

# Códigos LDPC-Polar Concatenados com Mapeamento de Bits

Saeid Ghasemi e Bartolomeu F. Uchôa-Filho

**Resumo**— Neste artigo, é proposto um esquema de codificação concatenado baseado em códigos LDPC e códigos polares usando um método específico de mapeamento de bits. O objetivo principal é melhorar o desempenho dos códigos polares codificando, através de um código LDPC, os bits que normalmente seriam transmitidos pelos canais de bit com confiabilidades intermediárias. Um segundo objetivo alcançado com esta proposta é a simplificação do projeto da matriz de paridade do código LDPC. Resultados de simulação mostram uma menor taxa de erro de bit (BER) no canal com ruído gaussiano branco aditivo (AWGN) em comparação aos esquemas de codificação concatenados existentes.

**Palavras-Chave**— Códigos concatenados, códigos LDPC, códigos polares, mapeamento de bits.

**Abstract**— In this work, a concatenated coding scheme based on LDPC codes and polar codes using a specific bit mapping method is proposed. The main goal is to improve the performance of polar codes by encoding (via an LDPC code), the bits that would normally be transmitted through bit channels with intermediate reliabilities. A second goal achieved with this proposal is the simplification of the design of the LDPC code parity-check matrix. Simulation results show a lower bit error rate (BER) over the additive white Gaussian noise (AWGN) channel compared to existing concatenated coding schemes.

**Keywords**— Concatenated codes, LDPC codes, polar codes, bit mapping.

## I. INTRODUÇÃO

Os códigos de verificação de paridade de baixa densidade (LDPC), inventados por Gallager em 1963 [1], são códigos de blocos lineares cuja matriz de verificação de paridade possui um pequeno número de 1's. É bem conhecido que os códigos LDPC, especialmente os códigos LDPC irregulares, têm um desempenho muito bom para transmissão em canais de entrada binária e quase atingem o limite de Shannon [2]. Devido a sua excelente capacidade de correção de erros, os códigos LDPC são adotados em muitos padrões de sistema de telecomunicações.

Códigos LDPC irregulares são caracterizados por possuírem nós com diferentes graus, o que leva naturalmente a uma proteção desigual de erro. Em canais de bit de diferentes confiabilidades, um mapeamento de bits (BM) pode ser usado para atribuir adequadamente bits codificados a canais de bit, melhorando assim o desempenho de erro do sistema. Para otimizar códigos LDPC em canais de entrada binária simétrica, usam-se as técnicas de evolução de densidade [2] ou do gráfico de transferência de informação extrínseca (EXIT) [3],

especificando um par de distribuições de graus de nós (um para nós de variável e o outro para nós de paridade).

Smith et al. [4] propuseram uma abordagem de mapeamento de bits altruísta na qual os nós de bit são classificados como nós fortes ou fracos de acordo com a confiabilidade dos canais de bit para os quais serão mapeados, e as matrizes de verificação de paridade são projetadas sob certas restrições para ter bits fortes ajudando bits fracos. Como observado em [4], uma característica chave do sistema codificado com a abordagem altruísta é a existência de canais de bit com diferentes confiabilidades, que podem ser encontrados nos canais de bit associados ao rotulamento de bits de uma modulação QAM  $M$ -ária, bem como em símbolos transmitidos em diferentes subportadoras de multiplexação por divisão de frequência ortogonal (OFDM).

