

Aplicação da TD-MFIE para a predição da propagação de pulsos sobre terrenos irregulares

Rodrigo B. V. Teperino e Fernando J. S. Moreira

Resumo—Neste trabalho, uma técnica baseada na equação integral do campo magnético no domínio do tempo (TD-MFIE) é desenvolvida e aplicada na predição da propagação de pulsos eletromagnéticos polarizados verticalmente sobre uma superfície irregular. A atmosfera é assumida homogênea e a condutividade do solo suficientemente pequena de modo que este possa ser tratado como um condutor magnético perfeito para a polarização vertical. O terreno é assumido, ainda, eletricamente suave, o que permite o desprezo do retro-espalhamento no cálculo das correntes equivalentes superficiais, possibilitando que estas sejam calculadas de modo recursivo com o auxílio do método *marching-on-in-time* (MOIT).

Palavras-Chave—Propagação de pulsos eletromagnéticos, equação integral no domínio do tempo.

Abstract—This work presents a technique based on the time domain magnetic field integral equation (TD-MFIE) for the prediction of vertically-polarized short pulse propagation over irregular terrain. The atmosphere is considered homogeneous (vacuum) and the ground conductivity sufficiently small, such that, for a vertical polarization and grazing incidence, the terrain is treated as a perfect magnetic conductor. Also, the terrain profile is considered smooth so to neglect back-scattering phenomena. That enables the attainment of the equivalent magnetic surface currents via a spatial forward scheme, embeded in a *marching-on-in-time* (MOIT) procedure.

Keywords—Short pulse propagation, time domain integral equation.

I. INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento de computadores mais rápidos e eficientes, a aplicação de equações integrais na predição da propagação de ondas radioelétricas tem se tornado atraente. Técnicas eficientes no domínio da frequência, baseadas em equações integrais do campo elétrico (EFIE) e do campo magnético (MFIE), foram desenvolvidas e validadas para enlaces VHF e UHF sobre terrenos irregulares [1]–[8]. Nestes trabalhos, o terreno é assumido eletricamente suave e a atmosfera homogênea. A incidência do campo é considerada rasante e a polarização vertical, o que permite, para uma condutividade pequena (menor que 0,2 S/m), o tratamento do terreno como um condutor magnético perfeito.

Em [1], Hviid *et al.* apresentam uma comparação entre os resultados numéricos e medições feitas em uma cidade da Dinamarca para frequências entre 143,9 MHz e 1,9 GHz. Os erros médios ficaram abaixo de 6 dB, com um desvio padrão máximo de 10 dB. Em seu trabalho, Hviid *et al.* consideram a natureza esférica da frente de onda incidente, ao contrário

da abordagem bidimensional feita em [2] e [3]. Com o auxílio do método da fase estacionária para resolver assintoticamente a integral ao longo da direção perpendicular ao plano de incidência, reduziram a integral de superfície em uma integral de linha.

Em [4] e [5], um desenvolvimento semelhante foi apresentado, utilizando, entretanto, a MFIE ao invés da EFIE. Os resultados numéricos obtidos mostraram que a técnica baseada na MFIE obtém o mesmo nível de precisão com um número menor de funções de base para representar as correntes magnéticas equivalentes. O tratamento de terrenos com perdas foi abordado mais tarde em [6]. Finalmente, o método FAFFA (*Fast Far-Field Approximation*), apresentado em [2] para acelerar o cálculo das correntes equivalentes, foi desenvolvido em [8] para as formulações presentes em [4] e [5].

O crescente interesse em aplicações de faixa ultra larga (UWB—*Ultra-Wide Band*) [9] tem motivado o estudo de técnicas, baseadas nas equações integrais no domínio do tempo, para a predição da propagação de pulsos estreitos sobre terrenos irregulares. As principais vantagens de uma análise direta no domínio do tempo são a especificação direta da janela temporal de observação e a não ocorrência de *aliasing* inerente a uma transformada inversa de Fourier. No presente trabalho, é apresentado o desenvolvimento de uma formulação no domínio do tempo, baseada na MFIE. A MFIE foi escolhida por apresentar uma convergência com um número menor de funções de base conforme discutido em [4]. A formulação é obtida através da aplicação de uma transformada inversa de Fourier sobre a formulação no domínio da frequência desenvolvida e validada em [4] e [5]. Como a transformada opera apenas sobre as funções que variam com o tempo e as condições de contorno aplicadas não variam com o tempo, todas as considerações geométricas assumidas para simplificar a formulação em [4] e [5] são mantidas e já estão embutidas na solução da transformada. Um inconveniente, entretanto, é o aparecimento de uma convolução na formulação da MFIE no domínio do tempo (TD-MFIE), após a transformada. Desse modo, como na formulação da MFIE no domínio da frequência, as correntes magnéticas equivalentes são calculadas de modo recursivo, utilizando agora a técnica *marching-on-in-time* (MOIT) para o tratamento da variação temporal das correntes [10].

