

# Expressão Fechada para a Probabilidade de Erro de Bit de Esquemas QAM Sujeitos ao Desvanecimento Rayleigh

Waslon Terlizzi A. Lopes, Francisco Madeiro e Marcelo S. Alencar

**Resumo**—Neste artigo é apresentada uma nova expressão, fechada e exata, para a probabilidade de erro de bit (BEP, *bit error probability*) do esquema *M-QAM* (*M-ary quadrature amplitude modulation*) para um canal com desvanecimento Rayleigh. Também é obtida uma nova expressão, fechada e exata, para a BEP do esquema *R-QAM* (*rectangular QAM*) arbitrário sujeito ao desvanecimento Rayleigh.

**Palavras-Chave**—Canal com desvanecimento Rayleigh, *M-QAM*, *QAM retangular*, probabilidade de erro de Bit.

**Abstract**—This paper presents a new, exact, and closed-form expression for the bit error probability (BEP) of *M-QAM* (*M-ary quadrature amplitude modulation*) scheme considering the Rayleigh fading channel. It is also obtained a new, exact and closed-form expression for the BEP of an arbitrary *R-QAM* (*rectangular QAM*) scheme subject to the Rayleigh fading.

**Keywords**—Rayleigh fading channel, *M-QAM*, rectangular QAM, bit error probability.

## I. INTRODUÇÃO

As crescentes necessidades de maior capacidade e melhor desempenho de sistemas de comunicação sem fio têm imposto desafios no cenário de obtenção de elevadas taxas de transmissão, capazes de acomodar o crescente tráfego multimídia e a diversidade de aplicações envolvendo comunicações móveis. Nesse contexto, esquemas de modulação espectralmente eficientes têm recebido muita atenção. O esquema QAM (*quadrature amplitude modulation*) é uma técnica apropriada para se obter uma elevada taxa de transmissão sem aumentar a largura de faixa dos sistemas de comunicação sem fio.

Apesar de muitos trabalhos (e.g. [1]–[6]) terem sido desenvolvidos com o propósito de avaliar o desempenho do esquema QAM em termos de probabilidade de erro de bit (BEP, *bit error probability*), só recentemente, em um artigo de Cho e Yoon [7], foi apresentada uma expressão fechada para a BEP do esquema QAM com tamanho arbitrário de constelação (esquema *M-QAM*, isto é, *M-ary QAM*), considerando um canal com ruído aditivo gaussiano branco (AWGN, *additive white Gaussian noise*).

Waslon Terlizzi Araújo Lopes e Marcelo Sampaio de Alencar, Laboratório de Comunicações, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, PB, Brasil, E-mails: {waslon,malencar}@dee.ufcg.edu.br

Francisco Madeiro, Departamento de Estatística e Informática, Universidade Católica de Pernambuco, Recife, PE, Brasil, E-mail: madeiro@dei.unicap.br.

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

No presente artigo, os resultados apresentados por Cho e Yoon em [7] são usados para obter uma expressão fechada para a BEP do esquema *M-QAM* quadrado (*square M-QAM*) por um canal com desvanecimento Rayleigh quando o mapeamento de Gray é empregado. Além disso, no presente trabalho o resultado apresentado em [8] para a BEP do esquema *M-PAM* (*M-ary pulse amplitude modulation*) é estendido para obter uma expressão nova, fechada, exata para a BEP do esquema QAM retangular arbitrário  $I \times J$ . Essas expressões apresentam-se como uma forma conveniente de avaliar o desempenho do esquema QAM para vários casos de interesse prático.

## II. BEP DO ESQUEMA *M-QAM*

Com base na consistência do mapeamento de bit de uma constelação submetida ao código de Gray [9], Cho e Yoon obtiveram em [7] uma expressão para a BEP do esquema *M-QAM* por um canal AWGN. Ela é dada por

$$P_b = \frac{1}{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{k=1}^{\log_2 \sqrt{M}} P_b(k), \quad (1)$$

com

$$P_b(k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} \left\{ w(i, k, M) \cdot \operatorname{erfc} \left( (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}} \right) \right\}, \quad (2)$$

em que

$$w(i, k, M) = (-1)^{\lfloor \frac{i \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{M}} \rfloor} \cdot \left( 2^{k-1} - \left\lfloor \frac{i \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right), \quad (3)$$

$\gamma = E_b/N_0$  denota a relação sinal-ruído (SNR, *signal-to-noise ratio*) por bit,  $\lfloor x \rfloor$  denota o maior inteiro menor que  $x$ , e  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  denota a função erro complementar, dada por

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt. \quad (4)$$

Uma contribuição relevante de Cho e Yoon [7] foi exprimir a BEP do esquema *M-QAM* para um canal AWGN em termos da soma ponderada de funções erro complementar. Esses pesos incorporam o efeito, na BEP, da posição  $k$  do bit em um símbolo com  $\log_2 M$  bits.

