

# Relação Sinal-Ruído Média da Combinação por Ganho Igual de Canais Arbitrários

José Cândido S. Santos Filho e Michel D. Yacoub

**Resumo**—Este artigo investiga o comportamento da relação sinal-ruído média da combinação por ganho igual para canais independentes com potências médias e parâmetros de desvanecimento arbitrários. Os desvanecimentos podem diferir em grau e modelo. Limitantes inferior e superior de performance são apresentados. Verifica-se que o desbalanceamento de potência degrada consideravelmente a performance do combinador, a ponto de torná-la inferior à do não-uso de diversidade e pior à medida que o número de canais cresce. O aumento da severidade dos canais também degrada a performance, embora em alcance menor. Do observado, vislumbra-se uma versão dinâmica do combinador por ganho igual que maximize a relação sinal-ruído média ao combinar um subconjunto dos sinais de diversidade.

**Palavras-Chave**—Canais Arbitrários de Desvanecimento, Combinação por Ganho Igual, Relação Sinal-Ruído Média.

**Abstract**—This paper investigates the average signal-to-noise ratio for equal-gain combining with the channels assumed to be independent and to have arbitrary mean powers and arbitrary fading parameters. Fading characteristics may differ both in degree and in model. Lower bound and upper bound performances are obtained. It is observed that the power imbalance has a considerable negative impact in the combiner's performance. In some cases, the system is led to perform worse than the non-diversity scheme and it may even deteriorate as the number of channels increases. It is also verified that the performance deteriorates as the fading severity increases, but in a smaller degree. In face of these phenomena, a dynamic equal-gain combiner can be envisaged.

**Keywords**—Arbitrary Fading Channels, Equal-Gain Combining, Average Signal-to-Noise Ratio.

## I. INTRODUÇÃO

A combinação por ganho igual (CGI) é uma técnica atrativa de combate ao desvanecimento rápido da envoltória rádio-móvel, por aliar simplicidade de implementação a eficiência. Para canais independentes e identicamente distribuídos (iid), sua performance se aproxima daquela da combinação por razão máxima (CRM), solução ótima, melhorando à medida que a severidade do desvanecimento se abrange e o número  $M$  de canais de diversidade se eleva.

A literatura focaliza a análise da performance de sistemas de diversidade nos critérios de confiabilidade e de taxa de erro de bit [1], [2], [3]. Poucas investigações se concentram na relação sinal-ruído (RSR) média e, de fato, quando o fazem, limitam-se a ramos iid [4], [5]. Entretanto, a RSR média constitui um critério de extrema relevância. No planejamento de redes sem fio, por exemplo, o uso de diversidade se reflete na adição, no *link-budget*, de um ganho médio de potência relativo ao método de combinação.

José Cândido S. Santos Filho e Michel D. Yacoub, Wireless Technology Laboratory (WiTek), DECOM-FEEC-UNICAMP, C.P. 6101, 13083-970 Campinas-SP, Brasil, E-mails: [candido,michel]@decom.fee.unicamp.br.

Embora os poucos estudos sobre RSR média se limitem ao caso iid, os canais de diversidade, não raro, apresentam potências médias e condições de desvanecimento distintas. Este trabalho desenvolve uma formulação geral para a RSR média na saída do combinador CGI em que os ramos apresentam tanto potências quanto condições de desvanecimento diversas. Apesar de a caracterização estatística da envoltória CGI ser deveras complicada, na forma de uma convolução  $M$ -dimensional [6], a RSR média apresenta-se em equações fechadas mais simples e bem representa o desempenho da técnica. O cenário adotado é genérico e inclui desvanecimento misto, ou seja, canais com diferentes modelos — e não apenas graus — de desvanecimento. Mostra-se aqui que as conclusões obtidas para o caso iid divergem de forma significativa daquelas obtidas para os casos mais gerais e, portanto, mais realistas.

## II. MODELOS DE DESVANECEMENTO

Em vista da aleatoriedade do conjunto de eventos envolvidos em sua propagação, o sinal rádio-móvel é comumente modelado de forma estatística. Nakagami- $m$  [7] e Rice [8] são modelos estatísticos consagrados para o desvanecimento rápido da envoltória do sinal rádio-móvel. Ambos incluem a distribuição Rayleigh (a mais simples condição de desvanecimento) como um caso particular. A seguir, as respectivas funções densidades de probabilidade (PDF) e seus momentos de ordem  $n$  são apresentados. Os momentos de primeira ordem aparecem na expressão da RSR média CGI a ser derivada.

