

Filtragem Discriminativa para Detecção de Múltiplos Padrões de Imagem

Alexandre P. Mendonça e Eduardo A. B. da Silva

Resumo—A filtragem discriminativa é uma ferramenta relativamente nova para a detecção e o reconhecimento de padrões. Sua idéia central é obter um operador que, quando convolvido com um gabarito específico, gere um sinal de saída com energia concentrada em uma de suas amostras. As aplicações da filtragem discriminativa estendem-se para o caso multi-padrão através de dois novos filtros propostos: o filtro discriminativo do tipo OU, que é aquele capaz de responder a qualquer padrão pertencente a um conjunto escolhido, e o filtro discriminativo do tipo QUAL, que é aquele capaz de decidir por qual dos padrões do conjunto. Os resultados das simulações sugerem que o método proposto é uma ferramenta promissora para problemas de decisão e pode atingir desempenhos comparáveis aos de sofisticados métodos não-lineares.

Palavras-Chave—Filtragem discriminativa, detecção de padrões, casamento de padrões, *discriminative filtering*, *template matching*.

Abstract—Discriminative filtering is a novel tool for pattern detection and recognition. Its central idea is to obtain an operator that, when convolved with a specific template, generates as output a signal with the energy concentrated in only one of its samples. Discriminative filtering applications are extended for the multi-template case through two new proposed types of filters: the discriminative filter of the type OR, that is, the one that responds to any template belonging to a chosen set, and the discriminative filter of the type WHICH, that is, the one that can decide for which of the templates of the set. Simulation results suggest that the proposed method is an effective tool for decision problems and can achieve performances only attainable with sophisticated non-linear methods

I. INTRODUÇÃO

O problema de casamento de padrões tem sido estudado através de diferentes abordagens como, por exemplo, em [1] e [2]. Nesses trabalhos, foram desenvolvidos detectores de bordas baseados em estatísticas locais da imagem. Ben-Arie et ali vêm trabalhando num tipo diferente de detector de gabaritos, chamado por eles de EXM (*EXpansion Matching*) [3-5]. Esses detectores são baseados na decomposição ótima de um sinal numa base construída especificamente para um dado padrão. O padrão é detectado caso a energia numa amostra de saída escolhida seja superior a um limiar. Este

método de detecção equivale a uma filtragem linear circular do sinal de entrada com o filtro calculado. Este filtro gera um sinal de saída com a energia concentrada numa das amostras quando o sinal de entrada estiver casado com o gabarito para o qual o detector foi calculado. Os detalhes estão em [3-5]. Esta formulação foi realizada para o caso em uma dimensão. Para o problema multidimensional, torna-se então necessário algum pré-processamento para a redução de posto no sinal a ser filtrado [4].

Em nossos trabalhos anteriores [6-8], foi proposta uma generalização para o caso bidimensional dos métodos em [3-5], baseada numa abordagem usando restauração do impulso [9-10]. O artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2, definimos a relação sinal-ruído discriminativa em duas dimensões; nas Seções 3-4, situamos o problema da filtragem discriminativa como um problema de restauração do impulso e descrevemos uma solução analítica para ele. Em seguida, com base nesta solução, propomos um novo método para a discriminação múltipla de padrões, apresentando o filtro do tipo "OU" (Seção 5), o filtro do tipo "QUAL" (Seção 6) e o filtro misto (Seção 7), que conjuga o "OU" e o "QUAL". A Seção 8 apresenta os resultados das simulações e a Seção 9 as conclusões.

II. FILTROS DISCRIMINATIVOS EM DUAS DIMENSÕES

Os filtros discriminativos maximizam a energia de uma das amostras da saída quando a entrada do filtro for morfologicamente parecida com um dado padrão. A *relação sinal-ruído discriminativa em duas dimensões* ($DSNR_2$), definida em [6], é uma medida que leva em conta não apenas a energia da amostra de saída escolhida, mas sim sua energia em relação às outras amostras. Então, para um filtro discriminativo bidimensional, é necessário maximizar:

$$DSNR_2 = \frac{c_{i,j}^2}{\left(\sum_m \sum_n c_{m,n}^2\right) - c_{i,j}^2} \quad (1)$$

Os coeficientes $c_{m,n}$ são obtidos após uma convolução bidimensional entre a janela do sinal de entrada $\mathbf{U} = \{u_{m,n}\}$ e o filtro linear Θ com resposta ao impulso $\{\theta_{m,n}\}$. Θ é calculado para cada padrão cuja discriminação seja desejada. O coeficiente $c_{i,j}$ é aquele onde se deseja concentrar a energia do sinal de saída.

