

# Simulação Eficiente de Sistemas de Comunicações com Códigos Turbo

Bruno B. Albert e Francisco M. de Assis

**Resumo**—O objetivo deste trabalho é mostrar a viabilidade do uso do método de simulação por valorização das amostras (*Importance Sampling*) para estimação da probabilidade de erro de bit de sistemas de comunicações digitais que utilizem codificação/decodificação iterativa (turbo). A valorização das amostras é um método de redução da variância de uma estimativa quando esta é realizada pelo método tradicional de Monte Carlo (MC). Essa redução se traduz em um número menor de execuções da simulação de modo a obter a mesma precisão do método de MC. Os exemplos apresentados mostram uma redução significativa nos tempos de simulação.

**Palavras-Chave**—Monte Carlo, valorização das amostras, codificação/decodificação iterativa.

**Abstract**—The purpose of this article is to show the viability of the importance sampling simulation method use in estimating bit error probability of digital communication systems using iterative (turbo) coding/decoding. Importance sampling is a reduction variance method of a given traditional Monte Carlo simulation estimator. By reducing the variance, importance sampling method can achieve a given precision from shorter simulation runs. The examples show a significative time simulation saving.

**Keywords**—Monte Carlo, importance sampling, iterative coding/decoding.

## I. INTRODUÇÃO

A simulação, através do método de Monte Carlo (MC), é freqüentemente a única maneira de se avaliar o desempenho dos sistemas de comunicações mais complexos. Em geral o parâmetro utilizado para essa finalidade é a probabilidade de erro de bit,  $P_b$ . Apesar da sua simplicidade esse método esbarra em um problema de complexidade computacional quando essa probabilidade é relativamente baixa. Nesses casos o tempo de execução da simulação pode ser proibitivo para se obter uma determinada precisão. Por exemplo, para se obter uma precisão de 10% são necessários  $100/P_b$  amostras<sup>1</sup>, ou seja probabilidades da ordem  $10^{-6}$  necessitam de  $10^8$  amostras. Desse modo é altamente desejável métodos que simulem sistemas complexos mas que reduzam significativamente o esforço computacional.

O método de valorização das amostras (*Importance Sampling*), também chamado de Monte Carlo modificado [1], pode ser usado para essa finalidade. A idéia básica da valorização das amostras é gerar as entradas aleatórias utilizando uma distribuição diferente da verdadeira chamada de distribuição de simulação. Para que a freqüência relativa seja estimada de forma apropriada os dados observados são ponderados por uma

Bruno B. Albert e Francisco M. de Assis, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande PB, Brasil, E-mails: albert@dee.ufcg.edu.br, fmarcos@dee.ufcg.edu.br.

<sup>1</sup>Significa que o desvio padrão da estimativa é 10% do valor verdadeiro  $P_b$ .

razão de verossimilhança *a posteriori* chamada de peso. Uma escolha adequada da distribuição de simulação pode reduzir de maneira substancial o tempo de execução da simulação.

A valorização das amostras obteve bastante sucesso nos sistemas de comunicações sem codificação mas a eficiência do método caia bastante com a introdução de codificadores [2]. Com a introdução do conceito de simulação através do evento erro por Sadowsky [3], a aplicação desse método aos sistemas codificados se tornou possível. Em Albert e Assis [4] esse método foi aplicado aos códigos convolucionais com decodificação de Viterbi em canais binários assimétrico e com apagamento. Enquanto o termo evento erro é mais adequado para códigos convolucionais, o termo centro de erro introduzido por Ferrari e Bellini em [5], é mais apropriado para códigos de bloco e será adotado no presente trabalho. O conceito de centro de erro é bastante similar ao de evento erro, e foi usado por Ferrari e Belini em [6] aos códigos de produto com decodificação iterativa. A contribuição deste trabalho é a aplicação desse conceito na simulação dos sistemas de comunicações que utilizem codificadores convolucionais concatenados em paralelo no processo de codificação e decodificação iterativa (turbo).

Desde que surgiu em 93 [7], a decodificação iterativa de códigos concatenados tem sido o foco da atenção da comunidade que lida com a teoria dos códigos. Vários esquemas foram propostos levando-se em conta o modo como os codificadores são interligados, em paralelo ou em série, e o tipo dos codificadores, convolucionais ou de bloco bem como da técnica de decodificação utilizada. Nenhum método analítico para se avaliar o desempenho desses esquemas está disponível até o momento. Portanto a simulação por computador é a alternativa mais adequada nesses casos. Como a probabilidade de erro de bit costuma ser muito baixa para relações sinal/ruído modestas quando o processo de codificação/decodificação turbo é utilizado, o método de MC tem um custo computacional proibitivo, como já foi mencionado anteriormente. A valorização das amostras se apresenta como uma alternativa interessante para avaliação desses esquemas, e até onde os autores tem conhecimento isso ainda não foi realizado.

O trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção II são apresentados os fundamentos teóricos do método de valorização das amostras aplicado aos sistemas de comunicações codificados; na Seção III é o mostrado o sistema simulado bem como os resultados obtidos; finalmente na Seção IV estão as considerações finais a respeito do trabalho.

## II. FUNDAMENTOS DO MÉTODO DE VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS

### A. Probabilidade de Erro de Decodificação Específica

Considere um canal cuja seqüência de símbolos da entrada  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{X}^n$ , em que  $\mathcal{X}$  é o conjunto finito de símbolos da entrada do canal, produz uma seqüência de símbolos aleatórios  $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}) \in \mathcal{Y}^n$  na saída, sendo  $\mathcal{Y}$  o conjunto de símbolos, possivelmente infinito, da saída do canal<sup>2</sup>. Este canal é caracterizado pela função densidade de probabilidade conjunta condicionada no caso contínuo (ou função de massa de probabilidade conjunta condicionada para distribuições discretas) dada por  $f(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  quando  $\mathbf{x}$  foi transmitido. Se o canal for estacionário e sem memória então

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{k=0}^{n-1} p(y_k|x_k) \quad (1)$$

em que  $p(y_k|x_k)$  é a probabilidade de transição do canal para uma única entrada e uma única saída do canal. O foco do trabalho será nesse tipo de canal para mostrar a viabilidade do método, mas os resultados podem ser estendidos a outros tipos de canal.

Seja  $\mathcal{C}$  um código de bloco binário  $(n, m)$ . Uma palavra do código é representada por  $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$

Uma regra de decodificação é uma estratégia para estimar uma palavra código,  $\hat{\mathbf{c}}$ , para cada seqüência recebida possível,  $\mathbf{y}$ . Para cada palavra código,  $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ , é associada uma região de decisão,  $D(\mathbf{c}) \subset \mathcal{Y}^n$ . O conjunto de todas as regiões de decisão forma uma partição de  $\mathcal{Y}^n$ . A palavra código,  $\mathbf{c}$ , é decodificada sempre que  $\mathbf{y} \in D(\mathbf{c})$ . Se  $D(\mathbf{c})$  for a região de decisão que maximiza  $p(\mathbf{y}|\mathbf{c})$  o decodificador é chamado de verossimilhança máxima.

Um erro de decodificação ocorre quando o decodificador escolhe uma palavra código diferente da palavra código que foi transmitida, em outras palavras,  $\mathbf{y} \in D(\mathbf{c}')$  e  $\mathbf{c}' \in \mathcal{C}$  quando  $\mathbf{c}$  foi transmitido e  $\mathbf{c}' \neq \mathbf{c}$ . A probabilidade desse evento ocorrer é chamada de probabilidade de erro de decodificação específica e denotada por  $P(\mathbf{c}'|\mathbf{c})$  que é a probabilidade de  $\mathbf{c}'$  ser decodificado quando  $\mathbf{c}$  foi transmitido.  $\mathbf{c}'$  é denominado de centro de erro específico. A probabilidade de erro de decodificação específica pode ser escrita como

$$P(\mathbf{c}'|\mathbf{c}) = \int \dots \int_{D(\mathbf{c}')} f(\mathbf{y}|\mathbf{c}) d\mathbf{y} \quad (2)$$

em que  $f(\mathbf{y}|\mathbf{c})$  é a função densidade (massa) de probabilidade conjunta. Usando uma função indicadora,  $I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{y})$ , da região de erro  $D(\mathbf{c}')$  definida por

$$I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{y} \notin D(\mathbf{c}') \\ 1 & \text{se } \mathbf{y} \in D(\mathbf{c}') \end{cases} \quad (3)$$

a equação (2) pode ser reescrita como

$$P(\mathbf{c}'|\mathbf{c}) = \int \dots \int I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}|\mathbf{c}) d\mathbf{y} \quad (4)$$

<sup>2</sup>Valores determinísticos serão representados por letras minúsculas enquanto que as variáveis aleatórias por maiúsculas.

