

# Estatísticas de Segunda Ordem da Combinação por Ganho Igual de Canais Arbitrários

José Cândido S. Santos Filho e Michel D. Yacoub

**Resumo**—Este artigo apresenta uma formulação geral e unificada para a taxa de cruzamento de nível e a duração média de desvanecimento da combinação por ganho igual de  $M$  canais independentes com potências médias e parâmetros de desvanecimento arbitrários. Os desvanecimentos podem diferir em grau e modelo (Nakagami- $m$  e Rice). Verifica-se que o desbalanceamento de potência degrada consideravelmente a performance do combinador, a ponto de torná-la inferior à do não-uso de diversidade. A severidade dos canais afeta a performance em menor alcance. Um limitante inferior de desempenho é apresentado em forma fechada.

**Palavras-Chave**—Canais Arbitrários de Desvanecimento, Combinação por Ganho Igual, Taxa de Cruzamento de Nível, Duração Média de Desvanecimento.

**Abstract**—This paper presents a unified and general formulation for the level crossing rate and average fade duration in a equal-gain combining scheme in which the channels are assumed to be independent but with arbitrary mean powers and fading parameters. The fading may differ in degree and in model (Nakagami- $m$  and Rice). It is observed that the power imbalance has a considerable negative impact in the combiner's performance. In some cases, the system is led to perform worse than the non-diversity scheme. It is also verified that the performance deteriorates as the fading severity increases, but in a smaller degree. Closed-form formulas for the lower bound for these statistics are presented.

**Keywords**—Arbitrary Fading Channels, Equal-Gain Combining, Level Crossing Rate, Average Fade Duration.

## I. INTRODUÇÃO

A combinação por ganho igual (CGI) é uma técnica atrativa de combate ao desvanecimento rápido da envoltória rádio-móvel, por aliar simplicidade de implementação a eficiência. Para canais independentes e identicamente distribuídos (iid), sua performance assemelha-se à da combinação por razão máxima (CRM), solução ótima, melhorando à medida que a severidade do desvanecimento se abrande e o número  $M$  de canais de diversidade aumenta.

Em sistemas de transmissão digital, a propagação multipercurso provoca blocos de erro quando o sinal cai abaixo de um certo nível. O uso de técnicas de combinação de diversidade permite reduzir as ocorrências de desvanecimentos, elevando o nível médio do sinal rádio-móvel. Deste modo, o sinal resultante cruza baixos níveis a taxas menores e altos níveis a taxas maiores, à medida que o número de ramos de diversidade aumenta. Estimar a taxa de ocorrência e a duração média de tais desvanecimentos é, portanto, de grande interesse prático.

A taxa de cruzamento de nível (TCN) e a duração média de desvanecimento (DMD), denominadas estatísticas de segunda

ordem, dependem diretamente da caracterização estatística da saída do combinador CGI [1]. Esta tarefa, entretanto, é bastante complexa. Desde a época de Lord Rayleigh (há mais de 80 anos) procura-se por uma solução fechada exata para a função densidade de probabilidade (PDF) da soma de  $M$  variáveis aleatórias (VAs) desvanecidas, mas ainda não se obteve êxito nem mesmo para a mais simples condição de desvanecimento (Rayleigh) para  $M > 2$ . Não há soluções fechadas exatas para os ambientes Rice e Nakagami- $m$  [2], com exceção do caso  $M = 2$  iid para este último modelo, resultado recém-publicado [3]. Utilizando uma abordagem geométrica introduzida em [4] para o cálculo da função distribuição de probabilidade (CDF) da soma de variáveis Rayleigh, [5], [6] formulam as estatísticas de segunda ordem da CGI para um número arbitrário de canais Nakagami- $m$  iid. Mais recentemente, [3] anunciou uma metodologia unificada que eliminaria a restrição iid em ambiente Nakagami- $m$ , mas formula apenas a TCN para um número arbitrário de canais; além disso, não analisa a expressão formulada num contexto geral, limitando-se ao caso  $M = 2$  iid, para o qual obtém expressões fechadas da TCN e da DMD em ambiente Nakagami- $m$ . Parte da formulação geral da TCN [3, eq. (34)] provavelmente contém erros tipográficos, reparados neste trabalho.

Na prática, os canais de diversidade são arbitrários, ou seja, apresentam potências médias e condições de desvanecimento quaisquer. Este trabalho generaliza os resultados de [5], [6] para canais arbitrários. Os desvanecimentos podem diferir em grau e modelo, incluindo-se os tipos Nakagami- $m$  e Rice. Não consta aos autores que uma formulação de tal generalidade exista na literatura.

## II. MODELOS DE DESVANECIMENTO

Em vista da aleatoriedade do conjunto de eventos envolvidos em sua propagação, o sinal rádio-móvel é comumente modelado de forma estatística. Nakagami- $m$  [7] e Rice [1] são modelos estatísticos consagrados para o desvanecimento rápido da envoltória do sinal rádio-móvel. Ambos incluem a distribuição Rayleigh (a mais simples condição de desvanecimento) como um caso particular. A seguir, as respectivas PDFs e CDFs são apresentadas.

