

# Código de Permutação Vetorial Aplicado à Fonte Uniforme

Weiler A. Finamore, Sergio Vitor B. Bruno, e Leonardo S. Brega

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Centro de Estudos em Telecomunicações (CETUC)  
Rua Marquês de São Vicente, 225  
22453-900, Rio de Janeiro, RJ  
weiler@cetuc.puc-rio.br

**Resumo**—O desempenho de códigos de permutação de vetores aplicados a uma fonte de informação uniforme é apresentado. Recentemente códigos de permutação (abreviadamente *PC*) das componentes escalares, de um vetor de dimensão  $n$ , com desempenho superior ao desempenho de quantizadores escalares com restrição de entropia (*ECSQ*) foram apresentados. Neste trabalho, códigos de permutação aplicados a vetores  $nL$ -dimensionais, cujas componentes são  $n$  vetores  $L$ -dimensionais (abreviadamente *VPC*), com desempenho superior aos primeiros são apresentados.

Uma vantagem primordial dos códigos de permutação é o fato dos mesmos serem um esquema de taxa-fixa. Nossos resultados estendem a faixa de taxas em que o desempenho dos códigos de permutação superam o desempenho de *ECSQ*. Taxas de valores praticamente arbitrários podem ser obtidas.

Enquanto a superioridade dos *PC*'s é obtida para blocos de tamanho  $n$  pequeno, mostramos que a superioridade dos *VPC*'s é mantida quando a dimensão é aumentada.

**Palavras-Chave**—Codificação de fonte, Códigos de permutação, Quantizadores com restrição de entropia

**Abstract**—The performance of vector permutation codes used with an uniform source is discussed. Scalar permutation codes (PC) applied to  $n$ -dimensional vectors which perform better than entropy constrained scalar quantizer have been recently presented. We present vector permutation codes, applied to vectors of dimension  $nL$  but which code the permutations of its  $n$  sub-vectors of  $L$ -dimension, that perform better than the scalar permutation scheme. The main advantage of permutation codes is its fixed rate nature. Our results extend the range of rates in which the permutation codes displays a better performance than *ECSQ* allowing practically arbitrary rates. While the superiority of scalar PC is obtained for small block size, we show that the superiority of VPC is sustained when the dimension is increased.

## I. INTRODUÇÃO

Códigos de permutação de símbolos, conforme apontado em recente artigo [1], são quantizadores vetoriais  $n$ -dimensionais em que as palavras-código são formadas pela permutação dos componentes de uma palavra-código de referência. Tais códigos de permutação serão denominados por *códigos de permutação de escalares*. A codificação de um vetor  $n$ -dimensional pode ser realizada utilizando um

algoritmo muito simples [2] com  $O(n \log n)$  operações e  $O(n)$  espaço em memória. Em [1] Goyal e seus co-autores utilizaram códigos de permutação para quantizar a saída de uma fonte de informação uniforme, sem memória, obtendo desempenhos superiores ao desempenho obtido com *ECSQ* (*Entropy-constrained scalar quantizer*), contradizendo uma afirmativa apresentada em [3]. O resultado apresentado, para esta fonte, contradiz ainda uma afirmativa em [4], exibindo códigos de permutação de dimensão finita ( $n$  finito) com desempenho superior ao de códigos assintoticamente longos.

No presente trabalho, os *códigos de permutação de vetores* introduzidos em [5] foram usados para quantizar os símbolos emitidos por uma fonte de informação uniforme, sem memória, apresentando resultados que superam os resultados apresentados em [1]. Códigos de permutação de vetores são quantizadores vetoriais,  $nL$ -dimensionais, em que as palavras-código são formadas pela permutação dos vetores  $L$ -dimensionais que compõem uma palavra-código de referência (um vetor  $nL$  - *dimensional*). Para codificar um vetor  $nL$ -dimensional um algoritmo não tão simples mas com complexidade polinomial,  $O(\sqrt{nm} \log(nC))$  [6], foi utilizado. Em [5] conjectura-se que, contrariamente às observações apresentadas em [1] os códigos de permutação vetoriais assintóticos possuem desempenhos superiores aos códigos de comprimento finito e ainda que, para fontes sem memória com funções densidade de probabilidade de suporte infinito, o desempenho destes códigos não podem superar o desempenho de *ECVQ* (*Entropy-constrained Vector Quantizer*).

