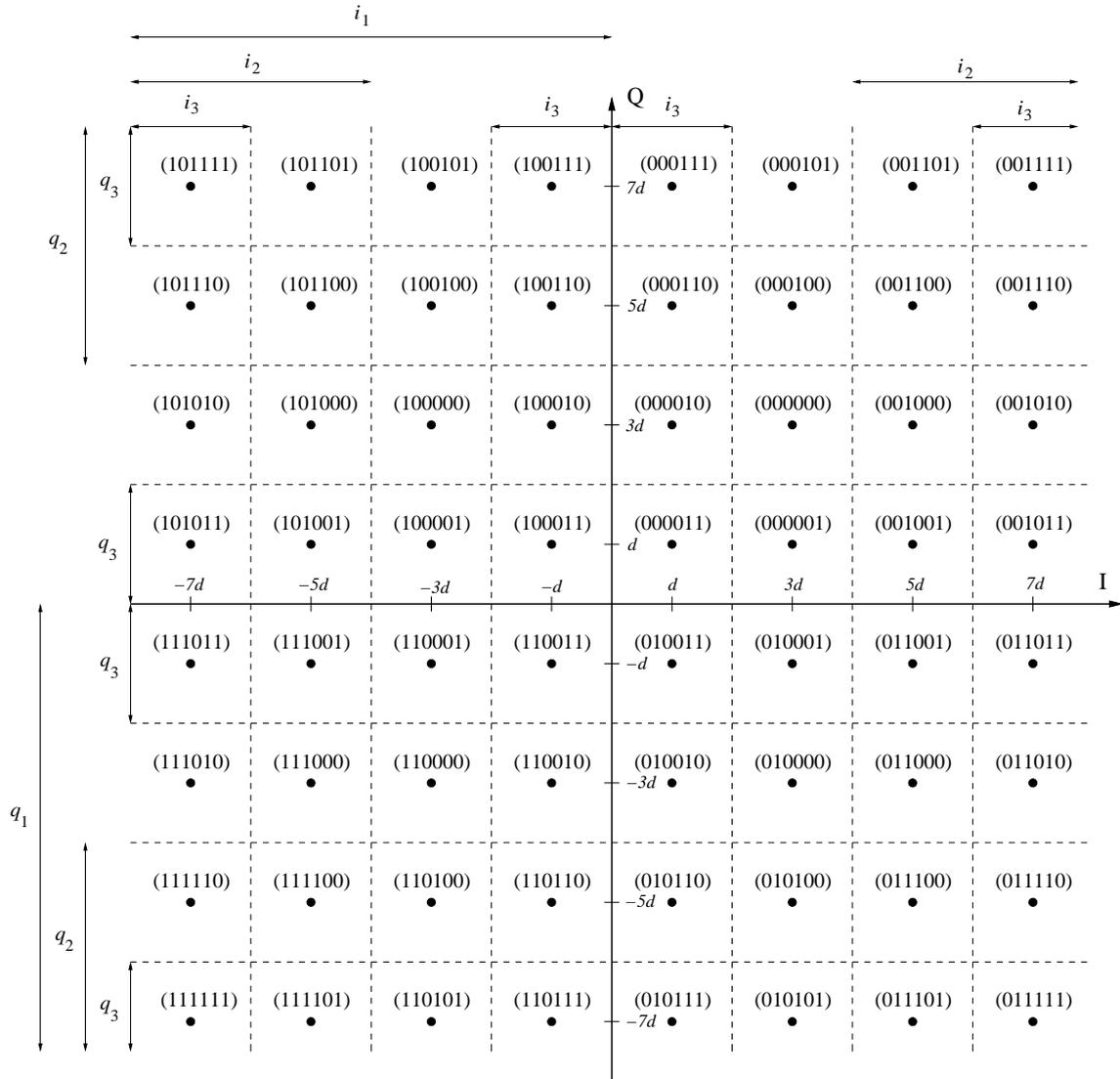


Fig. 1. Constelação 64-QAM.