Considere agora um canal com desvanecimento Rayleigh, com amplitude de desvanecimento  $\alpha$ , cuja função densidade de probabilidade (fdp) é dada por

$$p_A(\alpha) = 2\alpha e^{-\alpha^2} u(\alpha), \quad (5)$$

em que  $u(\cdot)$  é a função degrau unitário. Admita estimão perfeita de desvanecimento e sincronização de símbolo. A BEP correspondente do esquema  $M$ -QAM para um dado  $\alpha$  pode ser obtida de (1)-(3) se for levado em consideração que após o efeito de desvanecimento a relação sinal-ruído será modificada por  $\alpha^2$  [3]. Portanto, a probabilidade de o  $k$ -ésimo bit estar errado para um dado  $\alpha$  pode ser expressa como

$$P_{b|\alpha}(k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} \left\{ w(i, k, M) \cdot \operatorname{erfc} \left( (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma \cdot \alpha^2}{2(M-1)}} \right) \right\}. \quad (6)$$

A BEP correspondente pode ser obtida integrando (6) com relação à pdf de  $\alpha$ , ou seja,

$$\begin{aligned} P_{\text{Ray}}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{b|\alpha}(k) \cdot p_A(\alpha) d\alpha \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} \left\{ w(i, k, M) \cdot \operatorname{erfc} \left( (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma \cdot \alpha^2}{2(M-1)}} \right) \right\} 2\alpha e^{-\alpha^2} d\alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

Tendo em vista  $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$  e aplicando a substituição  $\alpha^2 = u$ , a expressão anterior passa a ser dada por

$$\begin{aligned} P_{\text{Ray}}(k) &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} \left\{ w(i, k, M) \cdot \int_0^{\infty} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2 M \cdot \gamma \cdot u}{2(M-1)}} \right) \right] e^{-u} du \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Levando em consideração que [10, Eq. 6.283]

$$\int_0^{\infty} e^{\beta x} [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\psi x})] dx = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{\psi - \beta}} - 1 \right], \quad (9)$$

para  $\Re[\psi] > 0$  e  $\Re[\beta] < \Re[\psi]$ , a BEP para o esquema  $M$ -QAM quadrado,  $P_{M\text{-QAM,Ray}}$ , é finalmente expressa por

$$P_{M\text{-QAM,Ray}} = \frac{1}{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{k=1}^{\log_2 \sqrt{M}} P_{\text{Ray}}(k), \quad (10)$$

com

$$\begin{aligned} P_{\text{Ray}}(k) &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} \left\{ w(i, k, M) \cdot \left( 1 - \frac{\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}}}{\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)} + 1}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Convém mencionar que a expressão apresentada neste artigo para a BEP do esquema  $M$ -QAM é mais simples que a expressão obtinível a partir dos resultados apresentados por Yoon e Cho em [11]. O cálculo da BEP a partir dos resultados apresentados em [11] envolve uma função hipergeométrica.

Alguns resultados numéricos obtidos a partir da expressão fechada para a BEP do esquema  $M$ -QAM sujeito ao desvanecimento Rayleigh são apresentados na Fig.1, que mostra a BEP em função da SNR por bit para  $M = 4, 16, 64$  e  $256$ . Conforme mostra a figura, os resultados numéricos, obtidos de (10), (11) e (3), são corroborados pelos resultados de simulação de Monte Carlo. Observa-se na figura, por exemplo, que cerca de 3–4 dB de SNR devem ser investidos para transmitir um bit extra por componente (dois bits extras por símbolo) para manter a probabilidade de erro de bit média em  $10^{-2}$ .