Para comprovar a precisão da formulação, foram realizadas algumas simulações sobre uma cunha simples e sobre duas cunhas consecutivas. Devido ao esforço computacional, apenas terrenos de dimensões relativamente pequenas foram considerados. Os resultados numéricos obtidos são comparados com dois métodos diferentes: a formulação da MFIE apresentada

em [4] e [5], com seus resultados transformados para o domínio do tempo com o auxílio de uma transformada inversa de Fourier rápida (IFFT), e da teoria uniforme da difração no domínio do tempo (TD-UTD) [11].

II. MFIE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Antes de iniciar o desenvolvimento da TD-MFIE, faz-se necessária uma apresentação da formulação da MFIE no domínio da frequência, a qual é utilizada para obter a TD-MFIE após a aplicação da transformada inversa de Fourier. Em [4] e [5], é apresentada uma formulação para a predição da propagação sobre terrenos suavemente irregulares baseada na MFIE no domínio da frequência. Considerando uma incidência rasante e o campo polarizado verticalmente, a superfície é tratada como um condutor magnético perfeito. A atmosfera é assumida homogênea e tratada como sendo o vácuo. Dessa forma, aplicando-se as condições de contorno para um condutor magnético perfeito [12], a MFIE no domínio da frequência pode ser escrita como [13]:

$$\hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}) = 0 = \hat{n} \times \left[\vec{H}_{in}(\vec{r}) + \frac{1}{\eta} \vec{L}_1(\vec{M}) \right], \quad (1)$$

onde \vec{H}_{in} representa o campo magnético incidente irradiado pela antena transmissora, η é a impedância característica do espaço livre ($\eta = 120\pi \Omega$ para o vácuo), \vec{M} representa a corrente magnética equivalente, \hat{n} é a normal em relação à superfície do terreno no ponto observador (veja Fig. 1) e:

$$\vec{L}_1(\vec{M}) = -jk \oint_{S'} \left[\vec{M}(\vec{r}') G - \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}') \nabla' G \right] ds', \quad (2)$$

onde $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ e G é a função de Green do espaço livre dada por

$$G = \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad (3)$$

onde \vec{r} e \vec{r}' localizam o observador e a fonte equivalente \vec{M} , respectivamente (veja Fig. 1).

Em [4] e [5], a superfície foi assumida invariante ao longo da direção perpendicular ao plano de incidência, o que permitiu a aplicação do método da fase estacionária, reduzindo a integral de superfície presente em (2) a uma integral de linha ao longo do perfil do terreno. Fazendo tais considerações geométricas, a MFIE pode ser escrita como

$$\hat{n} \times \vec{H}_{in} = \frac{jk}{\eta} \int_{\ell'} [\hat{n} \times M(\ell') \hat{y}] \frac{e^{-j(kR_2 + \pi/4)}}{4\pi \sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{\lambda}}} d\ell', \quad (4)$$

onde \vec{R}_1 e \vec{R}_2 são representados na Fig. 1, $R_{1,2} = |\vec{R}_{1,2}|$, e, no plano de incidência, $\vec{M} = \vec{M}(\ell') = M(\ell') \hat{y}$, sendo \hat{y} o vetor unitário normal ao plano de incidência. Para a solução da integral de linha presente em (4) é conveniente definir um sistema de coordenadas localmente ortogonal (\hat{n} , $\hat{\ell}$, \hat{y}), tal que $\hat{n} \times \hat{y} = -\hat{\ell}$ como na Fig. 1.