III. RESTAURAÇÃO DO IMPULSO x FILTRAGEM DISCRIMINATIVA

A detecção de padrões usando filtragem discriminativa consiste em realizar uma convolução entre a imagem e um operador calculado para um padrão específico. A saída esperada para o filtro possui uma alta energia em uma das amostras e baixa energia nas demais.

É possível dar uma interpretação alternativa para a filtragem discriminativa como se segue: a imagem de entrada $g(m,n)$ pode ser expressa como

$$g(m,n) = f(m-m_0, n-n_0) + b(m,n), \quad (2)$$

onde $f(m-m_0, n-n_0)$ é o padrão centrado na posição (m_0, n_0) e $b(m,n)$ é o resto da imagem. A Equação (2) pode ainda ser interpretada como um impulso na posição (m_0, n_0) sendo distorcido pelo operador linear $f(m,n)$ e corrompido com o ruído aditivo $b(m,n)$. O filtro discriminativo ideal obterá em sua saída uma energia alta em (m_0, n_0) e zero nas outras posições. Isto nada mais é do que um impulso; portanto, o filtro discriminativo ideal é aquele que restaura um impulso distorcido por um padrão e corrompido pelo resto da imagem. Em nossos trabalhos recentes [7-8], a filtragem discriminativa foi formulada como um problema de restauração do impulso e, usando esta formulação, foram achadas soluções analíticas para ele. É importante notar que, em outra abordagem anterior [6], as soluções puderam ser obtidas apenas através de otimizações numéricas.

Com o objetivo de formular o problema de restauração do impulso numa notação matricial [9-10], uma imagem $g(m,n)$ é transformada num vetor coluna $\mathcal{G}(k)$ através da concatenação de suas linhas transpostas. O padrão numa posição desconhecida (m_0, n_0) torna-se $\mathcal{F}(k-k_0)$ e o ruído $b(m,n)$, correspondendo ao resto da imagem, torna-se $\mathcal{B}(k)$. Portanto, a Equação (2) é reescrita como

$$\mathcal{G}(k) = \mathcal{F}(k-k_0) + \mathcal{B}(k) = \mathcal{F}(k) * \delta(k-k_0) + \mathcal{B}(k). \quad (3)$$

Considerando a convolução acima sendo circular e a imagem na Equação (2) com dimensões $(2T+1) \times (2T+1)$, onde $-T \leq m, n \leq T$, podemos expressar (2) e (3) numa notação matricial como

$$\mathbf{g} = \mathbf{F} \boldsymbol{\delta} + \mathbf{b}, \quad (4)$$

onde

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g(-T,-T) \\ g(-T,-T+1) \\ \dots \\ g(+T,+T) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta(-T,-T) \\ \delta(-T,-T+1) \\ \dots \\ \delta(+T,+T) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}(0) & \mathcal{F}(2T+1)^2-1 & \dots & \mathcal{F}(1) \\ \mathcal{F}(1) & \mathcal{F}(0) & \dots & \mathcal{F}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{F}(2T+1)^2-1 & \mathcal{F}(2T+1)^2-2 & \dots & \mathcal{F}(0) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

O problema de restauração do impulso consiste em, dados \mathbf{g} e \mathbf{F} , estimar o vetor $\boldsymbol{\delta}$. Supomos que o vetor aleatório de ruído

\mathbf{b} , de dimensões $((2T+1)^2 \times 1)$, seja Gaussiano, como média nula e matriz covariância $(2T+1)^2 \times (2T+1)^2$. Por sua vez, $\boldsymbol{\delta}$ $((2T+1)^2 \times 1)$ tem matriz autocorrelação $(2T+1)^2 \times (2T+1)^2$ (identidade $(2T+1)^2 \times (2T+1)^2$). Usando o princípio da ortogonalidade, a melhor estimativa linear $\hat{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{A} \mathbf{g}$ que minimiza $E[\|\boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}}\|^2]$ é obtida fazendo o erro $(\boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}})$ decorrelacionado [9-10] em relação à observação \mathbf{g} . Supondo também que $\boldsymbol{\delta}$ e \mathbf{b} sejam decorrelacionados, encontramos o seguinte resultado [7-8]:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{A} \mathbf{g} = \mathbf{F}^t (\mathbf{F} \mathbf{F}^t + \mathbf{C}_b)^{-1} \mathbf{g}. \quad (6)$$