Por outro lado, os códigos polares foram introduzidos por Arikan em [5] como a primeira família de códigos de correção de erros que atingem a capacidade de canais sem memória de entrada binária (BI-DMC). Esses códigos possuem uma codificação e decodificação de canal com baixa complexidade  $\mathcal{O}(N \log(N))$ , em que  $N$  é o comprimento do código. Por esta razão, a equipe 3GPP selecionou códigos polares para as redes de quinta geração (5G). A ideia da codificação polar é combinar adequadamente  $N$  cópias de um determinado canal discreto sem memória de entrada binária que podem então ser divididos em  $N$  canais de bit sintetizados que apresentam diferentes confiabilidades, através de um fenômeno chamado *polarização de canal* [5]. À medida que o número de canais de bit  $N$  cresce, uma fração (correspondente à capacidade do canal) é formada por canais de bit que tornam-se perfeitos, enquanto que os canais de bit da fração complementar tornam-se inúteis. A codificação consiste simplesmente em se enviar bits não codificados pelos canais de bit perfeitos e zeros (bits congelados) pelos canais de bit inúteis.

Uma parte importante dos códigos polares é escolher os canais de bit mais confiáveis para transmissão de bits de informação. Isso é feito a partir da chamada *sequência de confiabilidade*, ou seja, a sequência de índices dos canais de bit ordenados por confiabilidade. Esta sequência não é universal, é altamente dependente do comprimento do código e das condições do canal e é difícil de ser obtida para um canal que não seja o canal binário com apagamentos (BEC). Existem vários métodos na literatura para encontrar uma sequência de confiabilidade aproximada, como em [6]. Um fato interessante é que a polarização de canal que ocorre naturalmente na codificação polar surge como uma oportunidade perfeita para a aplicação da abordagem altruísta. Este trabalho explora essa correspondência natural para melhorar o desempenho do sistema, como veremos.

A concatenação de códigos é um recurso importante para melhorar o desempenho em regime de comprimento finito. Em [7] e [8], os autores usam um código polar como código interno e um código LDPC como código externo em um esquema concatenado com decodificação BP para proteger um conjunto de bits que são transmitidos através de canais de bit de qualidade mediana. Em [9], um novo esquema de entrelaçamento introduzido no código LDPC-polar quebra a correlação dos erros entre os bits correlacionados.

Neste artigo, apresentamos um esquema concatenado que consiste em um código LDPC irregular externo e um código polar interno usando um mapeamento de bits especial baseado numa abordagem proposta por Smith et al. [4], com o objetivo principal de obter um bom desempenho de erro através de um projeto simples da matriz de paridade do código LDPC. Neste esquema concatenado, os bits não codificados e os bits congelados são, como usualmente em códigos polares, transmitidos através dos canais de bit perfeitos e inúteis (ou seja, completamente polarizados), respectivamente, enquanto usa-se um código LDPC para proteger os bits transmitidos através dos canais de bit com confiabilidades intermediárias. No entanto, ao contrário de [7] e [8], levamos em conta as diferentes confiabilidades dos canais de bit com confiabilidades intermediárias ao aplicarmos a abordagem altruísta de [4]. Em termos práticos, propomos matrizes de verificação de paridade de códigos LDPC que satisfaçam certas restrições e um BM para melhorar o desempenho geral do esquema concatenado em comparação com aqueles existentes. Com muito pouco ou nenhum esforço, apenas seguindo algumas regras, é possível melhorar o desempenho significativamente, alcançando o objetivo principal do trabalho.

O restante deste artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção II, os principais conceitos relacionados a códigos polares, códigos LDPC e BM são brevemente introduzidos. Na Seção III, o esquema proposto para concatenar códigos LDPC e polares é apresentado. Na Seção IV, resultados de simulação são apresentados e discutidos. Finalmente, a Seção V apresenta as conclusões.

## II. PRELIMINARES

Nesta seção, explicamos algumas notações e conceitos preliminares que usamos ao longo deste trabalho.