### A. Nakagami- $m$

A distribuição de Nakagami- $m$  [7] descreve a variação rápida da envoltória do sinal rádio-móvel em um ambiente multipercurso onde as ondas espalhadas atingem o receptor em *clusters*. A PDF da envoltória Nakagami- $m$  normalizada  $p_i = r_i/\hat{r}_i$ , onde  $r_i$  é a envoltória do sinal e  $\hat{r}_i = \sqrt{E(r_i^2)}$  o seu valor rms (*root mean square*), é dada por

$$p(\rho_i) = \frac{2m_i^{m_i}}{\Gamma(m_i)} \rho_i^{2m_i-1} \exp(-m_i\rho_i^2) \quad (1)$$

sendo  $m_i = E^2(r_i^2)/\text{Var}(r_i^2)$  o parâmetro de Nakagami e  $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \exp(-x) dx$  a função Gama. Observe que  $E(\cdot)$  e  $\text{Var}(\cdot)$  são operadores de média e variância, respectivamente. Para  $m_i = 1$ , tem-se a condição Rayleigh. Os momentos de ordem  $n > 0$  da envoltória Nakagami- $m$  normalizada valem

$$E(\rho_i^n) = \frac{\Gamma(m_i + n/2)}{m_i^{n/2} \Gamma(m_i)} \quad (2)$$

Para  $n = 1$ , tem-se, pois,

$$E(\rho_i) = \frac{\Gamma(m_i + 1/2)}{m_i^{1/2} \Gamma(m_i)} \quad (3)$$

### B. Rice

A distribuição de Rice [8] descreve a variação rápida da envoltória do sinal rádio-móvel em um ambiente multipercorso onde uma componente predominante (ou componente direta) se soma às ondas espalhadas uniformemente distribuídas em torno do receptor. A PDF da envoltória Rice normalizada  $\rho_i$  é dada por

$$p(\rho_i) = \frac{2(1+k_i)}{\exp(k_i)} \rho_i \exp(-(1+k_i)\rho_i^2) I_0\left(2\sqrt{k_i(1+k_i)}\rho_i\right) \quad (4)$$

sendo  $k_i$  o parâmetro de Rice, obtido como a razão entre a potência da componente direta e a potência total das ondas espalhadas e  $I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(z \cos(\theta)) d\theta$  a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem zero. Para  $k_i = 0$ , tem-se a condição Rayleigh. Os momentos de ordem  $n > 0$  da envoltória Rice normalizada são dados por

$$E(\rho_i^n) = \frac{\Gamma(1+n/2)}{\exp(k_i)(1+k_i)^{n/2}} {}_1F_1(1+n/2; 1; k_i) \quad (5)$$

onde  ${}_1F_1(a; b; c)$  é a função hipergeométrica confluente de primeiro tipo definida como

$${}_1F_1(a; b; c) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a)_i c^i}{(b)_i i!} \quad (6)$$

e  $(a)_i = \Gamma(a+i)/\Gamma(a)$  é o símbolo de Pochhammer. Para  $n = 1$ , (5) simplifica-se para

$$E(\rho_i) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1+k_i}} e^{-k_i/2} [(1+k_i)I_0(k_i/2) + k_i I_1(k_i/2)] \quad (7)$$

sendo  $I_1(z) = \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(z \cos(\theta)) \sin^2(\theta) d\theta$  a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem 1.

### III. COMBINAÇÃO POR GANHO IGUAL

O sistema sob estudo apresenta um número genérico  $M$  de ramos de diversidade independentes, desbalanceados em potência e com graus de desvanecimento arbitrários. Os ruídos nos ramos são independentes, de média nula e igual potência média  $\mathcal{N}$ .

É conveniente desmembrar a envoltória  $r_i$  do  $i$ -ésimo ramo ( $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ ) em duas componentes,

$$r_i = \hat{r}_i \rho_i \quad (8)$$

abstraindo a especificação determinística de potência média  $E(r_i^2/2) = \hat{r}_i^2/2$  da figura estocástica de desvanecimento embutida na distribuição da envoltória normalizada  $\rho_i$  do ramo.