Neste ponto, é importante mostrar como as matrizes \mathbf{F} e \mathbf{A} são construídas dos sinais bidimensionais \mathbf{U} e $\boldsymbol{\Theta}$ (vide texto abaixo da Equação (1)). Para fazer isto, usamos uma notação baseada em blocos de matrizes. Seja \mathbf{H}_r um operador que mapeia a linha r de uma janela genérica \mathbf{v} de dimensões $(2N+1) \times (2N+1)$ em uma matriz circulante $(2N+1) \times (2N+1)$, de acordo com a seguinte regra:

$$\mathbf{H}_r(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{r,0} & \mathbf{v}_{r,-1} & \mathbf{v}_{r,-2} & \dots & \mathbf{v}_{r,+3} & \mathbf{v}_{r,+2} & \mathbf{v}_{r,+1} \\ \mathbf{v}_{r,+1} & \mathbf{v}_{r,0} & \mathbf{v}_{r,-1} & \dots & \mathbf{v}_{r,+4} & \mathbf{v}_{r,+3} & \mathbf{v}_{r,+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_{r,+N} & \mathbf{v}_{r,+N-1} & \mathbf{v}_{r,+N-2} & \dots & \mathbf{v}_{r,-N+2} & \mathbf{v}_{r,-N+1} & \mathbf{v}_{r,-N} \\ \mathbf{v}_{r,-N} & \mathbf{v}_{r,+N} & \mathbf{v}_{r,+N-1} & \dots & \mathbf{v}_{r,-N+3} & \mathbf{v}_{r,-N+2} & \mathbf{v}_{r,-N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_{r,-1} & \mathbf{v}_{r,-2} & \mathbf{v}_{r,-3} & \dots & \mathbf{v}_{r,+2} & \mathbf{v}_{r,+1} & \mathbf{v}_{r,0} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Com a definição acima, \mathbf{F} e \mathbf{A} tornam-se

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0(\mathbf{U}) & \mathbf{H}_1(\mathbf{U}) & \dots & \mathbf{H}_T(\mathbf{U}) & \mathbf{H}_{T+1}(\mathbf{U}) & \dots & \mathbf{H}_{+1}(\mathbf{U}) \\ \mathbf{H}_{+1}(\mathbf{U}) & \mathbf{H}_0(\mathbf{U}) & \dots & \mathbf{H}_{-T+1}(\mathbf{U}) & \mathbf{H}_{-T}(\mathbf{U}) & \dots & \mathbf{H}_{+2}(\mathbf{U}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{+T}(\mathbf{U}) & \mathbf{H}_{+T-1}(\mathbf{U}) & \dots & \mathbf{H}_0(\mathbf{U}) & \mathbf{H}_{-1}(\mathbf{U}) & \dots & \mathbf{H}_{-T}(\mathbf{U}) \\ \mathbf{H}_{-T}(\mathbf{U}) & \mathbf{H}_{+T}(\mathbf{U}) & \dots & \mathbf{H}_{+1}(\mathbf{U}) & \mathbf{H}_0(\mathbf{U}) & \dots & \mathbf{H}_{-T+1}(\mathbf{U}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{-1}(\mathbf{U}) & \mathbf{H}_{-2}(\mathbf{U}) & \dots & \mathbf{H}_{-T}(\mathbf{U}) & \mathbf{H}_{+T-1}(\mathbf{U}) & \dots & \mathbf{H}_0(\mathbf{U}) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{H}_1(\boldsymbol{\Theta}) & \dots & \mathbf{H}_T(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{H}_{T+1}(\boldsymbol{\Theta}) & \dots & \mathbf{H}_{+1}(\boldsymbol{\Theta}) \\ \mathbf{H}_{+1}(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{H}_0(\boldsymbol{\Theta}) & \dots & \mathbf{H}_{-T+1}(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{H}_{-T}(\boldsymbol{\Theta}) & \dots & \mathbf{H}_{+2}(\boldsymbol{\Theta}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{+T}(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{H}_{+T-1}(\boldsymbol{\Theta}) & \dots & \mathbf{H}_0(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{H}_{-1}(\boldsymbol{\Theta}) & \dots & \mathbf{H}_{-T}(\boldsymbol{\Theta}) \\ \mathbf{H}_{-T}(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{H}_{+T}(\boldsymbol{\Theta}) & \dots & \mathbf{H}_{+1}(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{H}_0(\boldsymbol{\Theta}) & \dots & \mathbf{H}_{-T+1}(\boldsymbol{\Theta}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{-1}(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{H}_{-2}(\boldsymbol{\Theta}) & \dots & \mathbf{H}_{-T}(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{H}_{+T-1}(\boldsymbol{\Theta}) & \dots & \mathbf{H}_0(\boldsymbol{\Theta}) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Depois de achar \mathbf{A} da Equação (6), determinamos, por inspeção em (9), os coeficientes do filtro bidimensional $\boldsymbol{\Theta}$. Note que, sendo \mathbf{F} da forma da Equação (8), pode-se mostrar que a Equação (6) sempre fornece \mathbf{A} com a forma da Equação (9).