### III. BEP DO ESQUEMA R-QAM

No esquema R-QAM (*rectangular quadrature amplitude modulation*) arbitrário  $I \times J$ , as formas de onda consistem de duas portadoras moduladas em amplitude de forma independente, em quadratura, as quais podem ser expressas por

$$s(t) = A_I \cos(2\pi f_c t) - A_J \sin(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t < T, \quad (12)$$

em que  $A_I$  e  $A_J$  são as amplitudes do sinal das componentes em fase e quadratura, respectivamente,  $f_c$  é a freqüência da portadora e  $T$  é o intervalo de símbolo. No esquema R-QAM arbitrário  $I \times J$ ,  $\log_2(I \cdot J)$  bits de informação são mapeados em uma constelação bidimensional usando o código Gray. Para cada conjunto de  $\log_2(I \cdot J)$  bits de informação,  $\log_2 I$  bits são mapeados na componente em fase, cuja amplitude  $A_I$  é selecionada do conjunto  $\{\pm d_I, \pm 3d_I, \dots, \pm (I-1)d_I\}$ , em que  $2d_I$  é a distância euclidiana mínima entre as componentes em fase dos símbolos da constelação R-QAM. De forma semelhante,  $\log_2 J$  bits são mapeados na componente em quadratura, cuja amplitude  $A_J$  é selecionada do conjunto  $\{\pm d_J, \pm 3d_J, \dots, \pm (J-1)d_J\}$ , em que  $2d_J$  é a distância euclidiana mínima entre as componentes em quadratura dos símbolos da constelação. Note que  $d_I$  e  $d_J$  podem ser diferentes sem perda de generalidade.

A demodulação do sinal QAM recebido pode ser feita considerando as componentes em fase e em quadratura separadamente, isto é, realizando duas demodulações PAM paralelas.

Nesta seção, os resultados apresentados em [8] para a BEP do esquema  $M$ -PAM são estendidos para obter uma expressão nova, fechada, exata para a BEP do esquema QAM retangular arbitrário  $I \times J$ , considerando um canal com desvanecimento.

Pelos resultados apresentados em [8], segue que a taxa de erro de bit para o  $k$ -ésimo bit,  $P_b(k)$ , com  $k \in \{1, 2, \dots, \log_2 M\}$  (sendo  $M$  o número de símbolos da constelação PAM) é dada por

$$\begin{aligned} P_b(k) &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})M-1} \left\{ w(i, k, M) \cdot \left( 1 - \frac{\sqrt{\frac{3 \log_2 M (2i+1)^2}{M^2-1} \cdot \gamma}}{\sqrt{\frac{3 \log_2 M (2i+1)^2}{M^2-1} \cdot \gamma + 1}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

com

$$w(i, k, M) = (-1)^{\lfloor \frac{i \cdot 2^{k-1}}{M} \rfloor} \cdot \left( 2^{k-1} - \left\lfloor \frac{i \cdot 2^{k-1}}{M} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right), \quad (14)$$

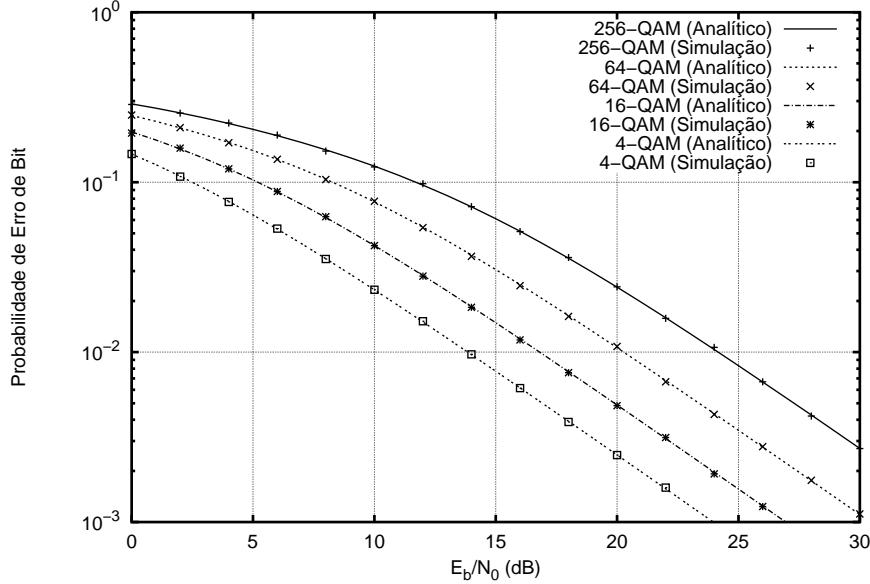


Fig. 1. Probabilidade de erro de bit do esquema  $M$ -QAM em função da relação sinal-ruído por bit ( $E_b/N_0$ ).

em que  $\gamma = E_b/N_0$  denota a relação sinal-ruído (SNR) por bit,  $\lfloor x \rfloor$  denota o maior inteiro menor que  $x$ , e  $\text{erfc}(\cdot)$  denota a função erro complementar.

