Uma conjectura: o teorema de Shemesh e a capacidade erro-zero de canais quânticos com dois operadores de kraus

Marciel M. de Oliveira e Francisco M. de Assis

***Resumo*— Neste trabalho é apresentado uma conjetura que relaciona o teorema de Shemesh e a capacidade erro-zero de canais quânticos. Esta conjectura é pensada com base nas verificações feitas com alguns canais quânticos e funciona como uma condição para que o canal quântico tenha capacidade erro-zero positiva. A demonstração matemática da mesma está sendo desenvolvida e dependendo de ajustes matemáticos.**

***Palavras-Chave*— Canais quânticos, Teorema de Shemshe, Capacidade erro-zero.**

***Abstract*— We show in this paper the conjecture that relates Shemesh's theorem and the zero-error capability of quantum channels. The conjecture is based on the verifications made with some quantum channels and works as a condition for the quantum channel to have a positive error-zero capability. The mathematical demonstration of the same is being implemented and depending on mathematical adjustments.**

***Keywords*— Quantum channels, Shemesh theorem, error-zero capacity.**

I. INTRODUÇÃO

Em 1984, Dan Shemesh [1] apresenta um critério (teorema de Shemesh) para duas matrizes quadradas terem autovetores comuns, bem como um critério para uma matriz ter um autovetor em um dado subespaço. O resultado apresenta uma natural importância envolvendo o conceito de autovetores e, de modo mais específico, pode também ser aplicado a duas matrizes companheiras, assegurando que elas possuem autovetores comuns se, e somente se, os respectivos polinômios característicos possuírem algum autovalor comum.

No ano de 2012, Jamiolkowski [2] relaciona o teorema de Shemesh com a teoria da informação quântica, contribuindo no estudo dos mapas quânticos irredutíveis. Além disso, usando a generalização do teorema de Shemesh, pode-se verificar que uma álgebra gerada por operadores de Kraus de um canal quântico possui ou não subespaços livres de descoerência.

Recentemente, em 2018, o mesmo Jamiolkowski, juntamente com Bialonczyk. e Zyczkowski [3], aprofundam a relação entre o teorema de Shmesh e a teoria da informação quântica, trazendo algumas aplicações envolvendo o espectro perimetral de canais quânticos com dois operadores de Kraus.

Na teoria da informação quântica, um relevante tema estudado é o conceito de capacidade de canais quânticos, especialmente, a capacidade erro-zero de canais quânticos para a transmissão de informação clássica definida por Medeiros e Assis [4]. Nesse sentido, a informação clássica é codificada, através de um bloco quântico, em estados quânticos que são transmitidos através de um canal quântico ruidoso sem memória. Na recepção, como parte do processo de decodificação, os estados quânticos são medidos. Nesse caso, a transmissão é feita com uma taxa de erro igual a zero.

Neste trabalho é apresentada uma conjectura que relaciona o teorema de Shemesh e o conceito de capacidade erro-zero de canais quânticos. A elaboração desta conjectura tem como base as verificações feitas com alguns canais quânticos, tais como, canal de despolarização, canal *phase flip*, canal amplitude *damping*, entre outros. Ademais, esta conjectura funciona como uma condição para que um canal quântico tenha capacidade erro-zero positiva.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: Na Seção II, é apresentado o conjunto de conceitos preliminares sobre canais quânticos e capacidade erro-zero, incluindo a verificação da capacidade erro-zero de alguns canais quânticos. Já na Seção III, é apresentada a conjectura proposta neste artigo (Conjectura 1), incluindo os exemplos que conduziram ao levantamento da mesma. Por fim, na Seção IV é apresentada uma conclusão sobre os desenvolvimentos realizados.

II. CAPACIDADE ERRO-ZERO DE CANAIS QUÂNTICOS

A fim de definir capacidade erro-zero de canais quânticos a seguir serão apresentadas algumas definições preliminares.