### A. Nakagami- $m$

A distribuição de Nakagami- $m$  [7] descreve a variação rápida da envoltória do sinal rádio-móvel em um ambiente multipercurso onde as ondas espalhadas atingem o receptor em *clusters*. A PDF da envoltória Nakagami- $m$  normalizada

$\rho_i = r_i/\hat{r}_i$ , onde  $r_i$  é a envoltória do sinal e  $\hat{r}_i = \sqrt{E(r_i^2)}$  o seu valor rms (*root mean square*), é dada por

$$p(\rho_i) = \frac{2m_i^{m_i}}{\Gamma(m_i)} \rho_i^{2m_i-1} \exp(-m_i\rho_i^2) \quad (1)$$

sendo  $m_i = E^2(r_i^2)/\text{Var}(r_i^2)$  o parâmetro de Nakagami e  $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \exp(-x) dx$  a função Gama. Observe que  $E(\cdot)$  e  $\text{Var}(\cdot)$  são operadores de média e variância, respectivamente. Para  $m_i = 1$ , tem-se a condição Rayleigh. A CDF da envoltória Nakagami- $m$  normalizada é calculada como

$$P(\rho_i) = \frac{\Gamma(m_i, m_i\rho_i^2)}{\Gamma(m_i)} \quad (2)$$

onde  $\Gamma(a, b) = \int_0^b x^{a-1} \exp(-x) dx$  é a função Gama Incompleta.

### B. Rice

A distribuição de Rice [1] descreve a variação rápida da envoltória do sinal rádio-móvel em um ambiente multipercorso onde uma componente predominante (ou componente direta) se soma às ondas espalhadas uniformemente distribuídas em torno do receptor. A PDF da envoltória Rice normalizada  $\rho_i$  é dada por

$$p(\rho_i) = \frac{2(1+k_i)}{\exp(k_i)} \rho_i \exp(-(1+k_i)\rho_i^2) I_0\left(2\sqrt{k_i(1+k_i)}\rho_i\right) \quad (3)$$

sendo  $k_i$  o parâmetro de Rice, obtido como a razão entre a potência da componente direta e a potência total das ondas espalhadas, e  $I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(z \cos(\theta)) d\theta$  a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem zero. Para  $k_i = 0$ , tem-se a condição Rayleigh. A CDF da envoltória Rice normalizada é calculada como

$$P(\rho_i) = 1 - Q\left(\sqrt{2k_i}, \sqrt{2(1+k_i)}\rho_i\right) \quad (4)$$

onde  $Q(a, b) = \int_b^\infty x \exp\left(-\frac{x^2+a^2}{2}\right) I_0(ax) dx$  é a função Marcum Q.

### III. ESTATÍSTICA DA DERIVADA TEMPORAL DA ENVOLTÓRIA

Em [1] e [8], para desvanecimentos Rice e Nakagami- $m$ , respectivamente, prova-se que a derivada temporal  $\dot{r}_i$  da envoltória  $r_i$  é uma variável Gaussiana de média nula. Além disso, mostra-se que  $r_i$  e  $\dot{r}_i$  são variáveis independentes, ou seja, a densidade conjunta  $p(r_i, \dot{r}_i)$  de  $r_i$  e  $\dot{r}_i$  é dada pelo produto das densidades marginais:  $p(r_i, \dot{r}_i) = p(r_i)p(\dot{r}_i)$ . A densidade  $p(\dot{\rho}_i)$  da derivada temporal  $\dot{\rho}_i$  da envoltória normalizada  $\rho_i$  é dada por

$$p(\dot{\rho}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\rho}_i}{\hat{\sigma}_i}\right)^2\right) \quad (5)$$

onde o desvio padrão  $\hat{\sigma}_i$  vale

$$\hat{\sigma}_i = \zeta_i \pi f_m \quad (6)$$

sendo  $f_m$  o deslocamento Doppler máximo em Hz e

$$\zeta_i = \begin{cases} 1/\sqrt{m_i} & , \text{ Nakagami-}m \\ 1/\sqrt{k_i+1} & , \text{ Rice} \end{cases} \quad (7)$$

Observe que  $\zeta_i$  é função apenas do parâmetro de desvanecimento da envoltória. Para desvanecimento Rayleigh ( $m_i = 1$  ou  $k_i = 0$ ), obtém-se  $\zeta_i = 1$ .

### IV. COMBINAÇÃO POR GANHO IGUAL

O sistema de combinação por ganho igual sob estudo apresenta um número genérico  $M$  de ramos de diversidade independentes, desbalanceados em potência e com graus de desvanecimento arbitrários. Os ruídos nos ramos são independentes, de média nula e igual potência média  $\mathcal{N}$ .