Para exemplificar numericamente o uso das Equações (6-9), seja \mathbf{U} um padrão de quina de 90° representado pela seguinte janela:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando a Equação (8):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo \mathbf{C}_b igual à matriz nula (hipótese de não haver ruído) e usando a Equação (6):

$$\mathbf{A} = 0,25 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -1 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & | & 1 & -1 & -1 & | & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & -1 & 1 & -1 & | & 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & | & 1 & 1 & -1 & | & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 1 & | & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 & -1 & 1 & | & -1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & -1 & | & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & | & -1 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & | & 1 & -1 & 1 & | & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo \mathbf{A} sob o formato da Equação (9):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \theta_{0,0} & \theta_{0,-1} & \theta_{0,+1} & | & \theta_{-1,0} & \theta_{-1,-1} & \theta_{-1,+1} & | & \theta_{+1,0} & \theta_{+1,-1} & \theta_{+1,+1} \\ \theta_{0,+1} & \theta_{0,0} & \theta_{0,-1} & | & \theta_{-1,+1} & \theta_{-1,0} & \theta_{-1,-1} & | & \theta_{+1,+1} & \theta_{+1,0} & \theta_{+1,-1} \\ \theta_{0,-1} & \theta_{0,+1} & \theta_{0,0} & | & \theta_{-1,-1} & \theta_{-1,+1} & \theta_{-1,0} & | & \theta_{+1,-1} & \theta_{+1,+1} & \theta_{+1,0} \\ \hline \theta_{+1,0} & \theta_{+1,-1} & \theta_{+1,+1} & | & \theta_{0,0} & \theta_{0,-1} & \theta_{0,+1} & | & \theta_{-1,0} & \theta_{-1,-1} & \theta_{-1,+1} \\ \theta_{+1,+1} & \theta_{+1,0} & \theta_{+1,-1} & | & \theta_{0,+1} & \theta_{0,0} & \theta_{0,-1} & | & \theta_{-1,+1} & \theta_{-1,0} & \theta_{-1,-1} \\ \theta_{+1,-1} & \theta_{+1,+1} & \theta_{+1,0} & | & \theta_{0,-1} & \theta_{0,+1} & \theta_{0,0} & | & \theta_{-1,-1} & \theta_{-1,+1} & \theta_{-1,0} \\ \hline \theta_{-1,0} & \theta_{-1,-1} & \theta_{-1,+1} & | & \theta_{+1,0} & \theta_{+1,-1} & \theta_{+1,+1} & | & \theta_{0,0} & \theta_{0,-1} & \theta_{0,+1} \\ \theta_{-1,+1} & \theta_{-1,0} & \theta_{-1,-1} & | & \theta_{+1,+1} & \theta_{+1,0} & \theta_{+1,-1} & | & \theta_{0,+1} & \theta_{0,0} & \theta_{0,-1} \\ \theta_{-1,-1} & \theta_{-1,+1} & \theta_{-1,0} & | & \theta_{+1,-1} & \theta_{+1,+1} & \theta_{+1,0} & | & \theta_{0,-1} & \theta_{0,+1} & \theta_{0,0} \end{bmatrix}$$

Com uma rápida análise, vemos que \mathbf{A} , inversa de \mathbf{F} , oferece o seguinte operador convolutor Θ :

$$\Theta = 0,25 \begin{bmatrix} -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \end{bmatrix}$$

Como conferência:

$$\Rightarrow \Theta * \mathbf{U} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que oferece um impulso perfeito na amostra central $\mathbf{C}_{0,0}$ do sinal de saída do filtro (DSNR₂ infinita).

IV. ABORDAGEM ALTERNATIVA À RESTAURAÇÃO DO IMPULSO

Com a formulação da seção anterior, encontramos Θ que maximiza a DSNR₂ para um dado padrão usando a abordagem de restauração do impulso. Contudo, aquele cálculo não evita que, na presença de ruído, uma outra janela ofereça uma DSNR₂ melhor quando filtrada com Θ . Uma solução alternativa para este problema é considerar a DSNR₂ como uma função do filtro Θ e do padrão \mathbf{U} , para procurar o filtro Θ que maximize a DSNR₂ quando \mathbf{U} variar. Isto lembra

a abordagem alternativa para a filtragem discriminativa descrita em [6].