transmitidos em fase (I) e em quadratura (Q) na mesma portadora [3], [7]. Cada uma das portadoras AM é transmitida com uma amplitude do conjunto $(7d, 5d, 3d, d, -d, -3d, -5d, -7d)$, sendo d a distância entre os símbolos apresentada na Fig. 1. Um código Gray de 3 bits é usado para associar cada tripla de bits a uma amplitude da portadora AM. As palavras 011, 010, 000, 001, 101, 100, 110 e 111 são atribuídas aos níveis $7d, 5d, 3d, d, -d, -3d, -5d$ e $-7d$, respectivamente, conforme mostra a Fig. 2. Os símbolos 64-QAM são obtidos a partir do entrelaçamento dos bits em quadratura e em fase. Um símbolo 64-QAM apresenta a forma $i_1q_1i_2q_2i_3q_3$, em que i_1, i_2 e i_3 representam os bits correspondentes à componente em fase e q_1, q_2 e q_3 representam os bits correspondentes à componente em quadratura.

A demodulação é realizada usando as fronteiras de decisão mostradas na Fig. 2 e as seguintes equações [3], [5]:

$$\begin{aligned} \text{se } I, Q \geq 0, & \text{ então } i_1, q_1 = 0, \\ \text{se } I, Q < 0, & \text{ então } i_1, q_1 = 1, \end{aligned} \quad (2)$$

para os bits mais significativos,

$$\begin{aligned} \text{se } I, Q \geq 4d, & \text{ então } i_2, q_2 = 1, \\ \text{se } -4d \leq I, Q < 4d, & \text{ então } i_2, q_2 = 0, \\ \text{se } -4d > I, Q, & \text{ então } i_2, q_2 = 1, \end{aligned} \quad (3)$$

para os próximos bits mais significativos, e, finalmente,

$$\begin{aligned} \text{se } I, Q \geq 6d, & \text{ então } i_3, q_3 = 1, \\ \text{se } 2d \leq I, Q < 6d, & \text{ então } i_3, q_3 = 0, \\ \text{se } -2d \leq I, Q < 2d, & \text{ então } i_3, q_3 = 1, \\ \text{se } -6d \leq I, Q < -2d, & \text{ então } i_3, q_3 = 0, \\ \text{se } -6d > I, Q, & \text{ então } i_3, q_3 = 1, \end{aligned} \quad (4)$$

para os bits menos significativos.

Sem perda de generalidade, a probabilidade de erro de bit do esquema 64-QAM pode ser obtida considerando a transmissão independente das componentes em fase (I) e quadratura (Q),

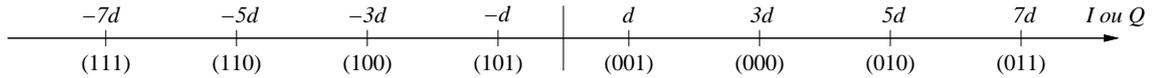


Fig. 2. Componentes da constelação 64-QAM.

mostradas na Fig. 2. A BEP, portanto, pode ser expressa como

$$P_{64\text{-QAM}} = \frac{1}{8} [P(E|111) + P(E|110) + P(E|100) + P(E|101) + P(E|001) + P(E|000) + P(E|010) + P(E|011)], \quad (5)$$

em que $P(E|b_1b_2b_3)$ denota a probabilidade de erro de bit dado que os bits $b_1b_2b_3$ foram transmitidos. Pela simetria da Fig. 2, tem-se que $P(E|111) = P(E|011)$, $P(E|110) = P(E|010)$, $P(E|100) = P(E|000)$ e $P(E|101) = P(E|001)$. Portanto, (5) reduz-se a

$$P_{64\text{-QAM}} = \frac{P(E|111) + P(E|110) + P(E|100) + P(E|101)}{4}. \quad (6)$$