Os resultados apresentados foram obtidos usando um procedimento numérico similar ao algoritmo LBG [7] desenvolvido em [5]. É importante ressaltar que os códigos de permutação escalares são um caso particular dos códigos de permutação vetorial ( $L = 1$ ) e que a vantagem primordial (compressor de taxa-fixa) dos primeiros, escalares, é mantida pelos segundos, vetoriais.

O presente artigo está organizado da seguinte forma: na Seção II a estrutura dos codificadores de permutação vetorial é apresentada, na Seção III são apresentados resultados de

desempenho para uma fonte de informação uniforme, i.e., que emite uma seqüência de variáveis aleatórias independentes, uniformemente distribuídas no intervalo  $[0, 1]$ , obtidos usando métodos numéricos, para estes codificadores e, na Seção final, estes resultados são analisados.

## II. CODIFICADORES DE PERMUTAÇÃO DE VETORES

O diagrama em blocos da Fig.1 ilustra o modelo mais básico de um sistema de comunicações que utiliza compressão.

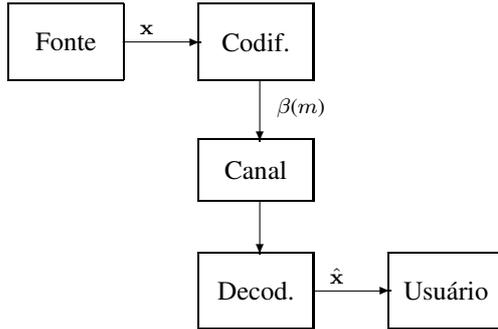


Fig. 1. Sistema de Comunicações com Compressão

Considera-se que os símbolos (ou letras) emitidos pela fonte são vetores  $L$ -dimensionais e que a fonte emite uma seqüência infinita de blocos com  $n$  símbolos, sendo o  $i$ -ésimo símbolo (vetor  $L$ -dimensional) do  $\ell$ -ésimo bloco representado genericamente por  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^L$ . Dizemos neste caso que o alfabeto da fonte é  $\mathcal{A} = \mathbb{R}^L$ . O codificador de permutação vetorial é na verdade um quantizador vetorial que realiza o mapa de um vetor<sup>1</sup>

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^{nL},$$

formado pelos  $n$  vetores  $L$ -dimensionais emitidos pela fonte, em um outro vetor  $\hat{\mathbf{x}}$ , pertencente ao conjunto, de cardinalidade  $M$ ,

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{M-1}\} \subset \mathbb{R}^{nL}.$$

Ao conjunto  $\mathcal{C}$  designaremos por dicionário. Como  $\hat{\mathbf{x}}$  é, em geral, diferente de  $\mathbf{x}$ , o usuário recebe a informação com uma distorção, por componente emitido,  $d(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$  — iremos usar como medida de distorção o quadrado do erro entre o bloco enviado e o bloco recebido, assim

$$d(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \frac{1}{nL} \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|^2 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{nL} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^L (x_{ij} - \hat{x}_{ij})^2. \quad (2)$$

O codificador ótimo faz

$$\hat{\mathbf{x}} = \alpha(\mathbf{x}) \quad (3)$$

$$= \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_\ell\| \quad (4)$$

<sup>1</sup>Quando o contexto exigir iremos caracterizar o  $\ell$ -ésimo bloco emitido pela fonte por  $\mathbf{x}^\ell$  e o  $i$ -ésimo componente deste bloco por  $\mathbf{x}_i^\ell$ , caso contrário omitiremos o índice  $\ell$  que enumera o bloco.

e, sendo  $\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_m$  o vetor selecionado, o bloco binário transmitido, correspondente ao índice  $m$ , é  $\beta(m)$ .