Para maximizar a DSNR₂, temos que minimizar $E[\|\delta - \hat{\delta}\|^2]$. A solução para a abordagem alternativa é encontrada após determinar \mathbf{A} tal que $E[\|\delta - \hat{\delta}\|^2]$ (uma função de \mathbf{A} e \mathbf{F}) seja minimizada quando \mathbf{F} for o padrão \mathbf{F} cuja discriminação é desejada. Como

$$E[\|\delta - \hat{\delta}\|^2] = E\{\mathbf{b}^t \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{b}\} + E\{\|(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{F})\delta\|^2\}, \quad (10)$$

apenas $E\{\|(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{F})\delta\|^2\} \geq 0$ depende de \mathbf{F} . Portanto, o mínimo erro, considerando \mathbf{A} uma matriz constante, é obtido quando a igualdade é satisfeita para $\mathbf{F} = \mathbf{F}$. Neste caso, a solução é $\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1}$. Note que esta solução não depende de qualquer estatística de $b(m,n)$.

Podemos misturar as duas formulações descritas, como em [6] em uma abordagem mista que pondera os dois termos. O primeiro deles ($E[\|\delta - \hat{\delta}\|^2]$) é tal que, quanto menor é, maior é a DSNR₂. O segundo deles ($E\{\|(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{F})\delta\|^2\}$) é tal que, quanto menor, mais próxima da solução alternativa será a solução mista. Pode ser provado [7] que a solução mista (11) é parecida com a Equação (6), mudando \mathbf{C}_b por $(1-K)\mathbf{C}_b$, onde K ($0 \leq K \leq 1$) pondera o segundo termo e $(1-K)$ o primeiro.

$$\hat{\delta} = \mathbf{F}^t (\mathbf{F} \mathbf{F}^t + \{1-K\} \mathbf{C}_b)^{-1} \mathbf{g}. \quad (11)$$

Os métodos desenvolvidos até então requerem o cálculo de um filtro para cada padrão a ser discriminado. Nas seções seguintes, propomos duas soluções para o cálculo de filtros que podem discriminar mais de um padrão simultaneamente.

V. FILTRO DISCRIMINATIVO DO TIPO "OU"

Nesta seção, propomos um filtro com a capacidade de discriminar mais de um padrão. Por exemplo, mostramos como projetar um filtro que discrimine as letras "A", "E" e "O" das outras letras. Um filtro como este nós chamamos de *Filtro Discriminativo do Tipo "OU"*.

De acordo com a discussão que precedeu (6), temos que a melhor estimativa $\hat{\delta}$ de δ precisa de satisfazer ao princípio da ortogonalidade [9], ou seja:

$$E\{(\delta - \hat{\delta})\mathbf{g}^t\} = E\{(\delta - \mathbf{A}\mathbf{g})\mathbf{g}^t\} = \mathbf{0}. \quad (12)$$

Supondo que o padrão i corresponda à matriz \mathbf{F}_i (vide Equação (5)) e tenha probabilidade a priori p_i , (12) pode ser expandida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E\{(\delta - \hat{\delta})\mathbf{g}^t\} &= E\{(\delta - \mathbf{A}\mathbf{g})\mathbf{g}^t\} = \\ &= \sum_i p_i E\{(\delta - \mathbf{A}\mathbf{F}_i\delta - \mathbf{A}\mathbf{b})(\mathbf{F}_i\delta + \mathbf{b})^t\} = \\ &= \sum_i p_i \{E\{\delta\delta^t\}\mathbf{F}_i^t + E\{\delta\mathbf{b}^t\} - \mathbf{A}\mathbf{F}_i E\{\delta\delta^t\}\mathbf{F}_i^t \\ &\quad - \mathbf{A}\mathbf{F}_i E\{\delta\mathbf{b}^t\} - \mathbf{A}E\{\mathbf{b}\delta^t\}\mathbf{F}_i^t - \mathbf{A}E\{\mathbf{b}\mathbf{b}^t\}\} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Supondo novamente que δ e \mathbf{b} sejam descorrelacionados, reescrevemos (13) como

$$\sum_i p_i \{ \mathbf{F}_i^t - \mathbf{A} \mathbf{F}_i \mathbf{F}_i^t - \mathbf{A} \mathbf{C}_b \} = \mathbf{0} . \quad (14)$$

Conseqüentemente,

$$\mathbf{A} = \{ \sum_i p_i \mathbf{F}_i^t \} \{ \mathbf{C}_b + \sum_i p_i \mathbf{F}_i \mathbf{F}_i^t \}^{-1} . \quad (15)$$

Para exemplificar o uso de (15), vamos considerar o caso onde desejamos discriminar as letras "A", "E" ou "O" (*Arial*, 8 pt. numa janela 9x9) das outras letras. Supondo que todas as probabilidades p_i sejam iguais, a Tabela 1 mostra os valores de DNSR_2 do filtro Θ tipo "OU" quando ele é aplicado aos padrões desejados "A", "E" e "O", além de duas outras letras.

TABELA I
DNSR₂ obtidas com o filtro OU.