A probabilidade de erro de bit quando a palavra código,  $\mathbf{c}$ , foi transmitida,  $P_b(\mathbf{c})$ , pode ser definida como o valor esperado,  $E[\cdot]$ , do número de bits errados após a decodificação,  $N_b$ , dado que  $\mathbf{c}$  foi transmitido, dividido pelo número de bits de informação,  $m = \log_2 M$ , transmitidos por uma única palavra código, assim

$$P_b(\mathbf{c}) = \frac{1}{m} E[N_b|\mathbf{c}] \quad (5)$$

Se o número de bits de informação errados após a decodificação provocados pela decodificação de  $\mathbf{c}'$  em vez de  $\mathbf{c}$  for  $n_b(\mathbf{c}, \mathbf{c}')$  então

$$E[N_b|\mathbf{c}] = \sum_{\mathbf{c}' \in \mathcal{C}} n_b(\mathbf{c}, \mathbf{c}') P(\mathbf{c}'|\mathbf{c}) \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5) obtém-se

$$P_b(\mathbf{c}) = \frac{1}{m} \sum_{\mathbf{c}' \in \mathcal{C}} n_b(\mathbf{c}, \mathbf{c}') P(\mathbf{c}'|\mathbf{c}) \quad (7)$$

Considerando que um codificador turbo opera com blocos de símbolos de informação por vez, nesse sentido ele pode ser visto como um codificador de bloco, (ver [8] página 77). Portanto o que foi exposto pode ser aplicado ao código turbo analisado.

### B. Método de Valorização das Amostras

A idéia aqui é estimar a probabilidade de erro de bit,  $P_b(\mathbf{c})$ , pela estimativa da probabilidade de erro de decodificação específica,  $P(\mathbf{c}'|\mathbf{c})$ , e aplicar esses resultados em (7). Cada probabilidade de erro de decodificação específica é estimada independentemente usando o método de valorização das amostras. A simulação usa uma função densidade conjunta,  $f^*(\mathbf{y}|\mathbf{x} = \mathbf{c})$ , chamada de função densidade de simulação, diferente da função densidade conjunta original,  $f(\mathbf{y}|\mathbf{x} = \mathbf{c})$ <sup>3</sup>.

Considerando a equação (4), dividindo e multiplicando o integrando por  $f^*(\mathbf{y}|\mathbf{c})$  tem-se

$$\begin{aligned} P(\mathbf{c}'|\mathbf{c}) &= \int \dots \int I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{y}) \frac{f(\mathbf{y}|\mathbf{c})}{f^*(\mathbf{y}|\mathbf{c})} f^*(\mathbf{y}|\mathbf{c}) d\mathbf{y} \\ &= \int \dots \int I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{y}) w(\mathbf{y}|\mathbf{c}) f^*(\mathbf{y}|\mathbf{c}) d\mathbf{y} \\ &= \int \dots \int I_{\mathbf{c}'}^*(\mathbf{y}) f^*(\mathbf{y}|\mathbf{c}) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (8)$$

em que

$$w(\mathbf{y}|\mathbf{c}) = \frac{f(\mathbf{y}|\mathbf{c})}{f^*(\mathbf{y}|\mathbf{c})} \quad (9)$$

é uma razão de verossimilhança chamada de função de ponderação da valorização das amostras ou simplesmente de peso. E  $I_{\mathbf{c}'}^*(\mathbf{y}) = I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{y})w(\mathbf{y}|\mathbf{c})$ .

A equação (8) é o valor esperado de  $I_{\mathbf{c}'}^*(\mathbf{y})$  e pode ser estimada por

$$\begin{aligned} \hat{P}^*(\mathbf{c}'|\mathbf{c}) &= \frac{1}{N_{VA}} \sum_{i=1}^{N_{VA}} I_{\mathbf{c}'}^*(\mathbf{Y}^{(i)}) \\ &= \frac{1}{N_{VA}} \sum_{i=1}^{N_{VA}} w(\mathbf{Y}^{(i)}|\mathbf{c}) I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{Y}^{(i)}) \end{aligned} \quad (10)$$

<sup>3</sup>Por simplicidade será usada a notação  $f(\mathbf{y}|\mathbf{c}) = f(\mathbf{y}|\mathbf{x} = \mathbf{c})$

em que  $\hat{P}^*(\mathbf{c}'|\mathbf{c})$  é uma estimativa da probabilidade de erro de decodificação específica quando a palavra código,  $\mathbf{c}$ , foi transmitida,  $N_{VA}$  é o número de execuções da simulação usando valorização das amostras e  $\mathbf{Y}^{(i)} = (Y_0^{(i)}, Y_1^{(i)}, \dots, Y_{n-1}^{(i)})$  representa a seqüência de saída do canal na  $i$ -ésima execução da simulação.