É conveniente desmembrar a envoltória  $r_i$  do  $i$ -ésimo ramo ( $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ ) em duas componentes,

$$r_i = \hat{r}_i \rho_i \quad (8)$$

abstraindo a especificação determinística de potência média  $E(r_i^2/2) = \hat{r}_i^2/2$  da figura estocástica de desvanecimento embutida na distribuição da envoltória normalizada  $\rho_i$  do ramo.

A combinação por ganho igual efetua a soma coerente dos  $M$  sinais de diversidade. Neste processo, os ruídos dos ramos se somam incoerentemente, de modo que a potência média do ruído na saída do combinador vale  $M\mathcal{N}$ . Normalizando-se a soma dos ramos por  $\sqrt{M}$ , tem-se então, na saída do combinador, um ruído de potência  $\mathcal{N}$  igual à do ruído em cada ramo. Tal condição fornece uma referência para avaliação da performance do método. Conseqüentemente, e com uso de (8), a envoltória  $r$  na saída do combinador resulta em

$$r = \frac{\sum_{i=1}^M r_i}{\sqrt{M}} = \frac{\sum_{i=1}^M \hat{r}_i \rho_i}{\sqrt{M}} = \frac{\hat{r}_{max}}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M \tilde{r}_i \rho_i \quad (9)$$

sendo  $\hat{r}_{max}$  o maior valor rms dentre todos os ramos e  $\tilde{r}_i \triangleq \hat{r}_i/\hat{r}_{max}$  o valor rms do  $i$ -ésimo ramo normalizado com relação a  $\hat{r}_{max}$ . O formato de (9) é conveniente para avaliar o desempenho CGI com relação ao não-uso de diversidade (NUD) mais otimista, associado ao ramo de valor rms máximo. Tal desempenho depende das razões entre os valores rms dos demais ramos e o máximo valor rms.

### V. ESTATÍSTICA DA ENVOLTÓRIA CGI

A hipótese de independência estatística implica que a densidade de probabilidade conjunta  $p(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_M)$  das envoltórias normalizadas  $\rho_i$  dos  $M$  ramos de diversidade é dada pelo produto das densidades individuais  $p(\rho_i)$ :

$$p(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_M) = \prod_{i=1}^M p(\rho_i) \quad (10)$$

Geometricamente, a CDF da soma de variáveis aleatórias não-negativas — como é o caso de envoltórias desvanecidas — pode ser calculada pela integração da densidade conjunta das variáveis no volume limitado pelos hiperplanos definidos pela equação de soma e pelos eixos de cada variável [4], [5]. Tal estratégia, aplicada à soma CGI (9), fornece a distribuição  $P(r)$  da envoltória  $r$  na saída do combinador como em (11). Derivando-se (11) em relação a  $r$ , tem-se a PDF da envoltória CGI como em (12). ((11) e (12) encontram-se no topo da próxima página.) Em (11) e (12), a densidade de

$$P(r) = \frac{1}{\prod_{i=1}^M \tilde{r}_i} \times \int_0^{\frac{r}{\hat{r}_{max}} \sqrt{M}} \int_0^{\frac{r}{\hat{r}_{max}} \sqrt{M} - r_M} \cdots \int_0^{\frac{r}{\hat{r}_{max}} \sqrt{M} - \sum_{i=3}^M r_i} \int_0^{\frac{r}{\hat{r}_{max}} \sqrt{M} - \sum_{i=2}^M r_i} p\left(\frac{r_1}{\tilde{r}_1}, \frac{r_2}{\tilde{r}_2}, \dots, \frac{r_M}{\tilde{r}_M}\right) dr_1 dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M \quad (11)$$

$$p(r) = \frac{\sqrt{M}}{\hat{r}_{max} \prod_{i=1}^M \tilde{r}_i} \times \int_0^{\frac{r}{\hat{r}_{max}} \sqrt{M}} \int_0^{\frac{r}{\hat{r}_{max}} \sqrt{M} - r_M} \cdots \int_0^{\frac{r}{\hat{r}_{max}} \sqrt{M} - \sum_{i=3}^M r_i} p\left(\frac{\frac{r}{\hat{r}_{max}} \sqrt{M} - \sum_{i=2}^M r_i}{\tilde{r}_1}, \frac{r_2}{\tilde{r}_2}, \dots, \frac{r_M}{\tilde{r}_M}\right) dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M \quad (12)$$

probabilidade  $p(\cdot, \dots, \cdot)$  corresponde à PDF conjunta das envoltórias normalizadas, expressa em (10). Para o caso iid, (11) e (12) se reduzem para (20) e (22) de [6], respectivamente.