Observando a Fig. 2, $P(E|111)$ pode ser escrita em termos de probabilidades relacionadas a m , ou seja,

$$P(E|111) = \frac{1}{3}P(d \leq m < 3d) + \frac{2}{3}P(3d \leq m < 5d) + \frac{1}{3}P(5d \leq m < 7d) + \frac{2}{3}P(7d \leq m < 9d) + \frac{3}{3}P(9d \leq m < 11d) + \frac{2}{3}P(11d \leq m < 13d) + \frac{1}{3}P(m \geq 13d). \quad (7)$$

Usando (1), a equação anterior pode ser dada por

$$P(E|111) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + N_0}} + 1 \right) \Big|_d^{3d} \right] + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + N_0}} + 1 \right) \Big|_{3d}^{5d} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + N_0}} + 1 \right) \Big|_{5d}^{7d} \right] + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + N_0}} + 1 \right) \Big|_{7d}^{9d} \right] + \frac{3}{3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + N_0}} + 1 \right) \Big|_{9d}^{11d} \right] + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + N_0}} + 1 \right) \Big|_{11d}^{13d} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + N_0}} + 1 \right) \Big|_{13d}^{+\infty} \right]. \quad (8)$$

Seja

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + N_0}}. \quad (9)$$

Assim, a expressão anterior pode ser reescrita como

$$P(E|111) = \frac{1}{3}[f(3d) - f(d)] + \frac{2}{3}[f(5d) - f(3d)] + \frac{1}{3}[f(7d) - f(5d)] + \frac{2}{3}[f(9d) - f(7d)] + \frac{3}{3}[f(11d) - f(9d)] + \frac{2}{3}[f(13d) - f(11d)] + \frac{1}{3}[1/2 - f(13d)]. \quad (10)$$

De forma semelhante,

$$P(E|110) = \frac{1}{3}[1/2 - f(d)] + \frac{1}{3}[f(3d) - f(d)] + \frac{2}{3}[f(5d) - f(3d)] + \frac{3}{3}[f(7d) - f(5d)] + \frac{2}{3}[f(9d) - f(7d)] + \frac{1}{3}[f(11d) - f(9d)] + \frac{2}{3}[1/2 - f(11d)], \quad (11)$$

$$P(E|100) = \frac{2}{3}[1/2 - f(3d)] + \frac{1}{3}[f(3d) - f(d)] + \frac{1}{3}[f(3d) - f(d)] + \frac{2}{3}[f(5d) - f(3d)] + \frac{1}{3}[f(7d) - f(5d)] + \frac{2}{3}[f(9d) - f(7d)] + \frac{3}{3}[1/2 - f(9d)], \quad (12)$$

e

$$P(E|101) = \frac{1}{3}[1/2 - f(5d)] + \frac{2}{3}[f(5d) - f(3d)] + \frac{1}{3}[f(3d) - f(d)] + \frac{1}{3}[f(3d) - f(d)] + \frac{2}{3}[f(5d) - f(3d)] + \frac{3}{3}[f(7d) - f(5d)] + \frac{2}{3}[1/2 - f(7d)]. \quad (13)$$

Substituindo (10)-(13) em (6), tem-se

$$P_{64\text{-QAM}} = \frac{1}{4} \left[2 - \frac{7}{3}f(d) - \frac{6}{3}f(3d) + \frac{1}{3}f(5d) - \frac{1}{3}f(9d) + \frac{1}{3}f(13d) \right]. \quad (14)$$

Observando a Fig. 1, a energia média por símbolo da constelação, E_S , é dada por

$$E_S = 42d^2. \quad (15)$$

Tendo em vista que cada seqüência de 6 bits é mapeada em um símbolo da constelação, a energia por bit, E_b , é dada por

$$E_b = 7d^2. \quad (16)$$

Substituindo (16) em (14), e levando em consideração (9), a expressão para a BEP do esquema 64-QAM em função de E_b/N_0 é finalmente dada por

$$P_{64\text{-QAM}} = \frac{1}{24} \left[12 - 7 \sqrt{\frac{(1/7)E_b/N_0}{(1/7)E_b/N_0 + 1}} - 6 \sqrt{\frac{(9/7)E_b/N_0}{(9/7)E_b/N_0 + 1}} + \sqrt{\frac{(25/7)E_b/N_0}{(25/7)E_b/N_0 + 1}} - \sqrt{\frac{(81/7)E_b/N_0}{(81/7)E_b/N_0 + 1}} + \sqrt{\frac{(169/7)E_b/N_0}{(169/7)E_b/N_0 + 1}} \right]. \quad (17)$$