O vetor erro é uma variável aleatória  $\mathbf{X} - \alpha(\mathbf{X})$  e o valor esperado da distorção, por componente emitido pela fonte, é portanto

$$D = \frac{1}{nL} \mathbb{E}[\|\mathbf{X} - \alpha(\mathbf{X})\|^2].$$

A característica principal do dicionário  $\mathcal{C}$  associado ao codificador de permutação de vetores  $L$ -dimensional é a mesma do codificador de permutação de escalares, isto é, cada palavra-código  $\mathbf{y}_i$  corresponde a uma permutação dos símbolos (vetores  $L$ -dimensionais) da palavra-de-referência  $\mathbf{y}_0$ . A palavra-de-referência pode ser vista como a matriz  $L \times n$

$$\mathbf{y}_0 = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_K, \dots, \mathbf{u}_K) \quad (5)$$

onde cada vetor  $L$ -dimensional  $\mathbf{u}_i$  aparece  $n_i$  vezes.

O dicionário é composto por todas matrizes distintas formadas pela permutação das colunas da matriz de referência  $\mathbf{y}_0$ . O número de permutações distintas é

$$M = \frac{n!}{\prod_{i=1}^K n_i!},$$

e a taxa de transmissão de informação do codificador é definida portanto por

$$R = \frac{1}{nL} \log_2 M \text{ (bits/componente)}. \quad (6)$$

Isto é,  $\frac{1}{nL} \lceil \log_2 M \rceil$  bits são transmitidos, por componente do vetor  $L$ -dimensional gerado pela fonte (a taxa pode ser  $\frac{1}{nL} \log_2 M$  se algum tipo de codificação por entropia é usado).

O código é ótimo se para qualquer outro dicionário  $\mathcal{C}'$  a distorção  $D'$  observada é maior do que a distorção  $D$  correspondente ao dicionário  $\mathcal{C}$ . O projeto de um codificador de permutação de vetores  $L$ -dimensional ótimo, com parâmetros  $n$ ,  $L$ ,  $M$  e  $K$  reside inteiramente na escolha da palavra-de-referência  $\mathbf{y}_0$ .

A formulação dos codificadores de permutação em um cenário  $L$ -dimensional, uma extensão simples da idéia de codificadores de permutação de escalares, é apresentada pela primeira vez em [5]. A técnica simples para obter o dicionário para o caso escalar, apresentada em [2], não pode ser usada neste caso. Um método numérico, similar ao algoritmo LBG [7], foi no entanto desenvolvido, permitindo o projeto do codificador de permutação de vetores. O método é aplicável a fontes (com estatística conhecida ou não) caracterizadas por uma coleção de amostras (i.e., um conjunto de treinamento). Com este algoritmo [5] os resultados discutidos neste trabalho foram obtidos.

## III. RESULTADOS

Os resultados obtidos para uma fonte que emite uma seqüência infinita de variáveis aleatórias uniformemente distribuídas no intervalo  $[0, 1]$  é apresentado na Fig.2. Nesta figura são mostradas várias curvas de taxa ( $R$ ) versus distorção

( $D$ ). A curva superior mostra o melhor desempenho possível, em termos de taxa versus distorção, de um quantizador escalar com restrição de entropia. A otimalidade deste desempenho foi recentemente demonstrada em [8]. O desempenho obtido pelo uso de “*time-sharing*” é dado pela casca convexa desta curva — ou seja, a linha poligonal convexa unindo os pontos da curva  $ECSQ^2$  correspondentes às taxas  $R = \log_2 r$ ,  $r = 1, 2, 3, \dots$

A curva sólida inferior corresponde à curva  $R(D)$ , obtida com o algoritmo de Blahut [9] (considerando uma fonte discretizada), é o limitante inferior de Shannon, que exhibe a menor distorção  $D$  teoricamente atingível por qualquer esquema de compressão que opere com uma taxa de compressão  $R(D)$ .