Seja $M_d(\mathbb{C})$ o espaço vetorial de Hilbert das matrizes complexas $d \times d$. Um *canal quântico* ruidoso sem memória é um mapa linear totalmente positivo com preservação de traço $\mathcal{E} : M_d(\mathbb{C}) \longrightarrow M_d(\mathbb{C})$ e pode ser escrito em termo de operadores de Kraus[1] da forma

$$\mathcal{E}(X) = \sum_{i=1}^{\kappa} A_i X A_i^\dagger \tag{1}$$

em que os A_i são operadores de Kraus tais que $\sum_{i=1}^{\kappa} A_i^\dagger A_i = I$, em que I é o operador identidade e $\kappa \leq d^2$.

Antes de apresentar a definição de capacidade erro-zero, a seguir serão apresentados alguns conceitos preliminares.

Considere um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com dimensão d e seja $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}$ formado por estados de entrada possíveis para o canal

[1]Os operadores lineares A_i na forma (1) são chamados de operadores de Kraus. O canal quântico possui representação de Kraus, a qual fornece uma maneira mais geral de descrever a evolução que um estado quântico pode sofrer. Para maiores detalhes sobre a representação de Kraus de um canal quântico, ver [5].

Marciel M. de Oliveira e Francisco M. de Assis, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, e-mail: [marciel.oliveira,fmarcos]@ee.ufcg.edu.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Projeto CNPq (305918/2019-2).

quântico $\mathcal{E}$. Se $\rho \in \mathcal{X}$, denote por $\sigma = \mathcal{E}(\rho)$, o estado quântico recebido quando ρ é transmitido através do canal quântico. Defina $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ como sendo um subconjunto finito e seja $\rho_i \in \mathcal{S}$. Se Bob realiza medições usando um POVM *(Positive Operator-Valued Measurements)* $\{M_j\}$, em que $\sum_j M_j = I$. Então, defina $p(j|i)$ como sendo a probabilidade de Bob medir j dado que Alice enviou o estado ρ_i. Assim,

$$p(j|i) = tr[\sigma_i M_j] = tr[\mathcal{E}(\rho_i) M_j]. \quad (2)$$

A capacidade erro-zero quântica é definida para estados produtos na entrada do canal. O produto tensorial de quaisquer n estados de entrada é chamado de *palavra quântica de entrada*

$$\overline{\rho}_i = \rho_{i_1} \otimes ... \otimes \rho_{i_n}, \quad (3)$$

que pertence a um espaço de Hilbert de dimensão d^n, denotado por $\mathcal{H}^n$.

Um mapeamento de K mensagens clássica (que possuem índices inteiros $1, ..., K$, denotadas por $X_1, ..., X_K$) em um subconjunto de palavras quânticas de entrada irá ser chamado de um *código de bloco quântico de comprimento* n. Os estados de saída são chamadas de *palavras código quânticas*. Dessa forma, $\frac{1}{n}$ log K é a taxa desse código.

Uma sequência de n índices de saída obtidos a partir de medições POVM com elementos $\{M_1, ..., M_b\}$ irá ser designada de *palavra de saída*, $w \in \{1, ..., b\}^n$.

Para um código de bloco quântico de comprimento n, um esquema de decodificação é uma função que associa de maneira univoca, cada palavra de saída a inteiros de 1 a K que representa as mensagens clássicas. Caso o sistema identificar uma mensagem recebida for diferente da mensagem enviada, então a probabilidade de erro para este código é maior que zero [6].

Definição 1: **(Capacidade erro-zero de canais quânticos [4])** Seja $\mathcal{E}(\cdot)$ um canal quântico ruidoso sem memória. A **capacidade erro-zero** de $\mathcal{E}(\cdot)$, denotada por $C^{(0)}(\mathcal{E})$, é o supremo de todas as taxas alcançáveis com probabilidade de erro de decodificação igual a zero. Isto é,

$$C^{(0)}(\mathcal{E}) = \sup_n \frac{1}{n} \log K(n), \quad (4)$$

em que $K(n)$ é o número de mensagens clássicas que o sistema pode transmitir sem erro, quando um código de bloco quântico de comprimento n é usado.