	DNSR ₂
"A"	0,3221
"E"	0,4153
"O"	0,7451
"I"	0,0001
"U"	0,0097

Note que, quando a matriz \mathbf{F}_i , correspondendo ao padrão i , é singular, geralmente é suficiente adicionar uma ligeira perturbação à matriz \mathbf{C}_b (por exemplo, fazendo $\mathbf{C}_b = 0,0001 \mathbf{I}$) de forma a gerar $\mathbf{F} \mathbf{F}^t + \mathbf{C}_b$ não singular (vide (6)).

VI. FILTRO DISCRIMINATIVO DO TIPO "QUAL"

Na seção anterior, apresentamos um algoritmo para o cálculo do filtro "OU", ou seja, o filtro capaz de discriminar qualquer padrão pertencente a um dado conjunto. Note que o *Filtro Discriminativo do Tipo "OU"* pode apenas decidir se uma imagem contém ou não um dos padrões do conjunto, não podendo decidir por um dos elementos do conjunto. Nesta seção, propomos uma alteração no cálculo do filtro OU, de tal forma que seja possível decidir qual dos padrões pertencentes ao conjunto é a entrada do filtro. Referimo-nos a este filtro proposto como *Filtro Discriminativo do Tipo "QUAL"*.

Considere o diagrama em blocos da Figura 1. Nele, notamos o princípio fundamental da filtragem discriminativa: o filtro Θ (calculado usando as Equações (6) a (11) para o padrão "A"), quando circularmente convolvido com o padrão "A", oferece um sinal de saída com alta energia na amostra central.

Considere agora o diagrama da Figura 2. Ele mostra o filtro discriminativo onde a energia de saída está concentrada numa amostra deslocada em relação à amostra central. Note que o filtro discriminativo foi calculado para o gabarito "A" deslocado à direita e para baixo.

Como é possível deslocar a amostra de saída com maior energia com este truque simples, abre-se então uma importante alternativa para o filtro OU: podemos escolher diferentes deslocamentos para cada um dos padrões. Assim, dependendo da localização da amostra de saída com mais

energia, torna-se possível decidir qual dos padrões do conjunto está presente na imagem.

Tomamos o conjunto { "A", "E", "O" } (*Arial*, 8 pt.), como na seção anterior, cujos valores dos deslocamentos estão mostrados na tabela 2. Note que, para os três padrões, conseguimos bons valores de DNSR_2 (maiores que 0,5).

A Figura 3 mostra os sinais de saída após convoluir circularmente o filtro QUAL com cada um dos padrões do conjunto { "A", "E", "O" }. Note os picos de energia nas posições desejadas, indicando o quanto efetivo é o método proposto.

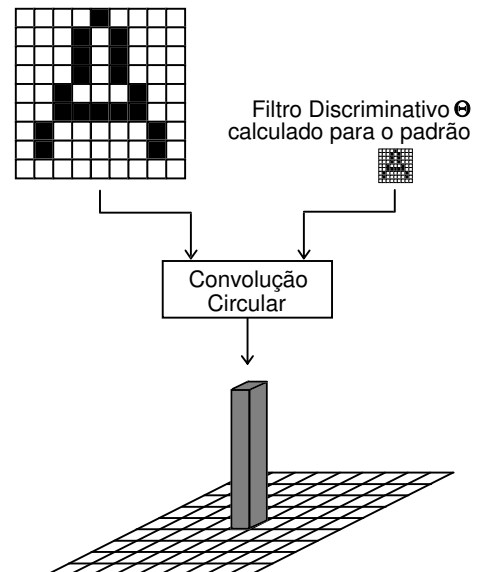


Fig. 1. Máxima energia na amostra central.

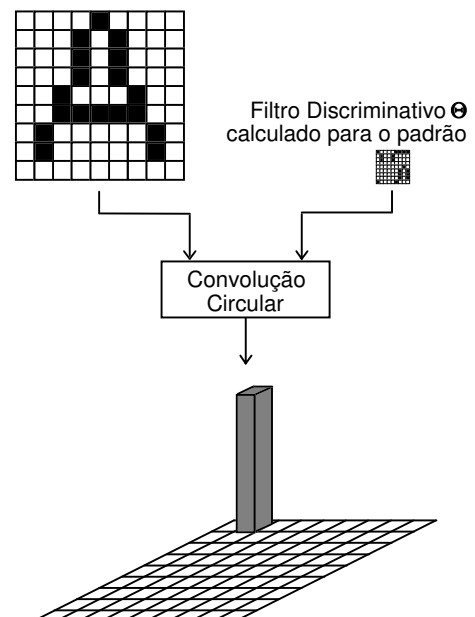


Fig. 2. Máxima energia numa outra amostra.