### A. Códigos Polares

Um código polar  $(N, K)$  ( $N = 2^p$ ) para um BI-DMC é construído a partir da concatenação em paralelo de  $N$  cópias do BI-DMC, combinando os  $N$  bits de entrada apropriadamente. Seja  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{F}_2^N$  o vetor contendo os bits de entrada, que são combinados de acordo com

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{G}_N = \mathbf{u}\mathbf{F}^{\otimes p}, \quad (1)$$

em que  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^N$  é a chamada palavra-código do código polar,  $\mathbf{G}_N$  é a matriz geradora de ordem  $N$ , e  $\mathbf{F}^{\otimes p}$  é a  $p$ -ésima potência de Kronecker da matriz de núcleo  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F}^{\otimes p} = \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^{\otimes p-1}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Para o canal AWGN com entrada binária (BI-AWGN), considerado neste trabalho, o vetor de palavra-código  $\mathbf{x}$  é modulado em BPSK e transmitido. O vetor recebido é dado por

$$\mathbf{y} = (\mathbf{1} - 2\mathbf{x}) + \mathbf{n}, \quad (3)$$

em que  $\mathbf{1}$  é o vetor  $(1 \times N)$  com todos os elementos iguais a 1 e  $\mathbf{n}$  é o vetor de ruído de média zero e matriz de covariância  $\sigma_0^2 \mathbf{I}_N$ .

A partir da concatenação acima, Arikan [5] definiu  $N$  canais de bit sintéticos que se polarizam à medida que  $N$  cresce, no sentido de se tornarem perfeitos ou inúteis. Uma questão importante na codificação polar é encontrar os melhores canais para transmitir bits de dados. Depois de encontrar as confiabilidades dos canais de bit, estas são ordenadas da pior para a melhor, e então pode-se selecionar  $K$  bits como bits de informação e  $N - K$  bits como bits congelados (tipicamente iguais a zero), para a formação do vetor  $\mathbf{u}$ . Isso dá origem ao código polar de taxa  $R_{\text{polar}} = K/N$ .

Um código polar  $(N, K)$  pode ser decodificado usando o algoritmo de decodificação de propagação de crença (BP) operando em um gráfico de fator que consiste em  $N \times (p + 1)$  nós distribuídos em uma rede com  $p + 1$  estágios, como mostrado na Fig. 1 (a). Cada nó no gráfico de fatores está associado a uma mensagem de probabilidade logarítmica da direita para a esquerda e da esquerda para a direita,  $L_{i,j}^t$  e  $R_{i,j}^t$ , respectivamente, em que  $i$  ( $1 \leq i \leq p + 1$ ) representa o número do estágio,  $j$  ( $1 \leq j \leq N$ ) representa o número do bit e  $t$  é um índice de tempo. Um bloco computacional básico de decodificação BP consistindo de quatro nós com suas respectivas mensagens associadas é mostrado na Fig. 1 (b). Essas mensagens são dadas por

$$\begin{aligned} R_{i+1,j}^{(t+1)} &= f_- \left( R_{i,j}^{(t)}, L_{i+1,j+1}^{(t)} + R_{i,j+1}^{(t)} \right), \\ R_{i+1,j+1}^{(t+1)} &= R_{i,j+1}^{(t)} + f_- \left( R_{i,j}^{(t)}, L_{i+1,j}^{(t)} \right), \\ L_{i,j}^{(t+1)} &= f_- \left( L_{i+1,j}^{(t)}, L_{i+1,j+1}^{(t)} + R_{i,j+1}^{(t)} \right), \\ L_{i,j+1}^{(t+1)} &= L_{i+1,j+1}^{(t)} + f_- \left( L_{i+1,j}^{(t)}, R_{i,j}^{(t)} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

em que

$$f_-(x, y) = \text{sign}(x) \cdot \text{sign}(y) \cdot \min(|x|, |y|). \quad (5)$$

Uma iteração é concluída depois que as mensagens fluem dos nós da direita (no estágio  $p + 1$ ) para os nós da esquerda (no estágio 1) e, em paralelo, dos nós da esquerda para os nós da direita. Na primeira iteração, temos

$$L_{i,j} = \begin{cases} \ln \left( \frac{\Pr(y_j | x_j = 0)}{\Pr(y_j | x_j = 1)} \right), & \text{para } i = p + 1 \\ 0, & \text{para } i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (6)$$

$$R_{i,j} = \begin{cases} \infty, & \text{se } j \text{ é congelado e } i = 1 \\ 0, & \text{por outro lado} \end{cases} \quad (7)$$