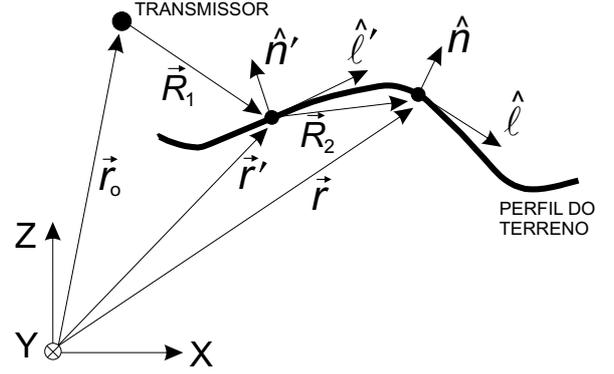


Fig. 1. Definição e posicionamento dos parâmetros considerados no desenvolvimento da formulação.

III. MFIE NO DOMÍNIO DO TEMPO

Para obter a TD-MFIE para o problema em questão, é possível aplicar a transformada inversa de Fourier em (4), de modo que todas as considerações geométricas feitas em (4), as quais não variam com o tempo, não sejam afetadas pela transformada e possam ser assumidas no domínio do tempo. Os pares de transformadas de Fourier adotados são [14]:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{M}(t)\} = M(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (5)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{M(\omega)\} = \mathcal{M}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (6)$$

Antes de aplicar a transformada, (4) pode ser escrita de forma mais apropriada como

$$\hat{n} \times \vec{H}_{in} = \frac{-\hat{\ell}}{\eta} \int_{\ell'} jk M(\ell') G_{MM}(R_1, R_2) d\ell', \quad (7)$$

onde

$$G_{MM}(R_1, R_2) = \frac{e^{-j(kR_2 + \pi/4)}}{4\pi \sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{\lambda}}} \quad (8)$$

pode ser interpretado como a função de Green da MFIE após a aplicação do método da fase estacionária em (1). Note que $-\hat{\ell} = \hat{n} \times \hat{y}$ não depende de ℓ' e pode ser retirado da integral. Desse modo, aplicando (6) em (7) e com o auxílio do teorema da convolução [14]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\hat{n} \times \vec{H}_{in}\} &= \hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{in}(t) \\ &= \frac{-\hat{\ell}}{\eta} \int_{\ell'} \mathcal{F}^{-1}\{jkM(\ell')\} * \mathcal{F}^{-1}\{G_{MM}(R_1, R_2)\} d\ell', \end{aligned} \quad (9)$$

onde $\vec{\mathcal{H}}_{in}$ representa o campo magnético incidente no domínio do tempo irradiado pela antena transmissora.

Assim, a transformada da função envolvendo a corrente magnética equivalente é [14]:

$$\mathcal{F}^{-1}\{jk\vec{M}(\ell')\} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{M}}(\ell', t)}{\partial t}, \quad (10)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo. Por sua vez, a transformada do termo associado à função de Green resultante

para o problema é:

$$\mathcal{F}^{-1}\{G_{MM}\} = \frac{\sqrt{2\pi c}/(8\pi^2)}{\sqrt{R_2\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(kR_2 - \omega t)}}{\sqrt{j\omega}} d\omega. \quad (11)$$

Resolvendo a integral em ω , presente em (11), obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(kR_2 - \omega t)}}{\sqrt{j\omega}} d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} [1 + \text{Sign}(\tau)], \quad (12)$$

onde o atraso

$$\tau = t - \frac{R_2}{c}, \quad (13)$$

e

$$\text{Sign}(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{para } \tau > 0 \\ 0, & \text{para } \tau = 0 \\ -1, & \text{para } \tau < 0 \end{cases}. \quad (14)$$

Assim, como $\tau > 0$, devido à causalidade (12) pode ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(kR_2 - \omega t)}}{\sqrt{j\omega}} d\omega = 2\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}. \quad (15)$$

Finalmente, substituindo (10)–(15) em (9) e observando o princípio da causalidade:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{H}_{in}(t) &= \frac{-\hat{\ell}}{4\pi\eta c} \int_{\ell'} \sqrt{\frac{2c}{R_2(1 + R_2/R_1)}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial \mathcal{M}(\ell', t')}{\partial t'} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau - t'}} \right) dt' d\ell'. \end{aligned} \quad (16)$$