O valor esperado da estimativa da probabilidade de erro de decodificação específica pode ser calculado como mostrado a seguir.

$$E^*[\hat{P}^*(\mathbf{c}'|\mathbf{c})] = E^*[\frac{1}{N_{VA}} \sum_{i=1}^{N_{VA}} w(\mathbf{Y}^{(i)}|\mathbf{c}) I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{Y}^{(i)})] \quad (11)$$

em que  $E^*[\cdot]$  representa o valor esperado em relação a função densidade de simulação,  $f^*(\mathbf{y}|\mathbf{c})$ . Como cada valor simulado  $w(\mathbf{Y}^{(i)}|\mathbf{c}) I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{Y}^{(i)})$  é independente de qualquer outro valor simulado anteriormente a equação (11) torna-se

$$\begin{aligned} E^*[\hat{P}^*(\mathbf{c}'|\mathbf{c})] &= E^*[w(\mathbf{Y}^{(i)}|\mathbf{c}) I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{Y}^{(i)})] \\ &= \int \dots \int w(\mathbf{y}|\mathbf{c}) I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{y}) f^*(\mathbf{y}|\mathbf{c}) d\mathbf{y} \\ &= \int \dots \int I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}|\mathbf{c}) d\mathbf{y} \\ &= P(\mathbf{c}'|\mathbf{c}) \end{aligned} \quad (12)$$

e portanto, a estimativa,  $\hat{P}^*(\mathbf{c}'|\mathbf{c})$  é despolarizada. A variância da estimativa pode ser calculada de maneira similar, usando o fato dos valores simulados serem independentes,

$$\begin{aligned} \text{var}^*[\hat{P}^*(\mathbf{c}'|\mathbf{c})] &= \text{var}^*[\frac{1}{N_{VA}} \sum_{i=1}^{N_{VA}} w(\mathbf{Y}^{(i)}|\mathbf{c}) I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{Y}^{(i)})] \\ &= \frac{1}{N_{VA}^2} \sum_{i=1}^{N_{VA}} \text{var}^*[w(\mathbf{Y}^{(i)}|\mathbf{c}) I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{Y}^{(i)})] \quad (13) \\ &= \frac{1}{N_{VA}} \text{var}^*[w(\mathbf{Y}^{(i)}|\mathbf{c}) I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{Y}^{(i)})] \end{aligned}$$

em que  $\text{var}^*[\cdot]$  representa a variância em relação a  $f^*(\mathbf{y}|\mathbf{c})$  e

$$\begin{aligned} \text{var}^*[w(\mathbf{Y}^{(i)}|\mathbf{c}) I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{Y}^{(i)})] &= \int \dots \int [w(\mathbf{y}|\mathbf{c}) I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{y})]^2 f^*(\mathbf{y}|\mathbf{c}) d\mathbf{y} - P^2(\mathbf{c}'|\mathbf{c}) \\ &= \int \dots \int w(\mathbf{y}|\mathbf{c})^2 I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{y}) f^*(\mathbf{y}|\mathbf{c}) d\mathbf{y} - P^2(\mathbf{c}'|\mathbf{c}) \quad (14) \\ &= \int \dots \int w(\mathbf{y}|\mathbf{c}) I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}|\mathbf{c}) d\mathbf{y} - P^2(\mathbf{c}'|\mathbf{c}). \end{aligned}$$

O objetivo da utilização do método da valorização das amostras é conseguir uma determinada precisão da estimativa com o menor número possível de execuções da simulação. Isto é alcançado quando a variância dada por (13) for a menor possível. Como já foi dito, é necessário escolher  $f^*(\mathbf{y}|\mathbf{c})$  de modo a minimizar (13), de fato se

$$f^*(\mathbf{y}|\mathbf{c}) = \frac{f(\mathbf{y}|\mathbf{c}) I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{y})}{P(\mathbf{c}'|\mathbf{c})} \quad (15)$$

e substituindo esse valor em (14) a variância em (13) será igual a zero. Esse valor ótimo no entanto não é possível de ser conseguido, pois supõe o conhecimento de  $P(\mathbf{c}'|\mathbf{c})$  que

é o parâmetro a ser estimado. No entanto (15) pode sugerir valores subótimos para  $f^*(\mathbf{y}|\mathbf{c})$ .