Assim, considerando o esquema QAM retangular  $I \times J$ , a probabilidade de erro para o  $k$ -ésimo bit da componente em fase e a probabilidade de erro para o  $l$ -ésimo bit da componente em quadratura são dadas, respectivamente, por

$$P_I(k) = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})I-1} \left\{ w(i, k, I) \cdot \left( 1 - \frac{\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2(I \cdot J) \cdot \gamma}{I^2 + J^2 - 2}}}{\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2(I \cdot J) \cdot \gamma}{I^2 + J^2 - 2}} + 1} \right) \right\} \quad (15)$$

e

$$P_J(l) = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{(1-2^{-l})J-1} \left\{ w(j, l, J) \cdot \left( 1 - \frac{\sqrt{\frac{3(2j+1)^2 \log_2(I \cdot J) \cdot \gamma}{I^2 + J^2 - 2}}}{\sqrt{\frac{3(2j+1)^2 \log_2(I \cdot J) \cdot \gamma}{I^2 + J^2 - 2}} + 1} \right) \right\}, \quad (16)$$

com

$$w(i, k, I) = (-1)^{\lfloor \frac{i \cdot 2^{k-1}}{I} \rfloor} \cdot \left( 2^{k-1} - \left\lfloor \frac{i \cdot 2^{k-1}}{I} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) \quad (17)$$

e

$$w(j, l, J) = (-1)^{\lfloor \frac{j \cdot 2^{l-1}}{J} \rfloor} \cdot \left( 2^{l-1} - \left\lfloor \frac{j \cdot 2^{l-1}}{J} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right). \quad (18)$$

Convém informar que no esquema R-QAM  $I \times J$ , a relação entre a energia de bit média,  $E_b$ , e as distâncias  $d_I$  e  $d_J$  é dada por

$$E_b = \frac{(I^2 - 1)d_I^2 + (J^2 - 1)d_J^2}{3 \cdot \log_2(I \cdot J)}. \quad (19)$$

Finalmente, a probabilidade de erro de bit para o esquema QAM retangular  $I \times J$  para um canal com desvanecimento

Rayleigh,  $P_{R\text{-QAM, Ray}}$ , pode ser obtida calculando a média de (15) and (16), isto é

$$P_{R\text{-QAM, Ray}} = \frac{1}{\log_2(I \cdot J)} \left( \sum_{k=1}^{\log_2 I} P_I(k) + \sum_{l=1}^{\log_2 J} P_J(l) \right). \quad (20)$$

Convém mencionar que a expressão (20) obtida neste trabalho é mais compacta do que a apresentada em [11], a qual envolve o cálculo de funções hipergeométrica e gamma.

A Fig. 2 apresenta alguns resultados numéricos da expressão fechada para a BEP do esquema R-QAM sujeito ao desvanecimento Rayleigh. A Figura mostra a BEP em função da relação sinal-ruído por bit para os esquemas  $8 \times 16$  R-QAM e  $16 \times 32$  R-QAM. Observa-se que os resultados numéricos são corroborados por resultados de simulação de Monte Carlo.

#### IV. CONCLUSÃO

Neste artigo foi obtida uma nova expressão, exata e fechada, para a probabilidade de erro de bit (BEP) do esquema de modulação  $M$ -QAM ( $M$ -ary quadrature amplitude modulation) sujeito ao desvanecimento Rayleigh. A expressão para a BEP do esquema  $M$ -QAM quadrado foi corroborada por resultados de simulação de Monte Carlo. No artigo também foi obtida uma expressão nova, fechada e exata, para a BEP do esquema QAM retangular para um canal com desvanecimento Rayleigh.

Para trabalhos futuros, serão considerados erros de estimativa de fase e amplitude do canal com desvanecimento.