Os resultados obtidos analiticamente em [1] para códigos de permutação de escalares foram por nós replicados usando o método numérico. As amostras da fonte uniforme foram geradas em computador com um gerador de números aleatórios convencional. A curva sólida, com valores de distorção mais elevados, na região  $R \in [0.5, 1.0]$ , ilustram os valores obtidos para códigos com parâmetros  $K = 2$ ,  $L = 1$ , e  $n$  variando de 3 a 200 (os valores de  $n_i$  usados foram, conforme apontado em [1],  $\lceil n/K \rceil, \lceil n/K \rceil, \dots, \lceil n/K \rceil, \lfloor n/K \rfloor, \dots, \lfloor n/K \rfloor, \lfloor n/K \rfloor$ ).

Esta e curvas similares são o argumento utilizado em [1] para demonstrar a existência de códigos de permutação de escalares com desempenho superior ao desempenho de  $ECSQ$ . De fato, esta curva se situa abaixo da casca convexa da curva  $ECSQ$ .

As curvas correspondentes aos códigos de permutação de vetores obtidas no trabalho presente, para a fonte uniforme, apresentam desempenhos superiores ao desempenho para  $L = 1$  exibido em [1]. De fato, conforme pode ser observado pelo gráfico da Fig.2, as curvas de desempenho apresentadas se situam abaixo da curva correspondente ao caso  $L = 1$ . A curva caracterizada por uma seqüência de traços e pontos exhibe os pares  $(R, D)$  obtidos para os codificadores de permutação de vetores bi-dimensionais ( $L = 2$ ) com  $K = 4$ . A curva pontilhada (mais próxima da curva  $R(D)$ ) foi obtida para códigos também com  $L = 2$  e parâmetro  $K = 2$ . Outras curvas, correspondentes a codificadores com parâmetros  $K = 2$ ,  $L = 3$   $K = 3$ ,  $L = 3$  estão também plotadas neste gráfico.

#### IV. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou resultados de desempenho de códigos de permutação de vetores aplicados a uma fonte de informação uniforme. Em [1], Goyal mostrou que existem códigos de permutação das componentes escalares de um vetor de dimensão  $n$  com desempenho superior ao desempenho de  $ECSQ$ . No presente trabalho exibimos códigos de

permutação de vetores de dimensão  $L$ , componentes de um vetor de dimensão  $nL$ , com desempenho superior aos primeiros.

Uma vantagem primordial dos códigos de permutação é o fato do mesmo ser um esquema de taxa-fixa. Nossos resultados estendem a faixa de taxas em que o desempenho dos códigos de permutação superam o desempenho do  $ECSQ$ . Enquanto a faixa de taxas onde os códigos de permutação de escalares apresentam desempenho superior ao de  $ECSQ$  não são arbitrárias — se localizam na vizinhança das taxas  $R = \log_2 r$ ,  $r$  inteiro — códigos de permutação de vetores com desempenho superior e taxa  $R$  com valores praticamente arbitrários podem ser obtidos.

Enquanto a superioridade dos resultados em [1] é obtida para blocos de tamanho  $n$  pequeno, mostramos que a superioridade dos códigos de permutação de vetores pode ser observada quando tanto a dimensão  $L$  dos vetores componentes quanto a dimensão  $nL$  do bloco é aumentada (exceto nas taxas  $R = \log_2 r$ ,  $r$  inteiro, onde os desempenho dos quantizadores  $ECSQ$  para fonte uniforme não podem ser superados por codificadores de permutação).

#### REFERÊNCIAS

- [1] V. K. Goyal, S. A. Savari, and W. Wang, “On Optimal Permutation Codes,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol-47, pp.2961-2971, Nov. 2001.
- [2] T. Berger, F. Jelinek, and, J. K. Wolf, “Permutation Codes for Sources,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol-18, pp.160-169, Jan. 1972.
- [3] T. Berger, “Optimum Quantizers and Permutation Codes,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol-18, pp.759-765, Nov. 1972.
- [4] T. Berger, “Minimum Entropy Quantizers and Permutation Codes,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol-28, pp.149-157, Mar. 1982.
- [5] W. Finamore, and S. V. B. Bruno, “Vector Permutation Codes,” a ser submetido para a *Data Compression Conference*, Snowbird, UT, Apr. 2004.
- [6] A. V. Goldberg, and R. Kennedy, “An Efficient Cost Scaling Algorithm for the Assignment Problem,” Tech Report CS Department, Stanford university, Stanford, CA, May 1995.
- [7] Y. Linde, A. Buzo, and R. M. Gray, “An Algorithm for Vector Quantizer Design,” *IEEE Trans. Comm.*, vol-26, pp.702-710, Jan. 1980.
- [8] A. György, and T. Linder, “Optimal Entropy-Constrained Scalar Quantization of a Uniform Source,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol-46, pp.2704-2711, Nov. 2000.
- [9] R. E. Blahut, *Principles and Practice of Information Theory*, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, MA - USA, 1988.