Conforme se pode observar na Fig. 3, a Equação (17) é corroborada por resultados de simulação de Monte Carlo.

III. BEP PARA O ESQUEMA M -PAM EM UM CANAL COM DESVANECIMENTO RAYLEIGH

Recentemente, em [8], foi obtida uma expressão fechada para a BEP do esquema M -PAM (M -ary pulse amplitude modulation) por um canal com ruído aditivo gaussiano branco (AWGN). Nesta seção, os resultados apresentados por Cho e Yoon em [8] são usados para obter uma expressão fechada para a BEP do esquema M -PAM sujeito ao desvanecimento Rayleigh.

Considere um AWGN com média zero e densidade espectral de potência $N_0/2$. Sejam P_b a probabilidade de erro de bit, E_b a energia de bit, M o número de símbolos da constelação PAM e $P_b(k)$ a taxa de erro de bit para o k -ésimo bit, com $k \in \{1, 2, \dots, \log_2 M\}$.

Com base na consistência do mapeamento de uma constelação usando o código Gray [12], Cho and Yoon obtiveram em [8] uma expressão para a BEP do esquema M -PAM por um canal AWGN, dada por

$$P_b = \frac{1}{M \log_2 M} \sum_{k=1}^{\log_2 M} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})M-1} \left\{ w(i, k, M) \cdot \operatorname{erfc} \left((2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma}{M^2 - 1}} \right) \right\}, \quad (18)$$

com

$$w(i, k, M) = (-1)^{\lfloor \frac{i \cdot 2^{k-1}}{M} \rfloor} \cdot \left(2^{k-1} - \left\lfloor \frac{i \cdot 2^{k-1}}{M} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right), \quad (19)$$

em que $\gamma = E_b/N_0$ denota a relação sinal-ruído (SNR) por bit, $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor que x , e $\operatorname{erfc}(\cdot)$ denota a função erro complementar, dada por

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (20)$$

O principal *insight* de Cho e Yoon [8] foi expressar a BEP de M -PAM por um canal AWGN em termos de uma soma ponderada de funções erro complementar. Os pesos $w(i, k, M)$ incorporam o efeito (na BEP) da posição dos bits em um símbolo com $\log_2 M$ bits. Note que o termo $\operatorname{erfc}(\cdot)$ em (18) corresponde a duas vezes a probabilidade de que o ruído aditivo gaussiano exceda $(2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot E_b}{(M^2-1)N_0}}$. Em canais aditivos não-gaussianos, os pesos em (19) podem ser usados em conjunto com a função cumulativa de probabilidade (FCP)

do ruído aditivo correspondente para determinar a BEP do esquema M -PAM.

Considerando o canal com desvanecimento Rayleigh, a FCP da v.a. que modela o ruído aditivo correspondente é dada por (1). Portanto, duas vezes a probabilidade de que o ruído aditivo $m(t)$ exceda $(2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot E_b}{(M^2-1)N_0}}$ é dada por

$$2 \times P \left(m \geq (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot E_b}{(M^2-1)N_0}} \right) = 2 \times \int_{\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2 M \cdot E_b}{(M^2-1)N_0}}}^{\infty} p_{\mathcal{M}}(m) dm = \left(1 - \frac{\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2 M \cdot E_b}{(M^2-1)N_0}}}{\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2 M \cdot E_b}{(M^2-1)N_0} + 1}} \right). \quad (21)$$

Usando (21) e os pesos em (19), a expressão para a BEP do esquema M -PAM sujeito ao desvanecimento Rayleigh, P_{Ray} , é finalmente dada por

$$P_{\text{Ray}} = \frac{1}{M \log_2 M} \sum_{k=1}^{\log_2 M} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})M-1} \left\{ w(i, k, M) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2 M \cdot \gamma}{M^2-1}}}{\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2 M \cdot \gamma}{M^2-1} + 1}} \right) \right\}, \quad (22)$$

que se apresenta como uma expressão nova, exata, fechada.