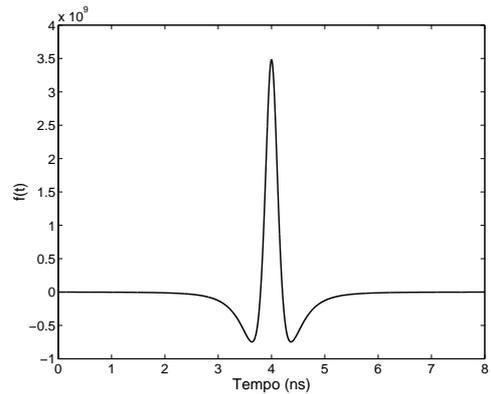
Para possibilitar o cálculo numérico das correntes magnéticas equivalentes $\mathcal{M}(\ell', t')$, o Método dos Momentos é aplicado, definindo as funções de base como um pulso unitário e as funções de peso como sendo um impulso (função Delta de Dirac) no centro do respectivo segmento e na direção $\hat{\ell}$. O tratamento da variação temporal, por sua vez, é feito com o auxílio do método *marching-on-in-time* (MOIT), assumindo uma variação linear da corrente sobre cada segmento.

IV. CAMPO ESPALHADO

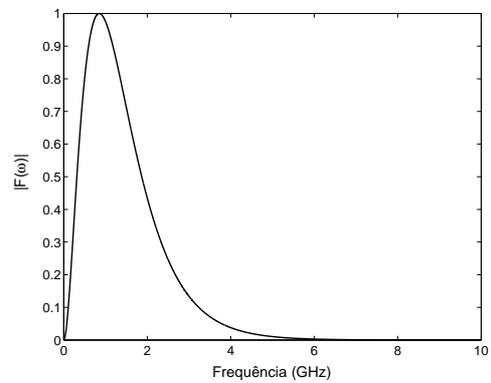
Obtidas as correntes magnéticas superficiais equivalentes, é possível então calcular o campo espalhado. De modo semelhante ao que foi feito para o cálculo das correntes, é aplicada um transformada inversa de Fourier sobre a EFIE no domínio da frequência:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_{in}(\vec{r}) - jk \int_{\ell'} (\hat{y} \times \hat{R}_2) M(\vec{r}') \\ &\times \left(1 + \frac{1}{jkR_2} \right) \frac{e^{-j(kR_2 + \pi/4)}}{4\pi\sqrt{(1 + R_2/R_1)/(R_2/\lambda)}} d\ell', \end{aligned} \quad (17)$$

onde \vec{E}_{in} representa o campo elétrico incidente irradiado pela fonte transmissora, R_1 é a distância entre o transmissor e o segmento fonte e R_2 é a distância entre este segmento e o



(a)



(b)

Fig. 2. Variação no (a) tempo e (b) espectro de frequência do pulso utilizado nas simulações

receptor. Assim, aplicando (10) e (11) em (17), a TD-EFIE é escrita como:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) &= \vec{\mathcal{E}}_{in}(\vec{r}, t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\ell'} (\hat{y} \times \hat{R}_2) \sqrt{\frac{2c}{R_2(1 + R_2/R_1)}} \\ &\times \int_{\ell'} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t'} + \frac{\mathcal{M}}{R_2} \right) \frac{1}{\sqrt{\tau - t'}} dt' d\ell'. \end{aligned} \quad (18)$$

V. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção serão apresentados os resultados de simulações realizadas para dois problemas simples: um perfil de uma cunha condutora magnética perfeita (PMC) e de duas cunhas PMC consecutivas. Os resultados obtidos são comparados com a MFIE no domínio da frequência, com seus resultados passados para o domínio do tempo com o auxílio de uma IFFT (MFIE+IFFT), e com a TD-UTD desenvolvida em [11].

A. Pulso de excitação

O pulso utilizado como excitação nas simulações é o mesmo adotado em [11]. Suas características são detalhadas na Fig. 2 e podem ser descritas, no domínio da frequência, como:

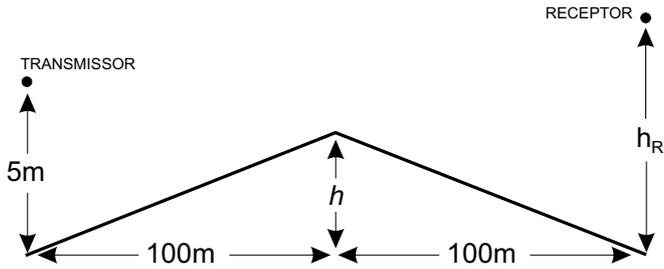


Fig. 3. Perfil da cunha PMC utilizada nas simulações.