Durante o procedimento de decodificação BP,  $L_{i,j}^{(t)}$  e  $R_{i,j}^{(t)}$  são atualizados e propagados através de nós adjacentes de acordo com (4) até atingir o número máximo de iterações. Neste instante, as LLRs no estágio 1 podem servir como informação

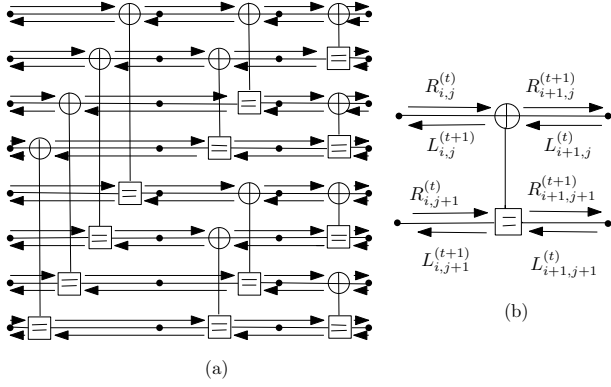


Fig. 1. (a) Gráfico de fator para o código polar com  $N = 8$ . Pequenos círculos pretos representam nós (b) Bloco computacional básico do decodificador BP

*a priori* para outro decodificador em um esquema concatenado, se for o caso, ou podem ser usadas para se tomar uma decisão abrupta de acordo com

$$\hat{u}_j = \begin{cases} 0, & \text{if } (L_{1,j}^t + R_{1,j}^t) > 0 \\ 1, & \text{if } (L_{1,j}^t + R_{1,j}^t) \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

### B. Códigos LDPC

Um código LDPC é especificado por uma matriz de verificação de paridade  $\mathbf{H}$  contendo principalmente 0s e uma baixa densidade de 1s. As linhas da matriz representam as equações de paridade e as colunas, os bits da palavra-código. Os códigos LDPC são representados graficamente por um gráfico de Tanner que consiste em nós de bit e nós de paridade. Os códigos LDPC são geralmente decodificados usando um algoritmo de propagação de crença iterativo operando no gráfico de Tanner, em que as mensagens suaves entre os nós de bit e os nós de paridade são propagadas. De implementação simples, por meio de registradores de deslocamento cíclicos, os chamados códigos LDPC Quasi-Cyclic (QC) [11] têm sido adotados em muitas aplicações. A matriz de verificação de paridade  $\mathbf{H} = [\mathbf{S} \ \mathbf{T}]$  de um código QC-LDPC  $(N, K)$ , de dimensão  $(N - K) \times N$ , consiste em um array  $c \times (l + r)$  de sub-matrizes circulantes  $b \times b$ , conforme abaixo:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{1,1} & \mathbf{S}_{1,2} & \cdots & \mathbf{S}_{1,l} & \mathbf{T}_{1,1} & \mathbf{T}_{1,2} & \cdots & \mathbf{T}_{1,r} \\ \mathbf{S}_{2,1} & \mathbf{S}_{2,2} & \cdots & \mathbf{S}_{2,l} & \mathbf{T}_{1,1} & \mathbf{T}_{2,2} & \cdots & \mathbf{T}_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_{c,1} & \mathbf{S}_{c,2} & \cdots & \mathbf{S}_{c,l} & \mathbf{T}_{c,1} & \mathbf{T}_{c,2} & \cdots & \mathbf{T}_{c,r} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

em que as submatrizes  $\mathbf{S}_{i,j}$  e  $\mathbf{T}_{i,j}$  são matrizes  $b \times b$  que podem ser a matriz totalmente zero, sendo representada de forma compacta pelo escalar  $-1$ , ou uma matriz identidade circulante, representada por um inteiro entre 0 e  $b - 1$  que indica o número de deslocamentos cíclicos das colunas da matriz identidade. Assume-se que  $b$  divide  $N$  e  $N - K$ .