Alguns exemplos numéricos de (22) são apresentados na Fig. 4, que mostra a BEP do esquema M -PAM em função da SNR por bit para $M = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ e 128 por um canal com desvanecimento Rayleigh. Conforme mostra a Fig. 4, os resultados de simulação de Monte Carlo corroboram os resultados numéricos obtidos de (22). Observa-se na Fig. 4 que 3–4 dB de SNR por bit devem ser investidos para transmitir um bit extra, de modo a manter a probabilidade de erro de bit média em 2×10^{-2} .

IV. CONCLUSÃO

Neste artigo foram obtidas expressões exatas, fechadas, para a probabilidade de erro de bit (BEP) dos esquemas de modulação 64-QAM e M -PAM sujeitos ao desvanecimento Rayleigh. As expressões obtidas foram corroboradas por resultados de simulação de Monte Carlo.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Lu, K. B. Letaief, J. C.-I. Chuang and M. L. Liou. "M-PSK and M-QAM BER Computation Using Signal-Space Concepts". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, no. 2, pp. 181–184, February 1999.
- [2] L.-L. Yang and L. Hanzo. "A Recursive Algorithm for the Error Probability Evaluation of M-QAM". *IEEE Communications Letters*, vol. 4, no. 10, pp. 304–306, October 2000.
- [3] P.-M. Fortune, L. Hanzo and R. Steele. "On the Computation of 16-QAM and 64-QAM Performance in Rayleigh-Fading Channels". *IEICE Transactions on Communications*, vol. E75-B, no. 6, pp. 466–475, June 1992.
- [4] M. G. Shayesteh and A. Aghamohammadi. "On the Error Probability of Linearly Modulated Signals on Frequency-Flat Ricean, Rayleigh and AWGN Channels". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 43, no. 2/3/4, pp. 1454–1466, February/March/April 1995.

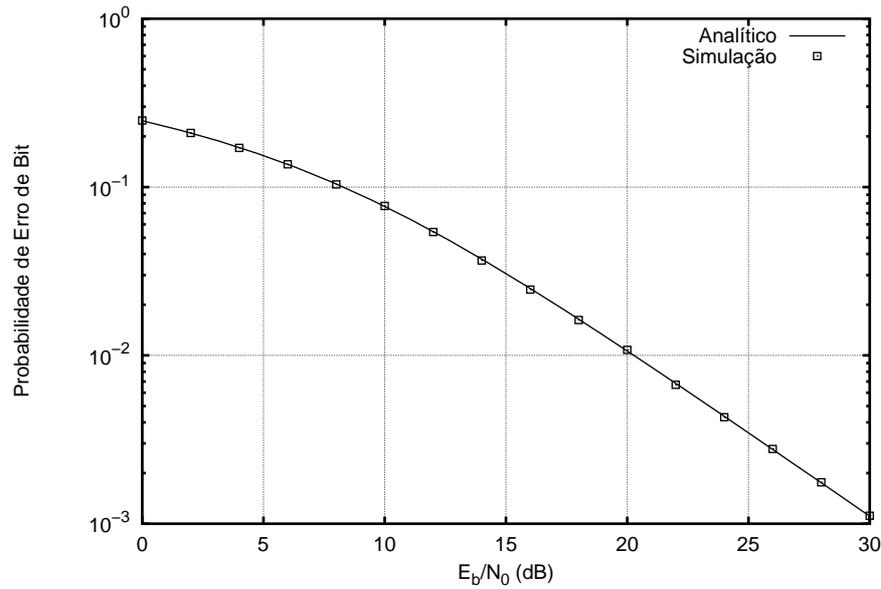


Fig. 3. Probabilidade de erro de bit do esquema 64-QAM por um canal com desvanecimento Rayleigh, em função da relação sinal-ruído por bit (E_b/N_0).