A seguir é apresentada uma condição para que um canal quântico tenha capacidade erro-zero positiva. Essa condição, juntamente prova matemática pode ser encontrada em [4].

Teorema 1: Seja $\mathcal{S} = \{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\ell\}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ um conjunto de estados quânticos, e seja $\mathcal{P} = \{M_1, M_2, ..., M_m\}$ um POVM em que $m \geqslant \ell$ e tais que $\sum_{j=1}^{m} M_j = I$. Considere os subconjuntos

$$A_k = \{j \in \{1, ..., m\};\ tr[\sigma_k M_j] > 0\};\ k \in \{1, ..., \ell\}. \quad (5)$$

com $\sigma_k = \mathcal{E}(\rho_k)$. Então, o canal quântico $\mathcal{C}$ possui uma capacidade maior do que zero (ou positiva, ou não trivial) se, e somente se, existir um conjunto $\mathcal{S}$ e um um POVM $\mathcal{P}$ tal que, para pelo menos um par $(i, j) \in \{1, ..., \ell\}^2$, $i \neq j$, os subconjuntos A_i e A_j são disjuntos.

Os estados quânticos ρ_i e ρ_j são ditos não-adjacentes em $\mathcal{C}$ para o POVM $\mathcal{P}$.

Prova: Seja $\rho_i, \rho_j \in \mathcal{S}$ tais que os subconjuntos A_i e A_j são disjuntos para um determinado POVM $\mathcal{P}$. Então é possível construir um código de bloco quântico para mapear duas mensagens clássicas nos estados ρ_i e ρ_j. Ademais, a taxa deste código é igual a um e portanto $C^{(0)}(\mathcal{E}) \geq 1$, isto é, o canal quântico tem capacidade erro-zero positiva.

Por outro lado, suponha que $C^{(0)}(\mathcal{E})$ é positiva, então pelo menos dois estados quânticos ρ_i e ρ_j de um determinado $\mathcal{S}$ são não-adjacentes em relação ao POVM $\mathcal{P}$, ou seja, A_i e A_j são subconjuntos disjuntos. ∎

No artigo [7], os autores apresentam outro resultado para garantir que um canal quântico tem capacidade erro-zero positiva. No resultado, foi mostrado que um canal $\mathcal{E}$ possui capacidade erro-zero positiva, quando estados de entradas escolhidos não-adjacente são levados pelo canal a espaços vetoriais ortogonais considerando o produto interno de Hilbert-Schmidt.[2] Segue o resultado:

Teorema 2: Seja um canal quântico $\mathcal{E}$ com operadores de Kraus $\{A_i\}$. Dois estados de entradas $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathcal{S}$ são não-adjacentes para um dado POVM $\mathcal{P} = \{M_1, ..., M_m\}$ se, e somente se, os respectivos $\mathcal{E}(|\psi_1\rangle)$ e $\mathcal{E}(|\psi_2\rangle)$ pertencem a subespaços vetoriais ortogonais, ou seja, $tr[\mathcal{E}(|\psi_1\rangle)\mathcal{E}(|\psi_2\rangle)] = 0$.

Este resultado cuja a prova está na Proposição 3 em [7] é utilizado para verificar a capacidade erro-zero do canal de despolarização.

Exemplo 1: **(Canal de despolarização [8])** O canal de despolarização em um espaço de Hilbert com dimensão d atua sobre um estado de entrada ρ da seguinte forma:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p\frac{1}{d}I \quad (6)$$

com $0 < p < 1$ e I a matriz identidade de dimensão d. Um estado quântico de entrada ρ pode ser transmitido intacto com probabilidade $1-p$ ou é trocado por um estado completamente misto com probabilidade p.