Uma estimativa da variância amostral,  $\hat{V}^*(\mathbf{c}'|\mathbf{c})$ , de  $\text{var}^*[w(\mathbf{Y}^{(i)}|\mathbf{c}) I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{Y}^{(i)})]$  em (14) é obtida pela equação abaixo

$$\hat{V}^*(\mathbf{c}'|\mathbf{c}) = \frac{1}{N_{VA}} \sum_{i=1}^{N_{VA}} w(\mathbf{Y}^{(i)}|\mathbf{c})^2 I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{Y}^{(i)}) - (\hat{P}^*(\mathbf{c}'|\mathbf{c}))^2 \quad (16)$$

de modo que uma estimativa,  $\hat{V}_P^*(\mathbf{c}'|\mathbf{c})$ , para  $\text{var}^*[\hat{P}^*(\mathbf{c}'|\mathbf{c})]$  em (13) será então

$$\begin{aligned} \hat{V}_P^*(\mathbf{c}'|\mathbf{c}) &= \frac{1}{N_{VA}} \hat{V}^*(\mathbf{c}'|\mathbf{c}) \\ &= \frac{1}{N_{VA}^2} \sum_{i=1}^{N_{VA}} w(\mathbf{Y}^{(i)}|\mathbf{c})^2 I_{\mathbf{c}'}(\mathbf{Y}^{(i)}) - \frac{1}{N_{VA}} (\hat{P}^*(\mathbf{c}'|\mathbf{c}))^2 \end{aligned} \quad (17)$$

observe que a estimativa decresce com o quadrado do número de execuções,  $N_{VA}$ , e com o quadrado do peso,  $w(\mathbf{Y}^{(i)}|\mathbf{c})$ , no primeiro termo de (17), portanto é imprescindível que este seja menor que um na região de erro,  $D(\mathbf{c}')$ , de modo a reduzir a variância e com isso aumentar a precisão da estimativa. Este valor é usado para estimar a precisão da valorização das amostras.

### III. SIMULAÇÃO DE UM SISTEMA DE COMUNICAÇÕES COM CODIFICAÇÃO TURBO

#### A. Codificador/Decodificador Turbo Simulado

O processo de codificação turbo é realizado por dois codificadores convolucionais concatenados em paralelo (CCCP), como mostrado na figura 1, os dois codificadores componentes são convolucionais sistemáticos recursivos (CSR) e idênticos, separados por um entrelaçador,  $\alpha$ .

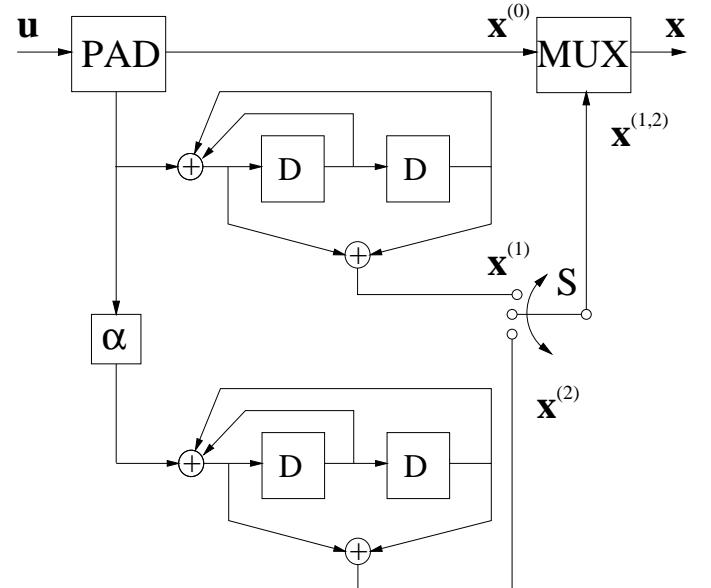


Fig. 1. Codificador turbo

Cada codificador componente tem uma matriz geradora de código  $g = [7; 5]$  e restrição de comprimento  $K = 3$ . Os bits

de saída em função dos bits da entrada no tempo  $t_k$ , podem ser descritos pelas equações seguintes.

$$\begin{aligned} x_k^{(0)} &= u_k \\ x_k^{(1)} &= a_k \oplus a_{k-2} \\ a_k &= u_k \oplus a_{k-1} \oplus a_{k-2} \end{aligned} \tag{18}$$

O bloco **PAD** é usado para adicionar bits a palavra de entrada  $u$ , de modo que o primeiro codificador componente termine num estado conhecido. Esse bloco não foi implementado. A entrada do primeiro codificador componente é alimentada com a sequência de entrada  $u$  obedecendo a sua ordem original. O segundo codificador componente tem como entrada a sequência  $u$  permutada pelo entrelaçador  $\alpha(u)$ .