## VI. ESTATÍSTICAS DE SEGUNDA ORDEM

A taxa de cruzamento de nível  $N(r)$  é definida como a taxa temporal com que a envoltória cruza um certo valor  $r$  numa mesma direção (positiva, por exemplo). Estima-se  $N(r)$  como [1]

$$N(r) = \int_0^\infty \dot{r} p(r, \dot{r}) d\dot{r} \quad (13)$$

onde  $p(r, \dot{r})$  é a densidade conjunta da envoltória  $r$  e sua derivada temporal  $\dot{r}$ .

Derivando-se (9), tem-se  $\dot{r}$  na saída do combinador CGI:

$$\dot{r} = \frac{\hat{r}_{max}}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M \tilde{r}_i \dot{\rho}_i \quad (14)$$

Em [6], demonstra-se que  $\rho_i$  e  $\dot{\rho}_j$  ( $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$ ) são VAs independentes (observe que isto inclui o caso  $i = j$  apresentado na seção III). Sendo  $r$  e  $\dot{r}$  combinações lineares dos  $\rho_i$  e dos  $\dot{\rho}_i$ , respectivamente, também apresentam independência estatística, tal que

$$p(r, \dot{r}) = p(r)p(\dot{r}) \quad (15)$$

Dado que  $\rho_i$  e  $\rho_j$  são independentes por hipótese,  $\dot{\rho}_i$  e  $\dot{\rho}_j$  também o são, uma vez que a derivada é um operador linear. Assim,  $\dot{r}$  constitui uma soma ponderada de Gaussianas independentes de médias nulas, resultando numa gaussiana de média nula com variância igual à soma das variâncias de cada termo. Usando-se (6) em (14), o desvio padrão  $\hat{\sigma}$  de  $\dot{r}$  pode ser calculado como

$$\hat{\sigma} = \pi f_m \hat{r}_{max} \left( \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \tilde{r}_i^2 \zeta_i^2 \right)^{1/2} \quad (16)$$

Para o caso iid,  $\hat{\sigma} = \hat{r}_i \hat{\sigma}_i$ , ou seja, a densidade da derivada da envoltória CGI é idêntica à da derivada da envoltória de qualquer dos ramos de diversidade. Tal observação coincide com os resultados de [5].

O uso de (12), (15) e (16) em (13) fornece a expressão geral para a taxa de cruzamento de nível da CGI com  $M$

canais arbitrários (Nakagami- $m$  ou Rice):

$$\begin{aligned} N(r) &= p(r) \int_0^\infty \dot{r} p(\dot{r}) d\dot{r} \\ &= p(r) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \quad (17)$$

$$= f_m \hat{r}_{max} \left( \frac{\pi}{2M} \sum_{i=1}^M \tilde{r}_i^2 \zeta_i^2 \right)^{1/2} p(r) \quad (18)$$

onde  $p(r)$  é dado por (12). A relação (17) é de suma importância. Expressa  $N(r)$  como a PDF da envoltória CGI ponderada pelo desvio padrão de sua derivada temporal.

A duração média de desvanecimento  $T(r)$  é definida como o tempo médio que a envoltória permanece abaixo de um certo valor  $r$ , sendo obtida como [1]

$$T(r) = \frac{P(r)}{N(r)} \quad (19)$$

Substituindo-se (11) e (18) em (19), obtém-se a formulação geral da duração média de desvanecimento da CGI com  $M$  canais arbitrários (Nakagami- $m$  ou Rice). Para o caso iid, as expressões obtidas para TCN e DMD se reduzem para (23) e (24) de [6], respectivamente.

### A. Casos Particulares

A seguir, reproduzem-se expressões fechadas para TCN e DMD antes publicadas, dedutíveis a partir de (18) e (19). Na ausência de diversidade ( $M = 1$ ), obtém-se as conhecidas estatísticas de segunda ordem de sinais Nakagami- $m$  [6] e Rice [1], respectivamente:

$$N(r_i) = f_m \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(m_i)} (m_i \rho_i^2)^{m_i - \frac{1}{2}} \exp(-m_i \rho_i^2) \quad (20)$$

$$T(r_i) = \frac{1}{f_m} \frac{\Gamma(m_i, m_i \rho_i^2)}{\sqrt{2\pi} (m_i \rho_i^2)^{m_i - \frac{1}{2}}} \exp(m_i \rho_i^2) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} N(r_i) &= f_m \frac{\sqrt{2\pi(1+k_i)}}{\exp(k_i)} \rho_i \exp(-(1+k_i)\rho_i^2) \\ &\quad \times I_0\left(2\sqrt{k_i(1+k_i)}\rho_i\right) \end{aligned} \quad (22)$$

$$T(r_i) = \frac{1}{f_m} \frac{\frac{\exp(k_i)}{\sqrt{2\pi(1+k_i)}} \left[ 1 - Q\left(\sqrt{2k_i}, \sqrt{2(1+k_i)}\rho_i\right) \right]}{\rho_i \exp\left(-\frac{1}{2}(1+k_i)\rho_i^2\right) I_0\left(\sqrt{2k_i(1+k_i)}\rho_i\right)} \quad (23)$$