Para ter complexidade de decodificação linear, Richardson e Urbanke [12] consideraram a matriz  $\mathbf{T}$  como uma matriz triangular inferior aproximada. Devemos levar isso em consideração nos códigos LDPC-Polar concatenados propostos.

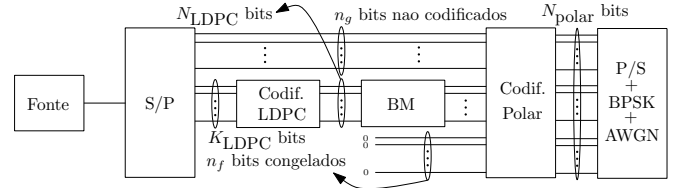


Fig. 2. Diagrama de blocos do esquema de codificação LDPC-Polar concatenado proposto com BM.

### C. Esquemas de Códigos Polares-LDPC Concatenados Existentes

Nos códigos polares, após a polarização, um grande número de canais de bit é muito ruidoso ou sem ruído. Mas alguns dos canais de bit têm confiabilidade moderada, ou seja, não são muito bons e nem muito ruins. Guo et al. [7] propuseram a aplicação de um código LDPC externo mais curto para proteger os bits associados a esses canais intermediários. Eles usaram a sequência de confiabilidade (ou seja, as confiabilidades ordenadas) para identificar esses bits.

Eslami et al. [10] introduziram o conceito de *leafset* de um bit de informação como sendo o conjunto de bits codificados que têm este bit de informação na sua composição. O *leafset* do  $i$ -ésimo bit de informação contém os bits codificados correspondentes aos “uns” na  $i$ -ésima linha da matriz geradora  $\mathbf{G}_N$ . Portanto, o tamanho do *leafset* do  $i$ -ésimo bit de informação é igual ao peso de Hamming da  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{G}_N$ . Abbas et al. [8] usaram o fato de que, na decodificação BP, um bit de informação com tamanho de *leafset* menor tem maior probabilidade de ser corrompido. Assim, eles propuseram aplicar um código LDPC externo para proteger esses bits de informação com tamanho de *leafset* pequeno. Os empates, ou seja, quando os bits de informação têm o mesmo tamanho de *leafset*, foram resolvidos a partir da sequência de confiabilidade.

### III. O ESQUEMA CONCATENADO PROPOSTO

Nesta seção, apresentamos o esquema de codificação concatenado LDPC-Polar proposto com BM. O diagrama de blocos é mostrado na Fig. 2. Como pode ser visto,  $n_g$  bits de informação não codificados são transmitidos através dos canais de bit mais confiáveis (bits superiores na figura).  $n_f$  bits congelados são transmitidos através dos canais de bit menos confiáveis. A função do código LDPC no esquema proposto é fornecer proteção adicional para os bits de informação associados aos canais de bit intermediários, ou seja, aqueles não totalmente polarizados. Portanto,  $K_{\text{LDPC}}$  bits de informação são codificados pelo codificador LDPC, e os bits da palavra-código do código LDPC de comprimento  $N_{\text{LDPC}}$  são mapeados nos canais de bit intermediários. Os  $N_{\text{polar}} = n_g + N_{\text{LDPC}} + n_f$  bits formados por esses três blocos de bits são submetidos à entrada do codificador polar, cuja saída (palavra-código polar de comprimento  $N_{\text{polar}}$ ) é transmitida através do canal AWGN. As taxas de código LDPC, polar e concatenado para um esquema de codificação concatenado  $(N, K)$  são  $R_{\text{LDPC}} = \frac{K_{\text{LDPC}}}{N_{\text{LDPC}}}$ ,  $R_{\text{polar}} = \frac{K_{\text{polar}}}{N_{\text{polar}}} = \frac{n_g + N_{\text{LDPC}}}{n_g + N_{\text{LDPC}} + n_f}$ ,  $R = \frac{K}{N} = \frac{n_g + K_{\text{LDPC}}}{n_g + N_{\text{LDPC}} + n_f}$ , respectively.