O entrelaçador tem um papel importante na codificação turbo. Primeiramente ele gera um código de bloco longo a partir de codificadores convolucionais com restrições de comprimento pequenas. Uma outra característica importante é que ele descorrelaciona as entradas dos dois decodificadores, de tal forma que algoritmos de decodificação iterativos subótimos baseados na troca de informação entre os decodificadores componentes podem ser aplicados. Se estas seqüências de entrada são descorrelacionadas a uma grande chance que depois da correção de alguns erros por um dos decodificadores o outro decodificador corrija os erros que permanecerem [8]. Em geral, quanto maior o comprimento do entrelaçador maior é a capacidade de correção de erros do codificador turbo, em contrapartida maior é o seu retardo.

Dois tipos de entrelaçadores são usados na prática: o entrelaçador retangular e o entrelaçador uniforme. Um entrelaçador retangular  $a \times b$ , tendo  $a$  linhas e  $b$  colunas, os dados são escritos (entrada) linha por linha e lidos (saída) coluna por coluna. Um entrelaçador uniforme de comprimento  $L_\alpha$ , por sua vez, é um dispositivo probabilístico que mapeia uma dada palavra de entrada com peso  $w$  em uma das distintas  $\binom{L_\alpha}{w}$  permutações com probabilidade  $1/\binom{L_\alpha}{w}$  [9], [10]. Na simulação foi usado  $L_\alpha = 8$  para apresentar o método da valorização das amostras. Para valores não muito maiores que este, é impraticável a análise de todos os centros de erro, portanto é necessário um modo de se podar o espaço de centros de erro concentrando-se nos mais importantes, (os mais frequentes), para o cálculo da probabilidade de erro.

A saída dos dois codificadores CSR componentes juntos com a saída sistemática são então multiplexadas produzindo a sequência de bits do codificador. Observe que a chave **S** na figura representa o mecanismo de extração de bits para aumentar a taxa do codificador, o modelo simulado não apresenta esta característica. O CCCP simulado tem taxa 1/3.

O decodificador turbo simulado está mostrado em diagrama de blocos na figura 2. Cada decodificador componente ( $DEC_1$  e  $DEC_2$ ) utiliza o algoritmo de Viterbi com saída suave (SOVA - *soft output Viterbi algorithm*) [11]. Os blocos  $\alpha$  e  $\alpha^{-1}$  representam o entrelaçador (idêntico ao entrelaçador do CCCP) e o desentrelaçador respectivamente. A sequência de bits  $y$  entregue pelo demodulador é demultiplexada formando as sequências  $y^{(0)}y^{(1)}y^{(2)}$  que são respectivamente a saída sistemática e as saídas dos codificadores componentes do codificador turbo estimadas pelo demodulador.  $L_{12}^e$  e  $L_{21}^e$  representam os valores

suaves (extrínsecos) gerados pelos respectivos decodificadores componentes. O resultado do processo de decodificação é representado pela saída  $\hat{x}^{(0)}$  após um certo número de iterações (realimentações). O processo de codificação e o algoritmo de decodificação estão detalhados em [12].

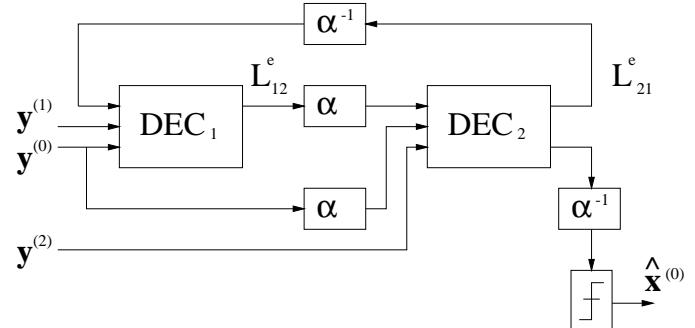


Fig. 2. Decodificador turbo

## B. Polarização do Canal

O canal simétrico binário (BSC)<sup>4</sup> é usado para ilustrar os princípios discutidos anteriormente. O BSC é um canal discreto sem memória e caracterizado pelas probabilidades de transição,  $p(y|x)$ , mostradas na Tabela I. A probabilidade do canal trocar o bit de informação transmitido,  $\lambda$ , é chamada de probabilidade cruzamento.