A combinação por ganho igual efetua a soma coerente dos  $M$  sinais de diversidade. Neste processo, os ruídos dos ramos se somam incoerentemente, de modo que a potência média do ruído na saída do combinador vale  $M\mathcal{N}$ . Normalizando-se a soma dos ramos por  $\sqrt{M}$ , tem-se então, na saída do

combinador, um ruído de potência  $\mathcal{N}$  igual à do ruído em cada ramo. Tal condição fornece uma referência para avaliação da performance do método. Conseqüentemente, a envoltória  $r$  na saída do combinador resulta em

$$r = \frac{\sum_{i=1}^M r_i}{\sqrt{M}} \quad (9)$$

Com (8) e (9), a RSR CGI  $\gamma = r^2/2\mathcal{N}$  é dada por

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\left(\sum_{i=1}^M \hat{r}_i \rho_i\right)^2}{2M\mathcal{N}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^M \sqrt{\tilde{\gamma}_i} \rho_i\right)^2}{M} \\ &= \frac{\bar{\gamma}_{max}}{M} \left(\sum_{i=1}^M \sqrt{\tilde{\gamma}_i} \rho_i\right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

onde  $\tilde{\gamma}_i = E(\gamma_i) = \hat{r}_i^2/2\mathcal{N}$  é a RSR média do  $i$ -ésimo ramo,  $\bar{\gamma}_{max}$  é a maior RSR média dentre todos os ramos e  $\tilde{\gamma}_i \triangleq \bar{\gamma}_i/\bar{\gamma}_{max}$ . O formato de (10) é conveniente para avaliar o ganho CGI, em RSR média, relativo ao não-uso de diversidade (NUD) mais otimista, associado ao ramo de máxima potência média. Tal ganho depende das razões entre a potência média dos demais ramos e a máxima potência média.

### IV. RELAÇÃO SINAL-RUÍDO MÉDIA

Um importante e representativo critério de performance no estudo dos métodos de diversidade é a RSR média na saída do combinador,  $\bar{\gamma} = E(\gamma)$ . A partir de (10), tem-se para a CGI que

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= E\left(\frac{\bar{\gamma}_{max}}{M} \left(\sum_{i=1}^M \sqrt{\tilde{\gamma}_i} \rho_i\right)^2\right) \\ &= \frac{\bar{\gamma}_{max}}{M} \left\{ E\left(\sum_{i=1}^M \tilde{\gamma}_i \rho_i^2\right) + E\left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^M \sqrt{\tilde{\gamma}_i \tilde{\gamma}_j} \rho_i \rho_j\right) \right\} \\ &= \frac{\bar{\gamma}_{max}}{M} \left\{ \sum_{i=1}^M \tilde{\gamma}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^M \sqrt{\tilde{\gamma}_i \tilde{\gamma}_j} E(\rho_i) E(\rho_j) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

Para desvanecimentos Nakagami- $m$  e Rice, os momentos  $E(\rho_i)$  são dados por (3) e (7) e satisfazem respectivamente  $\sqrt{2/\pi} \leq E(\rho_i) \leq 1$  e  $\sqrt{\pi}/2 \leq E(\rho_i) \leq 1$ , para os diversos graus de desvanecimento ( $m_i$  ou  $k_i$ ) cresce. Daí o aumento invariável do ganho CGI com a redução da severidade dos canais de diversidade. Para ambientes Nakagami- $m$  e Rice iid, (11) simplifica-se, respectivamente, para

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_i \left\{ 1 + (M-1) \frac{\Gamma^2(m_i + 1/2)}{m_i \Gamma^2(m_i)} \right\} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \bar{\gamma}_i \left\{ 1 + (M-1) \frac{\pi}{4(1+k_i)} e^{-k_i} \right. \\ &\quad \times \left. [(1+k_i)I_0(k_i/2) + k_i I_1(k_i/2)]^2 \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

Vale aqui ressaltar que (11) engloba modelos quaisquer e graus distintos de desvanecimento para os ramos de diversidade, desde que se conheçam os momentos de primeira ordem  $E(\rho_i)$  das envoltórias.

A partir de (11), pode-se determinar os limitantes de performance para a RSR média CGI. No melhor caso, os sinais são balanceados ( $\bar{\gamma}_i = 1$ ) e determinísticos ( $m_i \rightarrow \infty$  ou  $k_i \rightarrow \infty$ ),  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ . Assim, (11) torna-se

$$\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_{\max}} = M \quad (14)$$

ou seja, a CGI se comporta como a CRM, esquema ótimo de combinação. No pior caso, apenas um ramo de diversidade possui sinal não-nulo, sendo  $\bar{\gamma}_i = 0$  para os demais ramos. Resulta, então, que

$$\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_{\max}} = \frac{1}{M} \quad (15)$$

ou seja, a CGI decai com o aumento do número de ramos. Note que estes limitantes dependem exclusivamente do número de ramos considerado. Portanto, na prática, o ganho CGI em RSR média varia entre  $1/M$  e  $M$  ( $-10 \log M$  dB e  $10 \log M$  dB). Excedendo 1, há ganho real de diversidade; caso contrário, há perda de potência média, ou seja, a performance é pior que aquela obtida com o não-uso de diversidade, sendo, assim, prejudicial o uso da CGI.