$$F(\omega) = \frac{(P_1 + P_2)^{(P_1+P_2)}}{P_1^{P_1} P_2^{P_2}} (1 - e^{-\omega T})^{P_1} e^{-\omega P_2 T}, \quad (19)$$

aqui com $P_1 = 2$ e $P_2 = 1$. Já sua transformada inversa de Fourier é dada por [11]:

$$f(t) = \text{Re} \left[\frac{j}{\pi} \left(\frac{6,75}{t+jT} - \frac{13,5}{t+j2T} + \frac{6,75}{t+j3T} \right) \right], \quad (20)$$

com $T = \log 3 / (2\pi f_c)$ e $f_c = 850$ MHz.

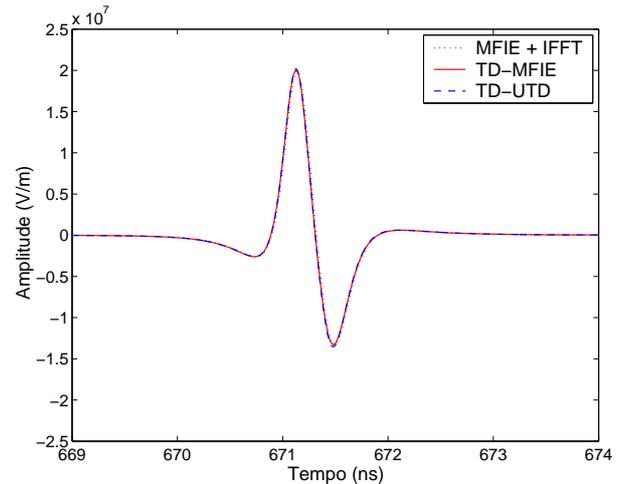
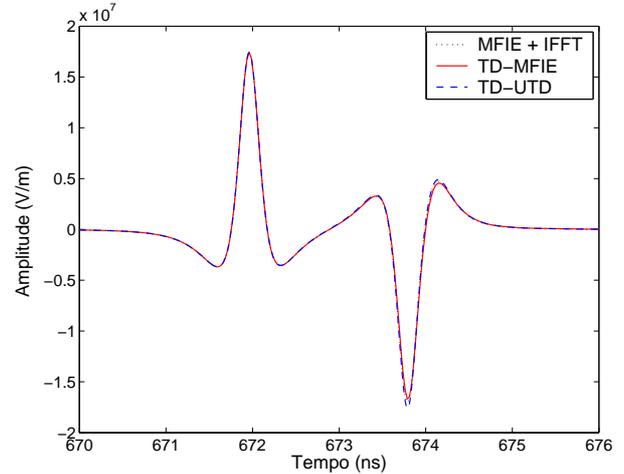
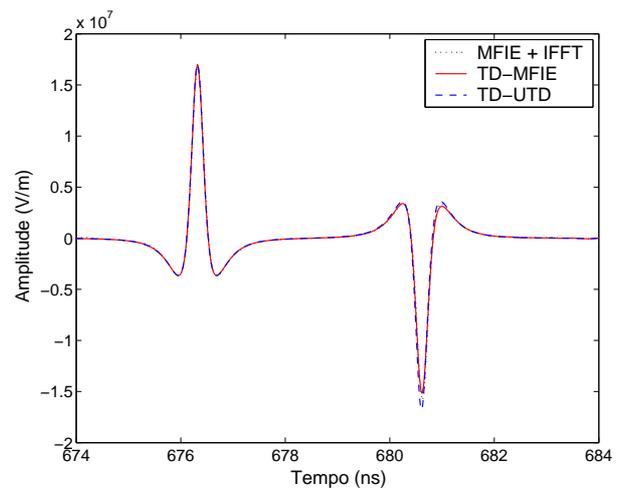
B. Cunha PMC simples

A cunha condutora magnética perfeita, cuja geometria é ilustrada na Fig. 3, possui 200 m de base e altura $h = 2$ m. O transmissor foi posicionado no início da cunha a uma altura de 5 m. O receptor, por sua vez, foi colocado no final da cunha e teve sua altura h_R especificada para 5, 15, 30 e 90 m.