Para calcular a capacidade erro-zero desse canal, basta verificar se dois estados quaisquer distintos são distinguíveis na saída do canal, isto é,

$$\begin{aligned} tr[\mathcal{E}(\rho_i)\mathcal{E}(\rho_j)] &= tr\left[\left((1-p)\rho_i + p\frac{1}{d}I\right)\left((1-p)\rho_j + p\frac{1}{d}I\right)\right] \\ &= tr\left[(1-p)^2\rho_i\rho_j + (1-p)\rho_i\frac{1}{d}I + (1-p)\rho_j\frac{1}{d}I + \frac{p^2}{d^2}I\right] \\ &= (1-p)^2 tr[\rho_i\rho_j] + \frac{p(1-p)}{d} tr(\rho_i + \rho_j) + \frac{p^2}{d^2} > 0, \end{aligned}$$

em que $0 < p < 1$. Logo, a capacidade erro-zero do canal de despolarização $\mathcal{E}$ é igual a zero, ou seja, $C^{(0)}(\mathcal{E}) = 0$.

A fim de calcular a capacidade erro-zero do canal *Phase Flip* é apresentado a seguinte definição e proposição:

[2] O produto interno de Hilbert-Schmidt entre dois operadores A e B é o produto interno definido pelo traço, $\langle A, B\rangle = tr[A^\dagger B]$, em que $A^\dagger$ é o conjugado transposto de A

Definição 2: [4] Sejam um conjunto $\mathcal{S} = \{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\ell\}$ e um POVM $\mathcal{P} = \{M_1, M_2, ..., M_m\}$. Diz-se que $(\mathcal{S},\ \mathcal{P})$ é um **mapa ótimo** para um canal quântico $\mathcal{E}$, se a capacidade erro-zero é alcançada com $(\mathcal{S},\ \mathcal{P})$.

Dado um canal quântico $\mathcal{E}$, um estado quântico ρ é dito *ponto fixo* se $\mathcal{E}(\rho) = \rho$. O teorema do ponto fixo de Schauder's garante que todo canal quântico possui pelo menos um ponto fixo.

Proposição 1: Seja $\mathcal{E}$ um canal quântico com N_f pontos fixos. Então a capacidade erro-zero de $\mathcal{E}$ é pelo menos $log\ N_f$.

A prova deste resultado encontra-se em [4], Proposição 2.

Exemplo 2: **(Phase Flip [9])** O canal *Phase Flip* num espaço de Hilbert de dimensão 2, cuja caracterização é dada pelos elementos de operação

$$A_1 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matematicamente, esse canal tem probabilidade p de levar um qubit intacto até a saída e probabilidade $1 - p$ trocar a sua fase. O canal *phase flip* possui dois pontos fixos, que são os estados $\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\psi\rangle$. Para ver isso, observe que se

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle \quad \text{e} \quad |\psi_1\rangle = |1\rangle,$$

então $\mathcal{E}(|0\rangle\langle 0|) = |0\rangle$ e $\mathcal{E}(|1\rangle\langle 1|) = |1\rangle$. Observando a Proposição 1 e que a dimensão do espaço de Hilbert é 2, conclui-se que

$$C^{(0)}(\mathcal{E}) = \frac{1}{1} log(2) = 1$$

para um mapa $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$ ótimo dado por

$$\mathcal{S} = \{|0\rangle, |1\rangle\} \quad \text{e} \quad \mathcal{P} = \{A_1 = |0\rangle\langle 0|,\ A_2 = |1\rangle\langle 1|\}.$$

A capacidade foi encontrada para $n = 1$. Isso significa que pode-se transmitir um bit por uso do canal com probabilidade de erro-zero igual a 1.