## V. RESULTADOS

Esta seção apresenta curvas de RSR média CGI, (11), para alguns cenários representativos com canais do tipo Nakagami- $m$ . Potências e parâmetros de desvanecimento arbitrários são devidamente explorados. As curvas para o caso Rice seguem a mesma tendência daquelas apresentadas para Nakagami- $m$ , e não serão tratadas aqui. A Figura 1 ilustra, para  $1 \leq M \leq 10$  e  $m_i \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, \dots, \infty\}$  (caso iid), o ganho de RSR média em relação ao ramo de maior potência média. Observe que a melhora na condição de desvanecimento eleva o ganho, característica dos métodos de adição de sinais de diversidade (CGI e CRM). Note ainda que tal elevação satura rapidamente com o aumento de  $m_i$ . No limite, para  $m_i \rightarrow \infty$ , a CGI atinge a performance da CRM (combinação ótima), ou seja,  $\bar{\gamma}/\bar{\gamma}_{\max} = M$ .

A condição de desvanecimentos diversos é ilustrada na Figura 2. Alterando-se o desvanecimento de todos os ramos (com exceção do primeiro) de  $m_i = 1$  para  $m_i = 1/2$  (b) ou para  $m_i \rightarrow \infty$  (d), “atrai-se” a curva iid  $m_i = 1$  (c) rumo às curvas iid associadas aos valores alterados de desvanecimento, (a) e (e), respectivamente. Esta “atração” cresce com o aumento do número de ramos, uma vez que a quantidade de “atratores” torna-se também maior. Note que a curva (b) representa a mais pessimista das alterações e a (d), a mais otimista delas. Quaisquer outras alterações mapeiam-se entre elas.

A Figura 3 reflete a influência do desbalanceamento de potências sobre o ganho de RSR média, para  $m_i = 1$  e fator de decaimento de potência  $\lambda \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots, \infty\}$ . Adota-se um perfil de decaimento exponencial de potência, com  $\bar{\gamma}_i = \bar{\gamma}_1 \exp(-\lambda(i-1))$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ . Assim, e sem perda de generalidade, o ramo 1 é o de maior potência média, ou seja,

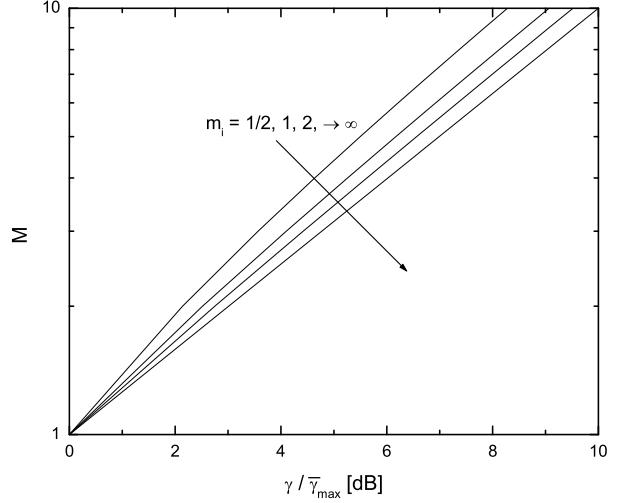


Fig. 1.  $M$  versus RSR média — caso iid.

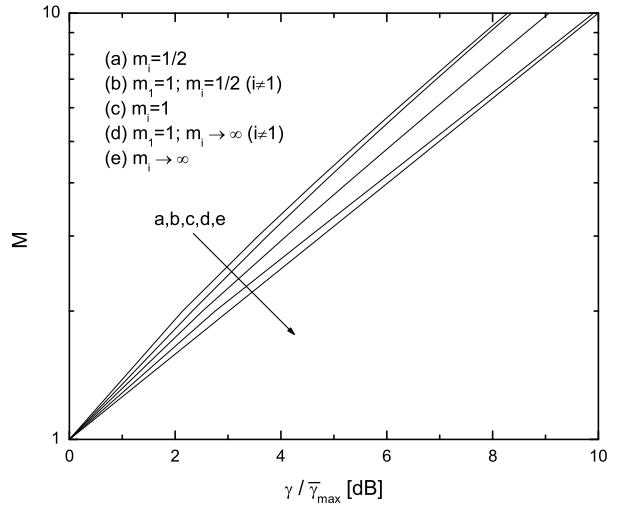


Fig. 2.  $M$  versus RSR média — desvanecimentos diversos.