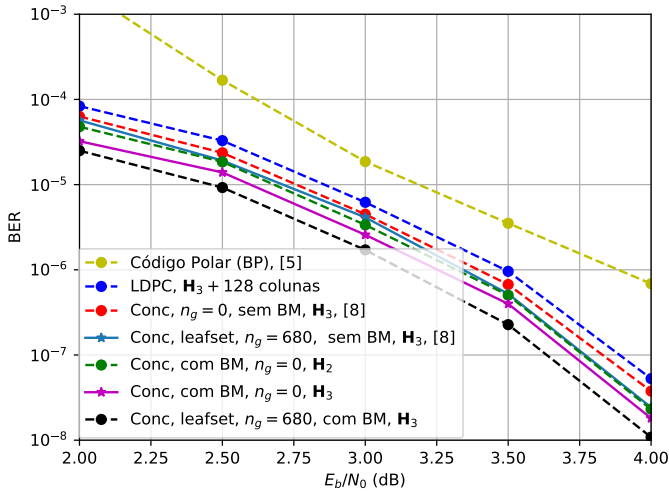


Fig. 5. BER para diferentes esquemas de codificação (concatenados ou não, com ou sem BM), todos com os mesmos parâmetros globais: comprimento do código = 2048, taxa do código = 0,46875. Na legenda, “Conc” indica esquema concatenado e “leafset” indica que os canais de bit foram ordenados de acordo com o conceito de leafset em [8], caso contrário o ordenamento foi baseado em uma sequência de confiabilidade universal.

TABELA I

PARÂMETROS DOS CÓDIGOS LDPC DA FIG. 6 PARA DIFERENTES  $n_g$

$n_g$	$N_{LDPC}$	$R_{LDPC}$
0	1920	0.5000
200	1720	0.4419
480	1440	0.3333
680	1240	0.2258
800	1120	0.1429

o esquema LDPC-polar concatenado,  $N_{polar} = 2048$ ,  $R_{polar} = 0,9375$ ,  $N_{LDPC} = 1920$ ,  $R_{LDPC} = 0,5$  e, consequentemente,  $R = 0,46875$ .

Na Fig. 6, o esquema LDPC-polar concatenado com BM proposto é testado com diferentes valores de  $n_g$ . O valor de  $n_g = 680$  resultou no melhor desempenho, que também corresponde à curva de BER preta na Fig. 5. É importante destacar que a curva de BER azul clara na Fig. 5 corresponde ao mesmo esquema, porém com o BM proposto neste artigo. É possível observar um ganho significativo. Na Fig. 6, os parâmetros do código polar foram matidos fixos:  $N_{polar} = 2048$ ,  $R_{polar} = 0,9375$ , porém, para manter os mesmos parâmetros do esquema concatenado, os parâmetros do código LDPC tiveram que mudar de acordo com a Tabela I.

## V. CONCLUSÃO

Neste artigo, propusemos um esquema de codificação baseado em códigos polares concatenados com códigos LDPC para o canal AWGN. O ingrediente chave do esquema é um mapeamento de bits baseado numa abordagem autuística, proposta por Smith et al. [4]. Com a proposta, a matriz de paridade do código LDPC pode ser construída sem grandes esforços, seguindo regras simples impostas pela abordagem. Resultados de simulação indicaram um melhora significativa