TABELA II
Coordenadas e $DSNR_2$ das amostras de pico na saída.

	Coordenadas do Pico	$DSNR_2$
"A"	2, 7	0,5888
"E"	8, 6	0,5447
"O"	1, 2	0,8972

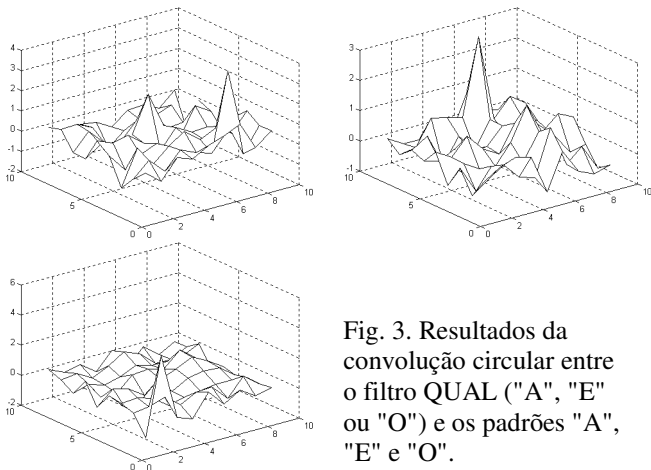


Fig. 3. Resultados da convolução circular entre o filtro QUAL ("A", "E" ou "O") e os padrões "A", "E" e "O".

VII. CONJUGANDO OS FILTROS "OU" E "QUAL"

Nesta seção, investigamos o uso de uma combinação das duas abordagens anteriores. Considere o caso em que o conjunto de padrões contenha as vogais { "A" , "E" , "O" }, porém cada uma delas agora representada tanto em *Arial 8pt.* quanto em *Times New Roman 8pt.*, ou seja, o conjunto tem 6 padrões. Projetamos um filtro discriminativo que produza picos em posições que dependam apenas da vogal, ou seja, para uma dada vogal, suas duas representações (*Times* e *Arial*) produzam picos na mesma posição. A Tabela 3 mostra os resultados das simulações com todos os $p_i = 1/6$ na Equação (15).

TABELA III
 $DSNR_2$ e coordenadas dos centros para o filtro OU/QUAL, com valores iguais de p_i .

	Fonte (8 pt.)	Pico em	$DSNR_2$
"A"	Arial	2, 7	0,4035
"E"	Arial	8, 6	0,4322
"O"	Arial	1, 2	0,8040
"A"	Times New Roman	2, 7	0,2615
"E"	Times New Roman	8, 6	0,4515
"O"	Times New Roman	1, 2	0,8040

Os resultados de $DSNR_2$ mostrados na Tabela 3 claramente privilegiam o padrão "O" e oferecem uma baixa discriminação para o padrão "A" *Times New Roman*. Podemos corrigir este problema ajustando os valores de p_i . Usando o conjunto de parâmetros da Tabela 4, notamos que o valor 0,2615 subiu para 0,4224, embora a $DSNR_2$ para o padrão "O" tenha caído de 0,8040 para 0,4783.

É importante notar que o filtro discriminativo é calculado em caráter *off-line*, onde podem ser feitos alguns ajustes (por exemplo, nos p_i). Após determinado, o filtro pode ser

prontamente aplicado em qualquer imagem onde se queira detectar o padrão.

TABELA IV
 $DSNR_2$ e coordenadas dos centros para o filtro OU/QUAL, com valores diferentes de p_i .

	Fonte (8 pt.)	p_i (x 5,1)	Pico em	$DSNR_2$
"A"	Arial	1,0	2, 7	0,4839
"E"	Arial	0,7	8, 6	0,4350
"O"	Arial	0,7	1, 2	0,4783
"A"	Times New Roman	1,3	2, 7	0,4224
"E"	Times New Roman	0,7	8, 6	0,5263
"O"	Times New Roman	0,7	1, 2	0,4783

VIII. SIMULAÇÕES

Nesta seção, aproveitamos os filtros discriminativos das seções anteriores para detectar as vogais "A", "E" e "O" dentro de um texto sobreposto à imagem da Lena.

A Figura 4 mostra um desempenho de 100% de detecções corretas e nenhum falso-alarme, usando o filtro OU da Tabela 1. O limiar arbitrado foi 0,240. Para obter as localizações dos padrões, tomamos o bloco 9x9 em volta de cada pixel da imagem e realizamos convoluções circulares com o \otimes 9x9. Depois disto, marcamos todas as localizações onde o valor de $DSNR_2$ foi superior a 0,240.