onde  $\rho_i = r_i/\hat{r}_i$ , como definido anteriormente. Para ambiente Rayleigh iid com  $M = 2$ , mostra-se que [6]

$$N(r) = f_m \sqrt{2\pi} e^{-\rho^2} \left[ \rho e^{-\rho^2} + (2\rho^2 - 1) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\rho) \right] \quad (24)$$

$$T(r) = \frac{1}{f_m} \frac{1 - e^{-2\rho^2} - \sqrt{\pi} \rho e^{-\rho^2} \operatorname{erf}(\rho)}{\sqrt{2\pi} e^{-\rho^2} \left[ \rho e^{-\rho^2} + (2\rho^2 - 1) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\rho) \right]} \quad (25)$$

onde  $\rho = r/\hat{r}_i$  e  $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$  é a função Erro. Recentemente, [3, apêndice B] deduziu soluções fechadas para o caso Nakagami- $m$  iid com  $M = 2$ , obtendo:

$$N(r) = f_m \frac{\sqrt{2\pi} B(2m_i, \frac{1}{2})}{\Gamma^2(m_i) 2^{2m_i-2}} (m_i \rho^2)^{2m_i-\frac{1}{2}} e^{-2m_i \rho^2} \times {}_1F_1\left(2m_i; 2m_i + \frac{1}{2}; m_i \rho^2\right) \quad (26)$$

$$T(r) = \frac{1}{f_m} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2m_i+n)}{\Gamma(2m_i+n+\frac{1}{2})} \frac{1}{2^n n!} \Gamma(2m_i+n, 2m_i \rho^2)}{2B(2m_i, \frac{1}{2}) (2m_i \rho^2)^{2m_i-\frac{1}{2}} e^{2m_i \rho^2}} \times \frac{1}{{}_1F_1(2m_i; 2m_i + \frac{1}{2}; m_i \rho^2)} \quad (27)$$

onde  $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$  é a função Beta e  ${}_1F_1(a; b; c) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a)_i c^i}{(b)_i i!}$  é a função hipergeométrica confluyente de primeiro tipo, sendo  $(a)_i = \Gamma(a+i)/\Gamma(a)$  o símbolo de Pochhammer. Ainda em [3], deduz-se a taxa de cruzamento de nível para CGI em ambiente Rayleigh com  $M = 2$  e desbalanceamento de potência entre os ramos. O resultado é

$$N(r) = f_m \frac{\sqrt{\pi} e^{-2\varrho_1^2}}{(1+\kappa)^{3/2}} \left[ 2\varrho_1 \left( 1 + \kappa e^{2(1-\frac{1}{\kappa})\varrho_1^2} \right) - \sqrt{\frac{\pi\kappa}{2(1+\kappa)}} (1+\kappa - 4\varrho_1^2) e^{\frac{2\kappa}{1+\kappa}\varrho_1^2} \right] \times \left( \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{2}{\kappa(1+\kappa)}}\varrho_1\right) + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{2\kappa}{1+\kappa}}\varrho_1\right) \right) \quad (28)$$

onde  $\varrho_1 = r/\hat{r}_1$  e  $\kappa = (\hat{r}_2/\hat{r}_1)^2$ . A partir de (11), mostra-se que, neste mesmo cenário [9]

$$P(r) = 1 - \frac{e^{-2\varrho_1^2}}{1+\kappa} \left[ 1 + \kappa e^{2(1-\frac{1}{\kappa})\varrho_1^2} - \sqrt{\frac{2\pi\kappa}{1+\kappa}} \varrho_1 e^{\frac{2\kappa}{1+\kappa}\varrho_1^2} \right] \times \left( \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{2}{\kappa(1+\kappa)}}\varrho_1\right) + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{2\kappa}{1+\kappa}}\varrho_1\right) \right) \quad (29)$$

Substituindo-se (28) e (29) em (19), tem-se diretamente a DMD.

## VII. LIMITANTE INFERIOR DA PERFORMANCE CGI

No mais pessimista dos cenários, apenas um ramo de diversidade possui sinal; nos outros, há ruído puro. Seja  $s$  o índice do único ramo com sinal. Fazendo-se  $\tilde{r}_i = 0$  ( $i \neq s$ ) em (9), obtém-se a envoltória CGI na condição de pior caso:

$$r = \frac{r_s}{\sqrt{M}} = \frac{\hat{r}_s}{\sqrt{M}} \rho_s \quad (30)$$

A relação (30) constitui um limitante inferior da performance CGI. O combinador atua, então, como um atenuador, reduzindo o valor rms da envoltória de um fator  $\sqrt{M}$ . Numa interpretação alternativa, o ruído (soma incoerente dos ruídos dos ramos) se eleva, em potência, de um fator  $M$ . Há, portanto, perda de desempenho com relação ao NUD.