#### REFERÊNCIAS

- [1] J. Lu, K. B. Letaief, J. C.-I. Chuang and M. L. Liou. “ $M$ -PSK and  $M$ -QAM BER Computation Using Signal-Space Concepts”. *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, no. 2, pp. 181–184, February 1999.
- [2] L.-L. Yang and L. Hanzo. “A Recursive Algorithm for the Error Probability Evaluation of  $M$ -QAM”. *IEEE Communications Letters*, vol. 4, no. 10, pp. 304–306, October 2000.

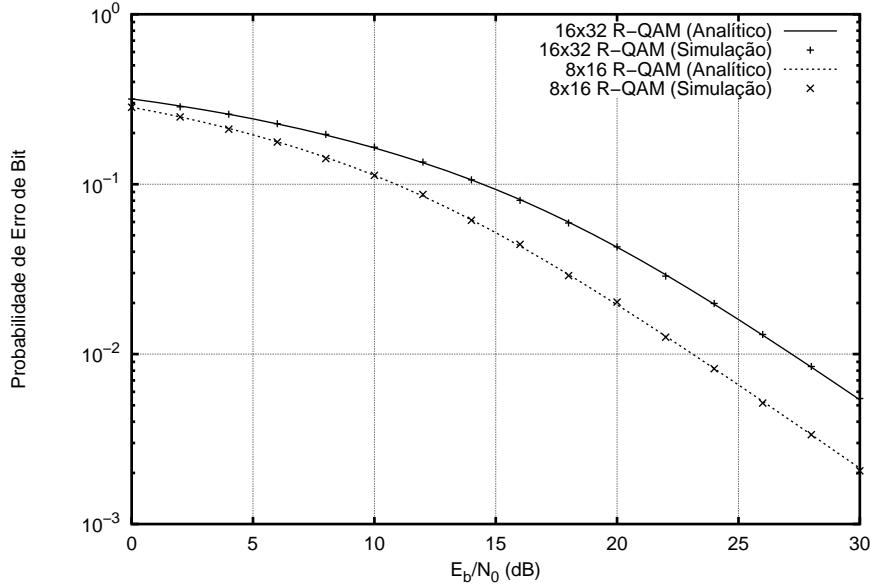


Fig. 2. Probabilidade de erro de bit do esquema  $R$ -QAM em função da relação sinal-ruído por bit ( $E_b/N_0$ ).

- [3] P.-M. Fortune, L. Hanzo and R. Steele. "On the Computation of 16-QAM and 64-QAM Performance in Rayleigh-Fading Channels". *IEICE Transactions on Communications*, vol. E75-B, no. 6, pp. 466–475, June 1992.
- [4] M. G. Shayesteh and A. Aghamohammadi. "On the Error Probability of Linearly Modulated Signals on Frequency-Flat Ricean, Rayleigh and AWGN Channels". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 43, no. 2/3/4, pp. 1454–1466, February/March/April 1995.
- [5] L. Hanzo, R. Steele and P.-M. Fortune. "A Subband Coding, BCH Coding, and 16-QAM System for Mobile Radio Speech Communications". *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 39, no. 4, pp. 327–339, November 1990.
- [6] P. K. Vitthaladevuni and M.-S. Alouini. "BER Computation of  $4/M$ -QAM Hierarchical Constellations". *IEEE Transactions on Broadcasting*, vol. 47, no. 3, pp. 228–239, September 2001.
- [7] K. Cho and D. Yoon. "On the General BER Expression of One- and Two-Dimensional Amplitude Modulations". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, no. 7, pp. 1074–1080, July 2002.
- [8] W. T. A. Lopes, F. Madeiro and M. S. Alencar. "Expressões para a Probabilidade de Erro de Bit de Esquemas de Modulação 64-QAM e  $M$ -PAM para um Canal com Desvanecimento Rayleigh". In *Anais do XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBT'03)*, Outubro 2003.
- [9] P. J. Lee. "Computation of the Bit Error Rate of Coherent  $M$ -ary PSK with Gray Code Bit Mapping". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 34, no. 5, pp. 488–491, May 1986.
- [10] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 1979.
- [11] D. Yoon and K. Cho. "General Bit Error Probability of Rectangular Quadrature Amplitude Modulation". *Electronics Letters*, vol. 38, no. 3, pp. 131–133, January 2002.