Para os resultados obtidos através da MFIE+IFFT, um número considerável de frequências foi adotado, considerando a faixa de frequência significativa do pulso transmitido até 7 GHz (veja a Fig. 2). O número de funções de base foi variado para cada frequência de modo que cada segmento possuísse um comprimento de 2 comprimentos de onda. Para a TD-MFIE a segmentação utilizada foi de 0,5 segmento por comprimento de onda baseado na maior frequência significativa considerada, ou seja, 7 GHz. A discretização no tempo foi determinada por $\Delta t \approx 0,25$ ns.

Os resultados numéricos mostrados nas Figs. 4–7, para $h_R = 5, 15, 30$ e 90 m, respectivamente, apresentam uma concordância entre a MFIE+IFFT e a TD-MFIE. Com relação à TD-UTD, entretanto, existem algumas discrepâncias, as quais aumentam com a altura h_R do receptor. Para o caso de $h_R = 5$ m, a Fig. 4 mostra que as três técnicas apresentam basicamente a mesma resposta. Já para o caso de $h_R = 90$ m apresentado na Fig. 7, o pulso espalhado pela cunha apresenta diferença de amplitude e assimetria em relação ao obtido pela TD-UTD.

É possível observar nas Figs. 5–7 a existência de dois pulsos com basicamente o mesmo formato do pulso de excitação. O primeiro pulso se deve à contribuição do campo incidente diretamente da fonte sobre o receptor. Já o segundo pulso é produzido pela contribuição do campo espalhado (neste caso, especificamente, do campo refletido) pela cunha. Os instantes de tempo nos quais estes pulsos chegam no receptor podem ser comprovados através da divisão da distância percorrida por estas contribuições pela velocidade da luz no meio, assumido aqui como sendo o vácuo.

Fig. 4. Pulso no receptor localizado a uma altura $h_R = 5$ m sobre a cunha condutora magnética perfeita ilustrada na Fig. 3.Fig. 5. Pulso no receptor localizado a uma altura $h_R = 15$ m sobre a cunha condutora magnética perfeita ilustrada na Fig. 3.Fig. 6. Pulso no receptor localizado a uma altura $h_R = 30$ m sobre a cunha condutora magnética perfeita ilustrada na Fig. 3.

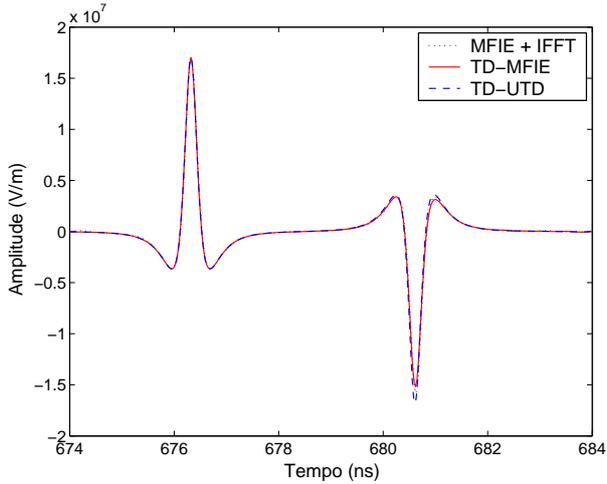


Fig. 7. Pulso no receptor localizado a uma altura $h_R = 90$ m sobre a cunha condutora magnética perfeita ilustrada na Fig. 3.

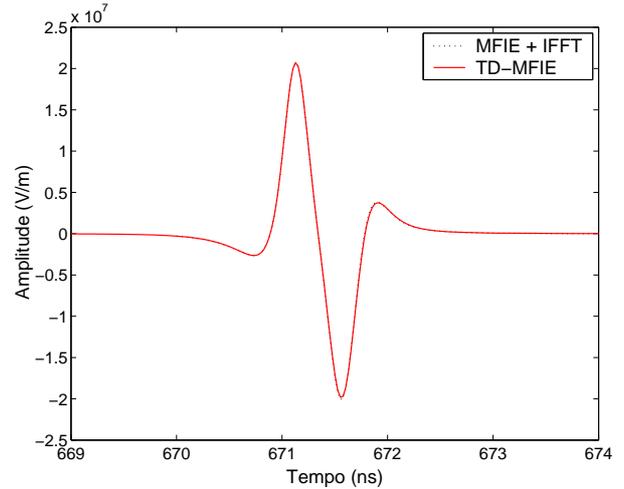


Fig. 9. Pulso no receptor localizado a uma altura $h_R = 5$ m sobre duas cunhas condutoras magnéticas perfeitas ilustradas na Fig. 8.