Conseqüentemente, a envoltória CGI em pior caso cruza um dado nível  $r$  na mesma taxa com que a única envoltória de entrada cruza  $\sqrt{M}r$ . Ou seja,

$$N(r) = N(r_s = \sqrt{M}r) \quad (31)$$

onde  $N(r_s)$  é a taxa de cruzamento de nível de um sinal  $r_s$  Nakagami- $m$  ou Rice, dada por (20) ou (22). Analogamente, e observado que  $P(r) = P(r_s = \sqrt{M}r)$ ,

$$T(r) = T(r_s = \sqrt{M}r) \quad (32)$$

com  $T(r_s)$  dada por (21) ou (23).

## VIII. RESULTADOS

A partir de (18) e (19), esta seção apresenta e analisa algumas curvas das estatísticas de segunda ordem da CGI para cenários representativos com canais do tipo Nakagami- $m$ . Os efeitos de potências e parâmetros de desvanecimento arbitrários são devidamente explorados. As curvas para o caso Rice seguem a mesma tendência daquelas apresentadas para Nakagami- $m$ , e não serão tratadas aqui.

Constata-se, na Figura 1, para  $M \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e cenário iid, que o aumento da ordem de diversidade faz o sinal cruzar baixos e altos níveis menos e mais freqüentemente, nesta ordem, o que significa ganho em nível médio do sinal. É este o comportamento esperado com uso de diversidade. Interessante, e pouco mencionado, é que o grau de desvanecimento tem efeitos diversos para baixos e altos níveis de sinal. A redução da severidade do canal diminui a taxa de cruzamento para baixos níveis, mas também o faz para altos níveis. O primeiro efeito é positivo, o segundo, negativo. O motivo deste comportamento é que sinais mais severamente desvanecidos e, portanto, mais espalhados em torno do valor rms, têm maior probabilidade de atingir valores altos, elevando a taxa de cruzamento nesta região.

As demais figuras para taxa de cruzamento de nível consideram três ramos de diversidade. Na condição de desvanecimentos diversos, Figura 2, cada ramo “atrai” a curva de performance rumo à performance iid referente ao seu parâmetro de desvanecimento. Vale lembrar que a alteração do nível de desvanecimento de um ou mais ramos têm efeitos contrários sobre as regiões de baixos e altos níveis de sinal, como explicado no parágrafo anterior.

O desbalanceamento de potências médias entre os ramos de diversidade prejudica significativamente a taxa de cruzamento de nível da CGI, aumentando cruzamentos em baixos níveis e reduzindo-os em altos níveis. Observe, na Figura 3, que o potencial de degradação é muito superior ao dos desvanecimentos diversos. Adota-se um perfil de decaimento exponencial de potência, com  $\tilde{r}_i = \exp(-2\lambda(i - 1))$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ . Assim, e sem perda de generalidade, o ramo 1 é o de maior valor rms, ou seja,  $\hat{r}_{max} = \hat{r}_1$ . Os cenários  $\lambda = 0$  e  $\lambda \rightarrow \infty$  correspondem, portanto, às condições iid e de pior caso, respectivamente. Observe que quanto maior o  $\lambda$ , maior o desbalanceamento de potência. A degradação imposta pelo desbalanceamento evolui a ponto de tornar o desempenho CGI inferior ao do NUD. Verifica-se que a região de altos níveis de sinal é a que primeiro manifesta tal ocorrência à medida que  $\lambda$  aumenta.

A Figura 4 ilustra a ação conjunta dos parâmetros discutidos, sobre a taxa de cruzamento de nível da CGI. As diferenças entre os parâmetros de desvanecimentos dos ramos reforça (ou atenua) a degradação imposta pelo desbalanceamento de potência, com efeitos opostos sobre as regiões de baixos e altos níveis de sinal. Sobretudo na região de altos níveis, este reforço (ou atenuação) é modesto diante da ação preponderante do desbalanceamento de potência.

Espera-se, com o uso de diversidade, reduzir o tempo médio que o sinal radio-móvel permanece abaixo de um dado nível, ou seja, a duração média de desvanecimento. A Figura 5 revela, para o caso iid, que tal redução é acentuada pelo aumento do número de ramos, como esperado. Verifica-se, assim como ocorre para a taxa de cruzamento de nível, a ação dual da severidade do desvanecimento: reduzi-la melhora a performance para baixos níveis de sinal mas a degrada para níveis elevados. As demais figuras (6, 7 e 8), ilustrando os casos em que não há uniformidade nos parâmetros de desvanecimento e nas potências médias dos ramos, também revelam comportamentos análogos aos obtidos para a taxa de cruzamento de nível. Aqui também se aplicam as discussões feitas para este critério.