$\bar{\gamma}_{\max} = \bar{\gamma}_1$ . Os cenários  $\lambda = 0$  e  $\lambda \rightarrow \infty$  correspondem, portanto, às condições iid e de pior caso, respectivamente. Observe que quanto maior o  $\lambda$ , maior o desbalanceamento de potência. O desbalanceamento degrada de modo bastante significativo a RSR média CGI (com muito mais contundência do que as diferenças de desvanecimento), a ponto de torná-la inferior à do não-uso de diversidade e de fazê-la decair com o aumento do número de ramos. Na figura, por exemplo, isto ocorre para  $\lambda = 1$  e  $M > 4$ . O limitante inferior de performance representa uma perda de  $10 \log M$  dB em relação ao NUD.

A diferença de significância entre as potências médias e os parâmetros de desvanecimento dos ramos na determinação da RSR média pode ser abstraída de (11). Os  $\bar{\gamma}_i$  aparecem em ambos os somatórios e variam de 0 a 1. Os  $m_i$  e  $k_i$ , por sua vez, determinam as médias  $E(\rho_i)$  que ponderam apenas um dos somatórios. Além disso, a faixa de variação destas médias é bem mais limitada:  $\sqrt{2/\pi} \leq E(\rho_i) \leq 1$ , para Nakagami- $m$ , e  $\sqrt{\pi}/2 \leq E(\rho_i) \leq 1$ , para Rice.

O efeito conjunto de potências e desvanecimentos diversos

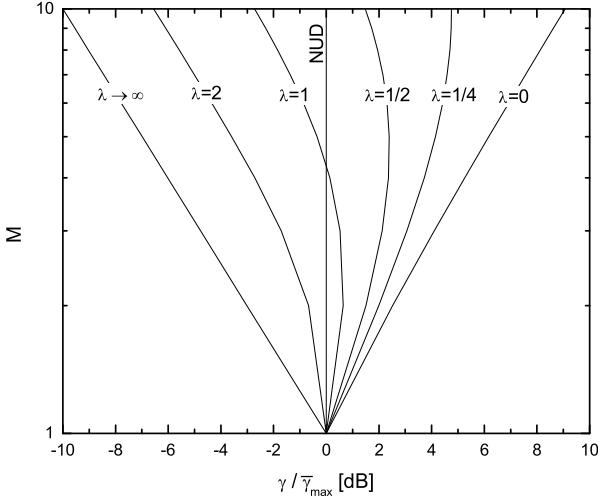


Fig. 3.  $M$  versus RSR média — potências médias diversas ( $m_i = 1$ ).

é contemplado na Figura 4. Veja que, partindo-se de uma condição com apenas desbalanceamento de potência ( $m_i = 1$  e  $\lambda = 1/2$ ), a melhora ou piora resultante de alterações otimistas (aumento dos  $m_i$ ) ou pessimistas (redução dos  $m_i$ ) nos parâmetros de desvanecimento não é muito significativa diante da degradação imposta pelo desbalanceamento de potência (sozinho) sobre a performance iid.

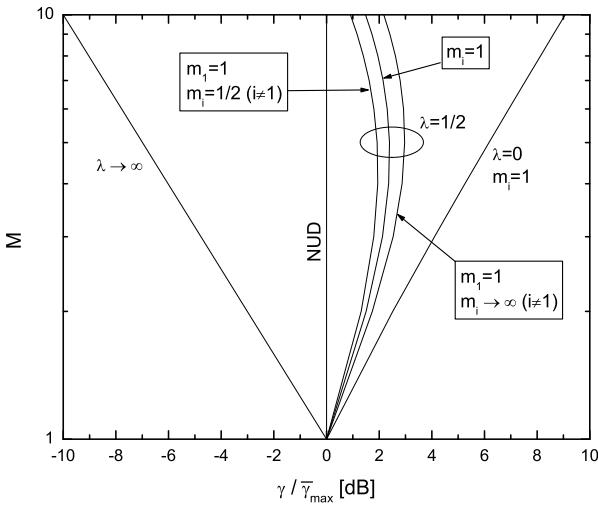


Fig. 4.  $M$  versus RSR média — desvanecimentos e potências médias diversos.