Exemplo 3: **(Amplitude Damping [9])** Dado um qubit na entrada do canal, a saída é dada por

$$\mathcal{E}(\rho) = A_1 \rho A_1^\dagger + A_2 \rho A_2^\dagger$$

em que

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matematicamente, se um qubit está $|0\rangle$, então ele é levado intacto pelo canal, porém se um qubit possui uma componente no estado $|1\rangle$, então o canal atenua sua amplitude. Ademais, a capacidade erro-zero desse canal é igual a zero. Para ver isso é suficiente ver que num espaço de Hilbert de dimensão dois, não é possível distinguir perfeitamente entre um estado puro e um estado misto [6].

No livro [10], os autores apresentam uma condição para capacidade erro-zero de um canal quântico. Essa condição, juntamente com a demonstração estão reproduzidas no teorema a seguir.

Teorema 3: Seja um canal quântico $\mathcal{E}$ com operadores de Kraus $\{A_i\}$. Sendo $|\psi_m\rangle$ e $|\psi_{m'}\rangle$ com $m \neq m'$ estados de entrada no canal. Então a capacidade erro-zero do canal $\mathcal{E}$ é positiva se, e somente se, $|\psi_{m'}\rangle\langle\psi_m|$, com $m \neq m'$ é ortogonal ao subespaço

$$S := span\{A_i^\dagger A_j,\ i, j\}$$

cuja ortogonalidade definida em termos do produto interno de Hilbert-Schmidt.

Prova: Como os estados $\{\mathcal{E}(\rho_m)\}$ são operadores semi-definidos positivos, então sendo ρ_m e $\rho_{m'}$ ortogonais, implica que

$$tr[\mathcal{E}(\rho_m)\mathcal{E}(\rho_{m'})] = 0,\ \forall\ m \neq m'. \tag{7}$$

Suponha uma representação de Kraus particular para $\mathcal{E}$, então $\mathcal{E}(\rho) = \sum_{i=1}^{\kappa} A_i \rho A_i^\dagger$. Então, basta mostrar que

$$\sum_{i,j}^{\kappa} tr[A_i \rho_m A_i^\dagger A_j \rho_{m'} A_j^\dagger] = 0,\ \forall\ m \neq m'.$$

Sem perda de generalidade, escolha estados de entrada ortogonais ψ_m e $\psi_{m'}$, com operadores $\rho_m = |\psi_m\rangle\langle\psi_m|$ e $\rho_{m'} = |\psi_{m'}\rangle\langle\psi_{m'}|$, respectivamente. Então

$$|\langle\psi_m| A_i^\dagger A_j |\psi_{m'}\rangle|^2 = 0,\ \forall\ m \neq m'$$

$$\langle\psi_m| A_i^\dagger A_j |\psi_{m'}\rangle = 0,\ \forall\ m \neq m',\ \forall\ i, j$$

$$tr[|\psi_{m'}\rangle\langle\psi_m| A_i^\dagger A_j] = 0\ \forall\ m \neq m',\ \forall\ i, j.$$

Isso significa que $|\psi_{m'}\rangle\langle\psi_m|$, com $m \neq m'$ é ortogonal ao subespaço $S := span\{A_i^\dagger A_j,\ i, j\}$. ■

Exemplo 4: Seja o canal quântico $\mathcal{E}$ dado pelos dois operadores de Kraus seguintes[3]:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{3}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Considerando o subespaço vetorial

$$S := span\{A_1^\dagger A_1, A_1^\dagger A_2, A_2^\dagger A_1, A_2^\dagger A_2\}$$

e seja

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observando que

$$tr[|1\rangle\langle 2| A_2^\dagger A_2] \neq 0$$

conclui-se que $|i\rangle\langle j|$ com $i \neq j$ não é ortogonal a S e portanto o canal quântico $\mathcal{E}$ possui capacidade erro-zero igual a zero.

[3]Para ver maiores detalhes sobre o canal quântico com esses dois operadores de Kraus, ver [2].