IX. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma formulação geral e unificada para a taxa de cruzamento de nível e para a duração média de desvanecimento da CGI com canais de diversidade independentes, de potências médias quaisquer e padrões (grau e modelo) arbitrários de desvanecimento. Incluem-se os modelos Nakagami- $m$  e Rice. A partir da formulação geral analítica, a análise gráfica de casos representativos indicou que o desbalanceamento de potência degrada o desempenho da CGI invariavelmente e de forma preponderante, podendo mesmo torná-lo inferior ao do não-uso de diversidade. Em menor alcance, a elevação na severidade do desvanecimento dos ramos deteriora (melhora) a performance para baixos (altos) níveis de sinal.

REFERÊNCIAS

[1] S. O. Rice. Statistical Properties of a Sine Wave Plus Random Noise. *Bell Syst. Tech. J.*, 27:109–157, 1948.

[2] A. Annamalai, C. Tellambura, and V. K. Bhargava. Equal-Gain Diversity Receiver Performance in Wireless Channels. *IEEE Trans. on Commun.*, 48(10):1732–1745, October 2000.

[3] Cyril-Daniel Iskander and P. Takis Mathiopoulos. Analytical Level Crossing Rates and Average Fade Durations for Diversity Techniques in Nakagami Fading Channels. *IEEE Trans. Commun.*, 50(8):1301–1309, August 2002.

[4] D. G. Brennan. Linear Diversity Combining Techniques. *Proceedings of the IRE*, 47:1075–1102, June 1959.

[5] Cláudio Rafael Cunha Monteiro da Silva. Solução Generalizada para Técnicas de Diversidade-Combinação. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas (FEEC/UNICAMP), 2001.

[6] M. D. Yacoub, C. R. C. M. da Silva, and J. E. Vargas B. Second-Order Statistics for Diversity-Combining Techniques in Nakagami-Fading Channels. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 50(6):1464–1470, November 2001.

[7] M. Nakagami. The  $m$ -distribution - A general formula of intensity distribution of rapid fading. In W. C. Hoffman, editor, *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*. Pergamon, New York, 1960.

[8] M. D. Yacoub, J. E. Vargas B., and L. G. de R. Guedes. On Higher Order Statistics of the Nakagami- $m$  Distribution. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 48(3):790–794, May 1999.

[9] X. Qi, M.-S. Alouini, and Y.-C. Ko. Closed-form Analysis of Dual-Diversity Equal-Gain Combiners over Rayleigh Channels. In *Proc. IEEE VTC (Spring)*, pages 1559–1563, May 2002.

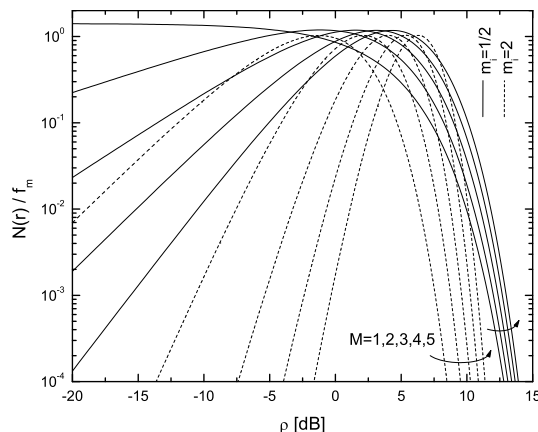


Fig. 1. Taxa de Cruzamento de Nível — caso iid.

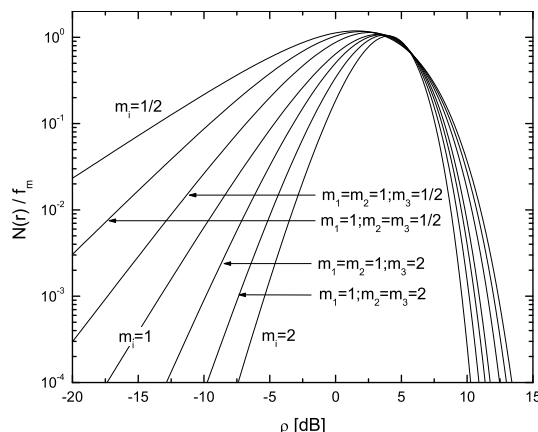


Fig. 2. Taxa de Cruzamento de Nível — desvanecimentos diversos ( $M = 3$ ).

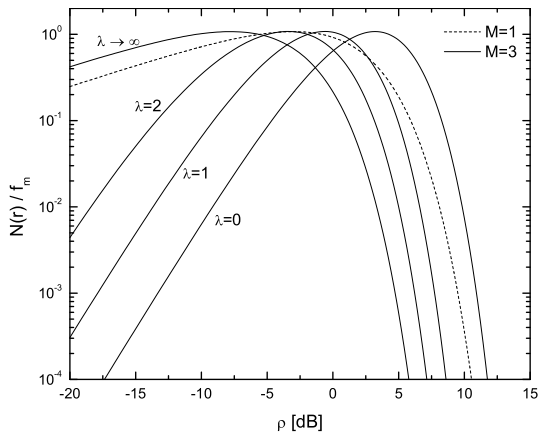


Fig. 3. Taxa de Cruzamento de Nível — potências médias diversas ( $m_i = 1$ ).