<sup>2</sup>É nossa conjectura de que esta casca corresponde ao desempenho ótimo para quantizadores com restrição de entropia de qualquer dimensão, i.e.,  $ECVQ$ , para fonte uniforme.

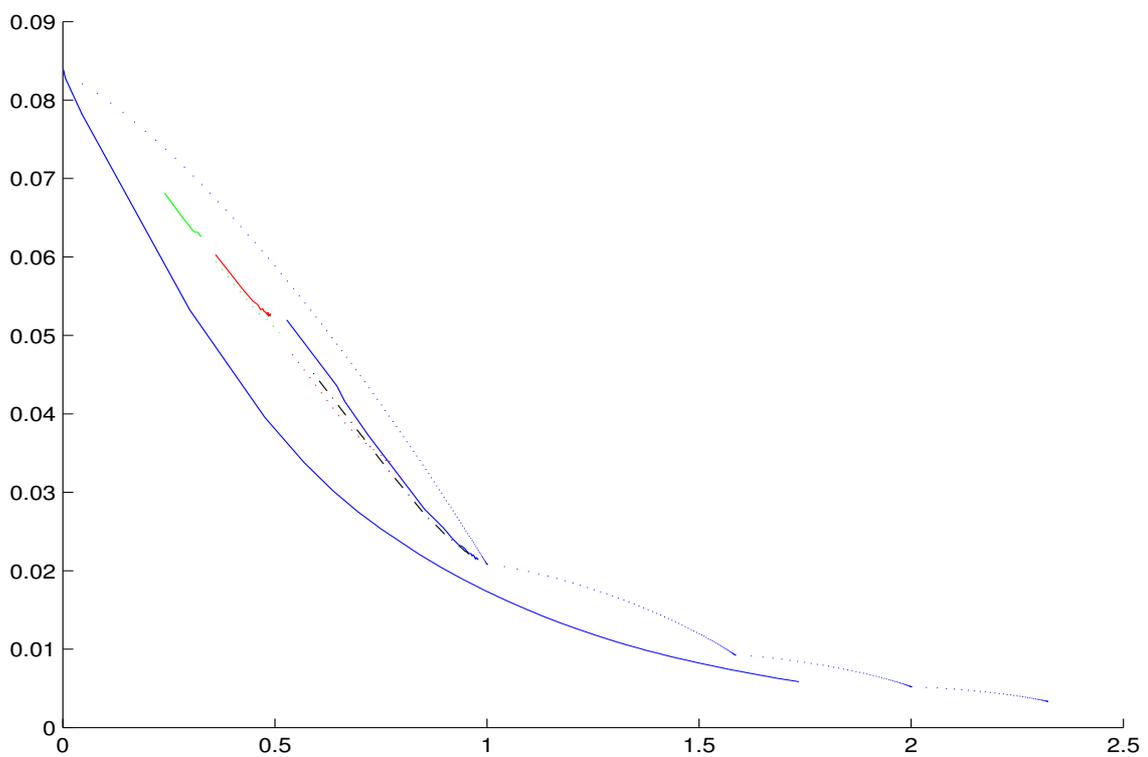


Fig. 2. Comparação da curva de Taxa  $\times$  Distorção para fonte uniforme: (a) Curva superior - desempenho de ECSQ ótimo, (b) Curva sólida inferior - função  $R(D)$ , (c) Curva sólida superior - desempenho de Código de permutação de escalares, (d) Demais curvas - desempenho de Código de permutação de vetores.