**TABELA I**  
**PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO PARA O BSC.**

$p(y x)$	$y = 0$	$y = 1$
$x = 0$	$1 - \lambda$	$\lambda$
$x = 1$	$\lambda$	$1 - \lambda$

O objetivo da polarização do canal é produzir com maior freqüência os centros de erro na saída do mesmo. Uma maneira de conseguir isto é alterar a probabilidade de cruzamento de forma que  $\lambda^* > \lambda$ , em que  $\lambda^*$  é a probabilidade de cruzamento de polarização. Na realidade não existe um  $\lambda^*$  único ótimo para todos os centros de erro e para conseguir bons resultados seria necessário calcular uma probabilidade de cruzamento de polarização ótima para cada centro de erro em particular. Essa abordagem apresenta restrições a medida que o tamanho das palavras código cresce, [3].

Observe que como modelo de canal  $f^*(y|c)$  não precisa ser estacionário nem sem memória. De fato, o modelo de canal polarizado adotado é variante no tempo e depende do centro de erro  $c'$  e é idêntico ao modelo não estacionário apresentado por Sadowsky em [3] e mostrado abaixo,

$$\lambda^* = \begin{cases} \lambda & \text{se } c_k = c'_k \\ 1/2 & \text{se } c_k \neq c'_k \end{cases} \quad (19)$$

em que  $c_k$  representa um bit de informação da palavra código transmitida no tempo  $t_k$  e  $c'_k$  representa um bit de informação

<sup>4</sup> A sigla se origina do inglês, *binary symmetric channel*, e é utilizada aqui por ser de uso comum.

do centro de erro no mesmo tempo se este tivesse sido transmitido. Veja que nesse modelo, o canal polarizado direciona a palavra código transmitida para o centro de erro específico.

### C. Resultados

Em todas as simulações foi usado o mesmo entrelaçador de 8 bits com a seguinte característica  $\alpha(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) = (6, 3, 7, 1, 2, 4, 5, 0)$  para efeito de comparação e validação do método usado, pois entrelaçadores diferentes influenciam no desempenho dos códigos turbo, principalmente quando são pequenos. O codificador tem taxa  $1/3$  e  $2^8 = 256$  palavras código. Sem perda de generalidade foi considerado que a palavra de informação **0** foi transmitida<sup>5</sup> e os 255 centros de erro foram avaliados de acordo com a equação (10) e levados à equação (7) para o cálculo da probabilidade de erro de bit.

A figura 3 mostra uma comparação entre o método de MC e o de valorização das amostras, com uma iteração e com dez iterações, cada ponto foi simulado de modo a ter uma precisão relativa de 10%. Observe que as curvas estão bastante próximas o que valida o método de valorização das amostras. Em termos de eficiência será considerada a razão entre os tempos de simulação de MC pelos tempos de simulação por valorização das amostras,  $\eta = T_{MC}/T_{VA}$ . Por exemplo para probabilidade de cruzamento  $\lambda = 0.05$ , para uma iteração, o método de MC é mais eficiente e  $\eta = 0.33$ , no entanto para  $\lambda = 0.01$ , também para uma iteração, o método de valorização das amostras apresenta uma eficiência de  $\eta = 46.1$ . Para probabilidade de cruzamento mais baixas os ganhos são ainda mais significativos.

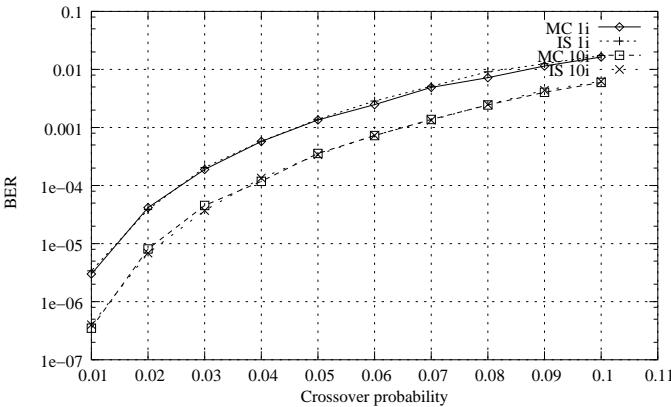


Fig. 3. Comparação entre MC e valorização das amostras para códigos turbo com uma e dez iterações

Para reforçar a potencialidade do método adotado, a figura 4 mostra a curva probabilidade de cruzamento versus probabilidade de erro de bit para  $0.0001 < \lambda < 0.0009$ . A decodificação é realizada com uma e com dez iterações. Observe que são obtidas probabilidades de erro da ordem de  $10^{-14}$ , que seria impraticável com o método de MC.