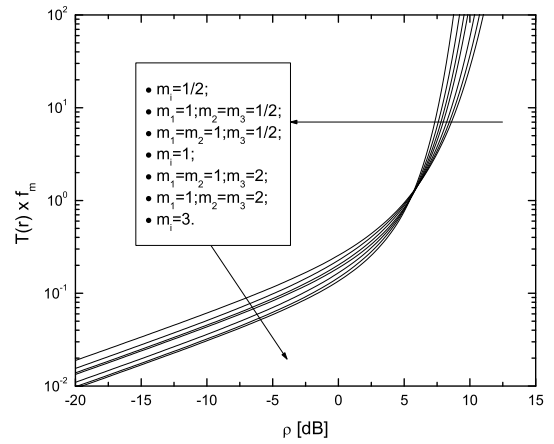


Fig. 6. Duração Média de Desvanecimento — desvanecimentos diversos ( $M = 3$ ).

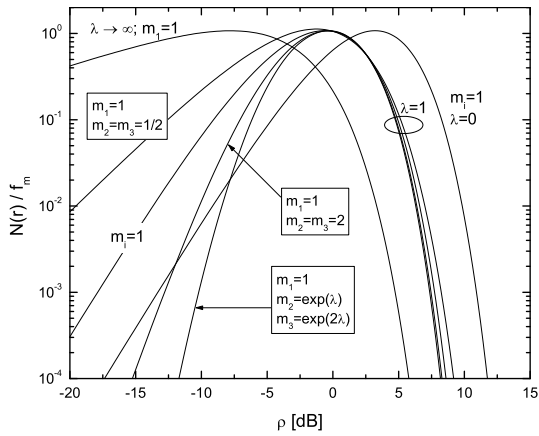


Fig. 4. Taxa de Cruzamento de Nível — desvanecimentos e potências médias diversos ( $M = 3$ ).

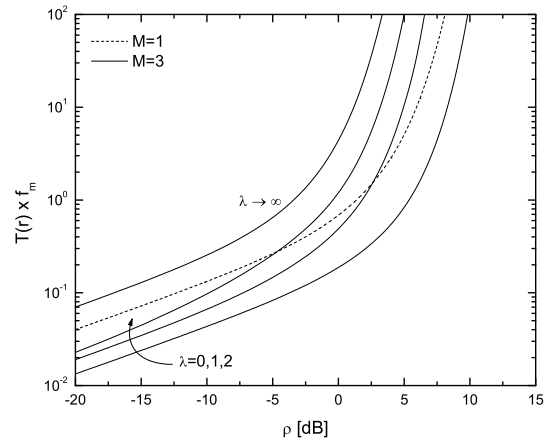


Fig. 7. Duração Média de Desvanecimento — potências médias diversas ( $m_i = 1$ ).

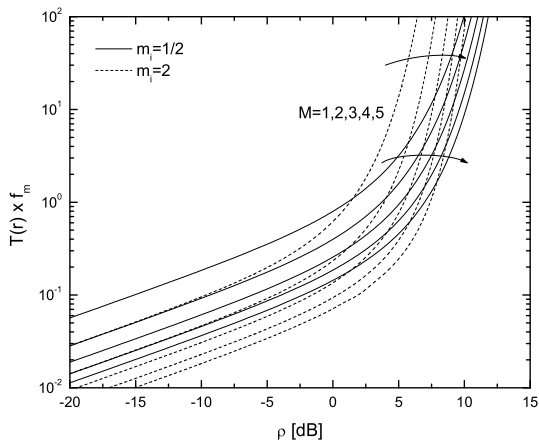


Fig. 5. Duração Média de Desvanecimento — caso iid.

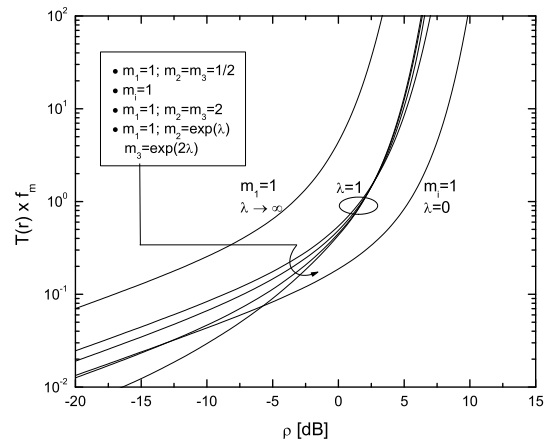


Fig. 8. Duração Média de Desvanecimento — desvanecimentos e potências médias diversos ( $M = 3$ ).