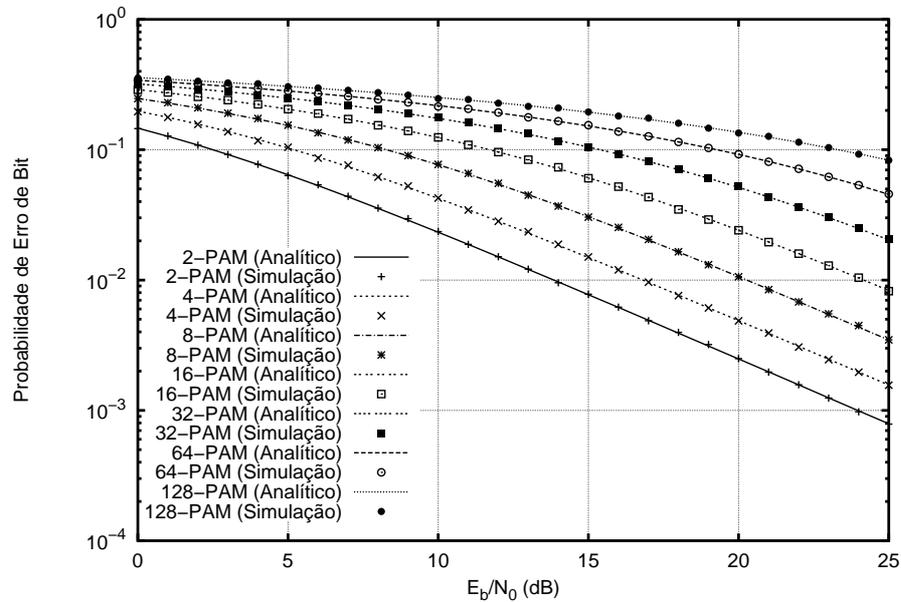


Fig. 4. Probabilidade de erro de bit do esquema M -PAM por um canal com desvanecimento Rayleigh, em função da relação sinal-ruído por bit (E_b/N_0).

[5] L. Hanzo, R. Steele and P.-M. Fortune. "A Subband Coding, BCH Coding, and 16-QAM System for Mobile Radio Speech Communications". *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 39, no. 4, pp. 327–339, November 1990.

[6] A. Aghamohammadi and H. Meyr. "On the Error Probability of Linearly Modulated Signals on Rayleigh Frequency-Flat Fading Channels". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 38, no. 11, pp. 1966–1970, November 1990.

[7] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, New York, third edition, 1995.

[8] K. Cho and D. Yoon. "On the General BER Expression of One- and Two-Dimensional Amplitude Modulations". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, no. 7, pp. 1074–1080, July 2002.

[9] P. K. Vitthaladevuni and M.-S. Alouini. "BER Computation of 4/ M -QAM Hierarchical Constellations". *IEEE Transactions on Broadcasting*, vol. 47, no. 3, pp. 228–239, September 2001.

[10] W. T. A. Lopes, F. Madeiro and M. S. Alencar. "Um Novo Método para o Cálculo da Probabilidade de Erro de Bit de Esquemas de Modulação Sujeitos ao Desvanecimento Rayleigh". In *Anais do XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBT'03)*, Outubro 2003.

[11] W. T. A. Lopes and M. S. Alencar. "QPSK Detection Schemes for Rayleigh Fading Channels". In *Proceedings of the IEEE International Telecommunications Symposium (ITS'02)*, Natal, RN, Brazil, September 2002.

[12] P. J. Lee. "Computation of the Bit Error Rate of Coherent M -ary PSK with Gray Code Bit Mapping". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 34, no. 5, pp. 488–491, May 1986.