<sup>5</sup>Se o canal for sem memória, o codificador for linear e o decodificador for de verossimilhança máxima então a probabilidade de erro de bit independe da palavra código transmitida e portanto  $P_b = P_b(\mathbf{c})$  em (7)

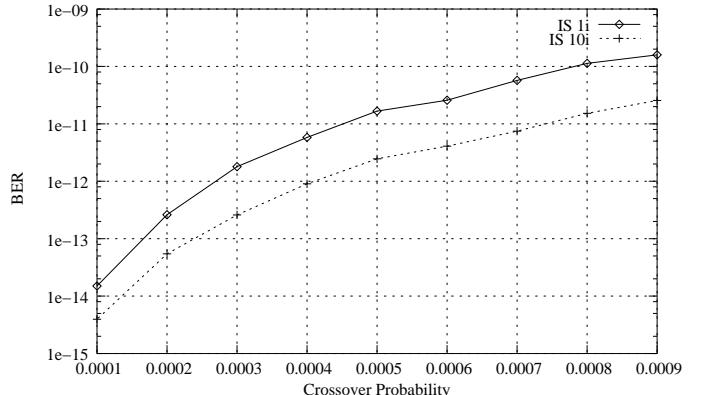


Fig. 4. Simulação para o BSC usando valorização das amostras com uma e com dez iterações.

### IV. CONCLUSÃO

O método de valorização das amostras se mostrou como uma alternativa viável na simulação de códigos turbo, principalmente quando as probabilidades de erro estimadas são da ordem de  $10^{-6}$  ou menores, nesses casos há uma redução expressiva no tempo de simulação entre os dois métodos. O decodificador foi simulado com uma e com dez iterações.

Embora o BSC tenha sido escolhido para exemplificar a aplicação do método, outros canais mais complexos podem ser utilizados em conjunto com esquemas de modulação, equalização, etc.

Para codificadores com um número grande de palavras código,  $\mathbf{c}' \in \mathcal{C}$ , a utilização da abordagem acima pode ser mais ineficiente que o uso do método de MC, ou até mesmo impraticável devido ao grande número de alternativas. No entanto, quando a relação sinal/ruído é bastante alta e as probabilidades de erro são pequenas, geralmente apenas poucos termos são dominantes na soma na equação 7. É necessário identificar esses termos e concentrar neles o esforço computacional. É possível se fazer isso analisando a estrutura do codificador e escolhendo aqueles que tenham uma distância de Hamming mais próximas da palavra código transmitida. Esse é o próximo passo do presente trabalho.

### REFERÊNCIAS

- [1] K. S. Shanmugam and P. Balaban, "A modified Monte Carlo simulation technique for the evaluation of error rate in digital communication systems," *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-28, no. 11, pp. 1916–1924, November 1980.
- [2] M. A. Herro and J. M. Nowack, "Simulated Viterbi decoding using importance sampling," *IEE Proceedings*, vol. 135, no. 2, pp. 133–142, April 1988.
- [3] John S. Sadowsky, "A new method for Viterbi decoder simulation using importance sampling," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 38, no. 9, pp. 1341–1351, September 1990.
- [4] Bruno Barbosa Albert and Francisco Marcos de Assis, "Performance of binary nonsymmetric and binary erasure memoryless channels with viterbi decoding using importance sampling," *IEEE International Symposium on Personal Indoor and Mobile Radio Communications*, p. CD, September 2002, Lisboa, Portugal.
- [5] Marco Ferrari and Sandro Belline, "Importance sampling simulation of concatenated block codes," *IEE Proceedings*, vol. 147, pp. 245–251, October 2000.
- [6] Marco Ferrari and Sandro Belline, "Importance sampling simulation of turbo product codes," *ICC2001, The IEEE International Conference on Communications*, vol. 9, pp. 2773 – 2777, June 2001.

- [7] A. Glavieux C. Berrou and P. Thitimajshima, "Near shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Communications*, Geneva, Switzerland, May 1993, pp. 1064–1070.
- [8] Branca Vucetic and Jinhong Yuan, *Turbo Codes Principles and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [9] Sergio Benedetto and Guido Montorsi, "Unveiling turbo codes: Some results on parallel concatenated coding schemes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 42, no. 2, pp. 409–428, March 1996.
- [10] Marco Breiling and Lajos Hanzo, "The super-trellis structure of turbo codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 46, no. 6, pp. 2212 – 2228, September 2000.
- [11] Elke Offer Joachim Hagenauer and Lutz Papke, "Iterative decoding of binary block and convolutional codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 42, no. 2, pp. 429–445, March 1996.
- [12] Bruno Barbosa Albert, "Introdução à codificação e decodificação iterativa," Relatório do projeto de pesquisa, Universidade Federal da Paraíba - CCT - DEE - COPELE, 2000.