As Figuras 5-7 mostram simulações com o filtro QUAL. Note que todas as letras do conjunto foram detectadas (o limiar foi arbitrado igual a 0,380). Todas as $DSNR_2$ para a letra "A" foram maiores que 0,4050. Para a letra "E", as $DSNR_2$ passaram de 0,3864. Para a letra "O", as $DSNR_2$ superaram 0,4701. Nenhum falso-alarme ocorreu.



Fig. 4. "A", "E" e "O" detectados com o filtro OU.



Fig. 5. "A" detectados com o filtro QUAL.



Fig. 6. "E" detectados com o filtro QUAL.



Fig. 7. "O" detectados com o filtro QUAL.

As Figuras 8-10 mostram como foram detectadas as vogais usando o filtro OU/QUAL. Repare que agora a mesma frase foi escrita tanto em *Arial* quanto em *Times New Roman*. Para este esquema de detecção, foi tomado um cuidado especial na construção da janela 9x9: a última linha foi substituída por uma cópia da penúltima e a primeira por uma cópia da segunda. Este procedimento evita que uma janela contendo a letra "E" *Arial* alcance parte do carácter seguinte. Foram também adotados limiares diferentes para cada letra: 0,3322, para o "A" e o "E", e 0,2600 para o "O".



Fig. 8. "A" detectados usando o filtro OU/QUAL (limiar 0,3322).



Fig. 9. "E" detectados usando o filtro OU/QUAL (limiar 0,3322).



Fig. 10. "O" detectados usando o filtro OU/QUAL (limiar 0,2600).

IX. CONCLUSÕES

Neste artigo, primeiro revimos a definição e o conceito de relação sinal-ruído discriminativa em duas dimensões. Também apresentamos a filtragem discriminativa modelada como um problema de restauração do impulso. O principal objetivo deste método recém proposto é obter um filtro bidimensional que, quando convolvido circularmente com o padrão de imagem, gere uma imagem de saída com a energia concentrada em um única amostra. A vantagem deste método em relação aos outros referenciados em [3-6] é que ele não requer qualquer algoritmo de otimização, já que oferece soluções analíticas.

Por último, apresentamos um novo método, estendendo o problema de restauração do impulso para o caso de detecção de múltiplos padrões. Também propusemos soluções analíticas para dois tipos de filtros discriminativos: o OU e o QUAL. Enquanto o filtro OU pode decidir apenas se a imagem pertence ou não a um conjunto de padrões, o filtro QUAL pode dizer qual dos padrões é a imagem de entrada.

Os resultados obtidos indicam que o método de discriminação múltipla proposto é eficiente e uma viável alternativa para classificadores não-lineares.

REFERÊNCIAS

- [1] Ji, Q. e Haralick, R.M., "Quantitative Evaluation of Edge Detectors Using the Minimum Kernel Variance Criterion", *IEEE International Conference on Image Processing*, Kobe, Japão, 1999.
- [2] Abdou, K.E. e Pratt, W.K., "Quantitative Design and Evaluation of Enhancement/Thresholding Edge Detectors", *Proc. of IEEE*, 67(5)753-763, 1979.
- [3] Ben-Arie, J. e Rao, K.R., "A Novel Approach for Template Matching by Nonorthogonal Image Expansion", *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, Vol.3, N^o.1, Fev.1993.
- [4] Nandy, D. e Ben-Arie, J., "EXM Eigen Templates for Detecting and Classifying Arbitrary Junctions", *IEEE International Conference on Image Processing*, Chicago, USA, 1998.
- [5] Rao, K.R. e Ben-Arie, J., "Multiple Template Matching Using the Expansion Filter", *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, Vol.4, N^o.5, out.1994.
- [6] Mendonça, A.P. e da Silva, E.A.B. "Two-Dimensional Discriminative Filters for Image Template Detection", *IEEE International Conference on Image Processing*, Tessaloniki, Grécia, 2001.
- [7] Mendonça, A.P. e da Silva, E.A.B. "Discriminative Filtering as an Impulse Restoration Problem", *IEEE International Telecommunication Symposium*, Natal, Brasil, set. 2002.
- [8] Mendonça, A.P. e da Silva, E.A.B. "Closed-Form Solutions for Discriminative Filtering Using Impulse Restoration Techniques", *IEE Electronics Letters*, Londres, UK, nov. 2002.
- [9] Abu-Naser, A., *Impulse Restoration-Based Template-Matching*, Ph. D. Thesis, University of Illinois, Chicago, USA, 2000.
- [10] Abu-Naser, A., Galatsanos, N.P. e Wernick, M.N., "Impulse Restoration-Based Template-Matching Using The Expectation-Maximization Algorithm", *IEEE International Conference on Image Processing*, Kobe, Japão, 1999.