## VI. UMA PROPOSTA DE COMBINAÇÃO DINÂMICA

Como observado, a performance CGI nem sempre melhora com o aumento do número de sinais de diversidade. Isto é ilustrado na Figura 3. Em havendo estimadores adequados para os momentos de primeira e segunda ordens dos ramos de diversidade, (11) constitui a base para um método dinâmico de combinação por ganho igual que considere tais estimativas. Dispondo de  $M$  canais de diversidade, o novo método decide, adaptativamente, pelo uso de um subconjunto deles que maximize a RSR média. Uma primeira proposta para a regra de

decisão seria combinar os  $L$  ramos de maior potência média, tal que

$$L = \arg \left\{ \max_{1 \leq l \leq M} \left[ \sum_{i=1}^l \tilde{\gamma}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \sqrt{\tilde{\gamma}_i \tilde{\gamma}_j} E(\rho_i) E(\rho_j) \right] \right\} \quad (16)$$

considerada a ordenação  $\tilde{\gamma}_1 = 1 \geq \tilde{\gamma}_2 \geq \tilde{\gamma}_3 \geq \dots \geq \tilde{\gamma}_M$ . De fato, a maximização deveria varrer todas as  $2^M - 1$  possíveis combinações dos ramos de diversidade em busca do máximo global, e não apenas as  $M$  combinações envolvendo os  $l$  ramos de maior potência média. Entretanto, dada a preponderância das potências médias dos ramos na determinação da performance final da CGI, muito provavelmente este acréscimo de possibilidades não altera a solução (16). Tais observações, é claro, permanecem como hipótese, a ser investigada com maior profundidade em trabalhos futuros.

## VII. CONCLUSÕES

Para canais de diversidade independentes com potências médias e padrões (grau e modelo) de desvanecimento arbitrários, o comportamento da técnica CGI apresenta desvios significativos em relação ao caso iid, previstos em (11). Embora a redução da severidade dos desvanecimentos favoreça invariavelmente a técnica, o mesmo não vale para o aumento do número de ramos. Havendo desbalanceamento de potência, a RSR média CGI pode tornar-se inferior à do não-uso de diversidade e piorar com o aumento de  $M$ . Isto motiva a proposta de um novo método de combinação por ganho igual, dinâmico, que utilize estimativas dos canais (primeiro e segundo momentos) para combinar um subconjunto destes em busca da máxima RSR média. Apresentou-se um possível critério de decisão, (16), cuja eficiência deve ser objeto de futuras investigações.

## REFERÊNCIAS

- [1] A. Annamalai, C. Tellambura, and V. K. Bhargava. Unified Analysis of Equal-Gain Diversity on Rician and Nakagami Fading Channels. In *Proc. 1999 IEEE WCNC*, pages 10–14, 1999.
- [2] A. Annamalai, C. Tellambura, and V. K. Bhargava. Equal-Gain Diversity Receiver Performance in Wireless Channels. *IEEE Trans. on Commun.*, 48(10):1732–1745, October 2000.
- [3] A. Annamalai, Jing Su, and C. Tellambura. Exact Analysis of Equal-Gain Diversity Systems over Fading Channels. In *Proc. IEEE VTC (Spring)*, pages 1031–1034, May 2000.
- [4] Cláudio R. C. M. da Silva and Michel D. Yacoub. Diversity Combining Analysis in a Nakagami Environment. In *Proc. of the SBMO/IEEE Int. Microwave and Optoelectronic Conf.*, pages 663–666, November 1999.
- [5] Cláudio R. C. M. da Silva e Michel D. Yacoub. A Generalized Solution for Diversity Combining Techniques in Fading Channels. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 50(1), January 2002.
- [6] Cláudio R. C. M. da Silva. Solução Generalizada para Técnicas de Diversidade-Combinação. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas (FEEC/UNICAMP), 2001.
- [7] M. Nakagami. The m-distribution - A general formula of intensity distribution of rapid fading. In W. C. Hoffman, editor, *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*. Pergamon, New York, 1960.
- [8] S. O. Rice. Statistical Properties of a Sine Wave Plus Random Noise. *Bell Syst. Tech. J.*, 27:109–157, 1948.