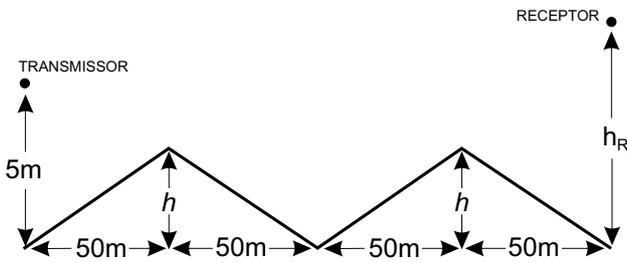


Fig. 8. Perfil das duas cunhas PMC consecutivas utilizada nas simulações

C. Duas cunhas PMC consecutivas

Para a verificação da eficácia e acurácia dos métodos foi considerada também a propagação sobre duas cunhas consecutivas. A principal diferença para o caso anterior é a existência da difração dupla devido à presença das duas arestas das cunhas. As cunhas tratadas nesta seção são apresentadas na Fig. 8 sendo $h = 2$ m e a altura do receptor h_R , assim como na cunha simples, especificada para 5, 15, 30 e 90 m. As mesmas segmentações foram utilizadas, bem como a consideração da faixa significativa do espectro do pulso transmitido.

Novamente, os métodos MFIE+IFFT e TD-MFIE apresentam resultados concordantes, os quais podem ser vistos nas Figs. 9–12, para $h_R = 5, 15, 30$ e 90 m, respectivamente. Neste caso a comparação com a TD-UTD não foi realizada devido ao fato da formulação da TD-UTD apresentada em [11] não considerar a difração em arestas com ângulos maiores que 180° , o que ocorre exatamente entre as duas cunhas (ou seja, na realidade temos três arestas no presente exemplo).

VI. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou o desenvolvimento de uma formulação no domínio do tempo baseada na equação integral do campo magnético (TD-MFIE) para a predição da propagação de pulsos eletromagnéticos sobre terrenos suavemente irregulares. A incidência do campo foi assumida rasante e e

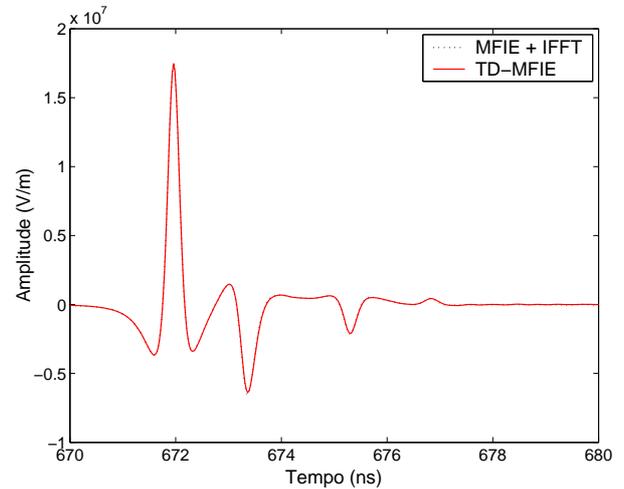


Fig. 10. Pulso no receptor localizado a uma altura $h_R = 15$ m sobre duas cunhas condutoras magnéticas perfeitas ilustradas na Fig. 8.

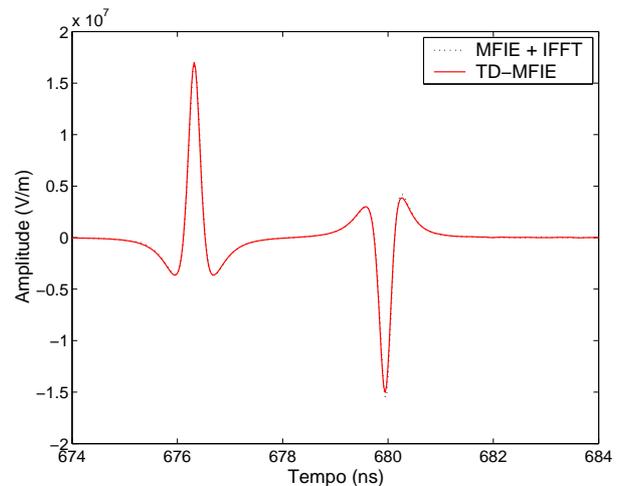


Fig. 11. Pulso no receptor localizado a uma altura $h_R = 30$ m sobre duas cunhas condutoras magnéticas perfeitas ilustradas na Fig. 8.