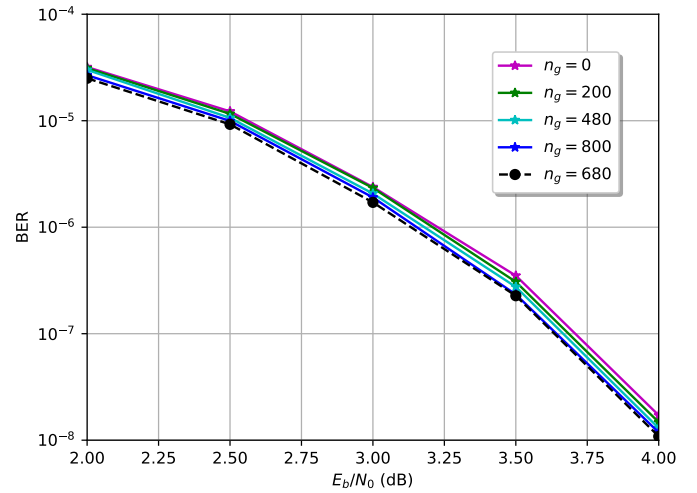


Fig. 6. BER para o esquema de codificação LDPC-polar concatenado com BM e matriz de paridade  $H_3$  com diferentes valores de  $n_g$ .

de desempenho, apesar de o projeto da matriz de paridade ter sido feito sem uma otimização elaborada, que fica para trabalhos futuros. Espera-se que tal otimização possa ser bastante sistematizada, simplificando o projeto do código LDPC.

## REFERÊNCIAS

- [1] R. Gallager, “Low-density parity-check codes,” in *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. 8, no. 1, pp. 21-28, January 1962, doi: 10.1109/TIT.1962.1057683.
- [2] T. Richardson, M. A. Shokrollahi and R. L. Urbanke, “Design of capacity-approaching irregular low-density parity-check codes,” in *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 619-637, Feb 2001, doi: 10.1109/18.910578.
- [3] S. ten Brink, G. Kramer and A. Ashikhmin, “Design of low-density parity-check codes for modulation and detection,” in *IEEE Trans. Commun.*, vol. 52, no. 4, pp. 670-678, April 2004, doi: 10.1109/TCOMM.2004.826370.
- [4] F. Smith, E. Pellaes, B. F. Uchôa-Filho, “A simple root-like bit mapping to improve the performance of LDPC-Coded QAM systems,” *2013 IEEE Global Commun. Conf. (GLOBECOM)*, 2013, pp. 1885-1890, doi: 10.1109/GLOCOM.2013.6831349.
- [5] E. Arikan, “Channel polarization: a method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, 3051 (DOI: 10.1109/TIT.2009.2021379). 2009.
- [6] S. Ghasemi and B. F. Uchôa-Filho, “An algorithm for finding an approximate reliability sequence for polar codes on the BEC,” *Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais, SBrT 2021*.
- [7] J. Guo, M. Qin, A. G. i Fàbregas, P. H. Siegel, “Enhanced Belief Propagation Decoding of Polar Codes through Concatenation,” in *IEEE International Symp. on Inform. Theory*, pp. 2987 – 2991, 2014.
- [8] S. M. Abbas, Y. Fan, J. Chen and C. -Y. Tsui, “Concatenated LDPC-polar codes decoding through belief propagation,” in *IEEE International Symp. on Circuits and Systems (ISCAS)*, 2017, pp. 1-4, doi: 10.1109/ISCAS.2017.8050835.
- [9] Y. Meng, L. Li, Y. Hu, “A Novel Interleaving Scheme for Polar Codes,” in *IEEE 84th Vehicular Techn. Conf. (VTC-Fall)*, pp. 1 - 5, 2016.
- [10] A. Eslami and H. Pishro-Nik, “On finite-length performance of polar codes: Stopping sets, error floor, and concatenated design,” in *IEEE Trans. Commun.*, vol. 61, no. 3 March 2013, pp. 919-929.
- [11] S. Myung, K. Yang, and J. Kim, “Quasi-cyclic LDPC codes for fast encoding,” in *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 51, no. 8, pp. 2894-2900, 2005.
- [12] T. J. Richardson and R. Urbanke, “Efficient encoding of low-density parity-check codes,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 638–656, Feb. 2001.