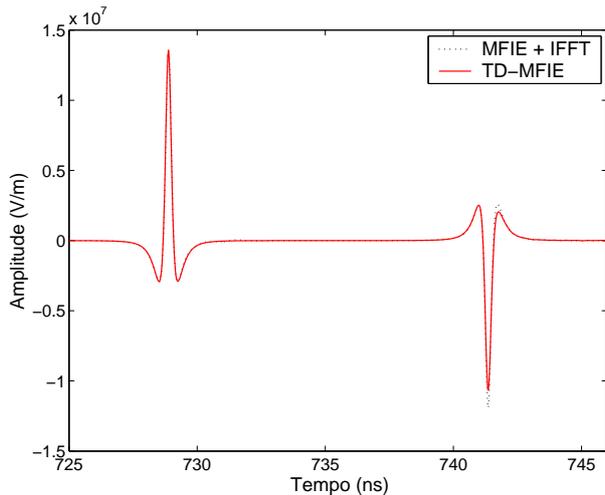


Fig. 12. Pulso no receptor localizado a uma altura $h_R = 90$ m sobre duas cunhas condutoras magnéticas perfeitas ilustradas na Fig. 8.

sua polarização vertical, de forma que o terreno foi assumido condutor magnético perfeito. Os resultados numéricos obtidos foram comparados com a formulação da MFIE no domínio da frequência (com a posterior transformação para o domínio do tempo através de uma IFFT) e com a teoria uniforme da difração no domínio do tempo (TD-UTD), mostrando boa concordância.

REFERÊNCIAS

- [1] J. T. Hviid, J. B. Andersen, J. Toftgård, e J. Bøjer, "Terrain-based propagation model for rural area - An integral equation approach," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 43, pp. 41–46, Jan. 1995.
- [2] C. Brennan e P. Cullen, "Application of the fast far field approximation to the computation of UHF pathloss over irregular terrain," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 46, no. 6, pp. 881–889, Jun. 1998.
- [3] C. Brennan, P. Cullen, e L. Rossi, "An MFIE-based tabulated interaction method for UHF terrain propagation problems," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 48, no. 6, pp. 1003–1005, Jun. 2000.
- [4] F. J. S. Moreira, "MFIE-based propagation prediction," *2001 SBMO / IEEE MTT-S Int. Microw. and Optoelect. Conference (IMOC'01)*, pp. 195–198, Aug. 2001.
- [5] F. J. S. Moreira, "MFIE-based prediction for UHF vertically-polarized wave propagation over irregular terrains," *2001 IEEE APS Int. Symp. Digest*, vol. 1, pp. 456–459, Jul. 2001.
- [6] F. J. S. Moreira, "Aplicação de equações integrais para a predição da propagação radioelétrica sobre solos suavemente irregulares e incidência rasante," *X Simp. Bras. Microondas e Optoeletrônica (SBMO 2002)*, pp. 191–195, Aug. 2002.
- [7] A. E. Freitas, "Predição de cobertura em enlaces radioelétricos sobre terrenos irregulares através de equações integrais," *PPGEE-UFMG*, Aug. 2001.
- [8] R. B. V. Teperino, "Aplicação do método FAFFA para a predição de propagação sobre terrenos suavemente irregulares," *V Cong. Bras. Eletromag. (CBMag2002)*, p. 25, Nov. 2002.
- [9] K. Siwiak, "Ultra-wide band radio: A new pan and positioning technology," *IEEE Vehic. Tech. Society News*, Feb. 2002.
- [10] G. Manara, A. Monorchio, e R. Reggiannini, "A space-time discretization criterion for a stable time-marching solution of the electric field integral equation," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 45, no. 3, pp. 527–532, Mar. 1997.
- [11] K. L. Borges, "Caracterização banda-larga do canal rádio utilizando a teoria uniforme da difração," *PPGEE-UFMG*, Mar. 2003.
- [12] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw Hill, New York, 1961.
- [13] A. J. Poggio e E. K. Miller, *Computer Techniques for Electromagnetics*, Pergamon, Oxford, UK, 1973.

- [14] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw Hill, New York, second edition, 1986.