III. Conjectura: O teorema de Shemesh e a Capacidade erro-zero de canais quânticos com dois operadores de Kraus

O teorema de Shemesh apresenta critério garantindo que dadas duas matrizes quadradas, elas possuem um autovetor comum, bem como um critério para uma matriz ter um autovetor em um dado subespaço.

Teorema 4: **(Shemesh)** Sejam $A_1,\ A_2 \in M_d(\mathbb{C})$. Então A_1 e A_2 possui autovetores comum se, e somente se, o subespaço

$$\mathcal{M} = \cap_{k,l=1}^{d-1} ker\ [A_1^k, A_2^l]$$

é um subespaço não trivial, ou seja, algum $x \in \mathcal{M}$ com $0 \neq x \in \mathbb{C}^d$. O símbolo $[\cdot,\cdot]$ denota o comutador de matrizes e $k, l \in \{1, 2, ..., d-1\}$, já A_1^k e A_2^l denotam a k-ésima e l-ésima, potências de A_1 e A_2, respectivamente.

A demostração do teorema de Shemesh é construída em [1], Teorema 3.1.

Conjectura 1: **(Condição para capacidade erro-zero)** Seja um canal quântico $\mathcal{E} : M_d(\mathbb{C}) \longrightarrow M_d(\mathbb{C})$ com dois operadores de Kraus A_1 e A_2. Todo vetor $x \in \mathbb{C}^d$ pertence ao subespaço

$$\mathcal{M} = \cap_{k,l=1}^{d-1} ker\ [A_1^k, A_2^l], \tag{8}$$

se, e somente se, a capacidade erro-zero do canal $\mathcal{E}$ é positiva.

Exemplo 5: O canal *Phase Flip* num espaço de Hilbert de dimensão 2 é caracterizado pelos operadores de Kraus

$$A_1 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

O canal pode transmitir um bit por uso do canal com probabilidade de erro-zero igual a 1, conforme a construção feita no Exemplo 2, ou seja, a capacidade erro-zero é positiva. Ademais, observe que,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= ker\ [A_1, A_2] = ker\{A_1A_2 - A_2A_1\} \\ &= ker\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \end{aligned}$$

dessa forma qualquer vetor em $\mathbb{C}^2$ pertence a $\mathcal{M}$. Logo a condição apresentada da Conjectura 1, assegura mais uma vez que a capacidade erro-zero deste canal é positiva.

Exemplo 6: O canal *Bit Flip* num espaço de Hilbert de dimensão 2 é caracterizado pelos dois operadores de Kraus

$$A_1 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O canal pode transmitir um bit por uso do canal com probabilidade de erro-zero igual a 1, ou seja, capacidade erro-zero positiva.[4] Note que,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= ker\ [A_1, A_2] = ker\{A_1A_2 - A_2A_1\} \\ &= ker\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \end{aligned}$$

de tal forma que qualquer vetor em $\mathbb{C}^2$ pertence a $\mathcal{M}$. Logo a conjectura apresentada na Conjectura 1, assegura mais uma vez que a capacidade erro-zero deste canal é positiva.

Exemplo 7: O canal *Amplitude Damping* num espaço de Hilbert de dimensão 2 é caracterizado pelos dois operadores de Kraus

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A capacidade erro-zero desse canal é igual a zero, conforme a discussão apresentada no Exemplo 3. Além disso, observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= ker\ [A_1, A_2] = ker\{A_1A_2 - A_2A_1\} \\ &= ker\left\{\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} - \sqrt{p(1-p)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \end{aligned}$$

de tal forma que nem todo vetor $x \in \mathbb{C}^2$ pertence a $\mathcal{M}$ e a capacidade erro-zero do canal é igual a zero, em conformidade com o resultado apresentado na Conjectura 1.

Exemplo 8: O canal quântico $\mathcal{E}$ dado pelos dois operadores de Kraus:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{e}\ A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{3}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

tem capacidade erro-zero igual a zero, visto no Exemplo 4. Além disso, observe que nem todo vetor $\mathbb{C}^3$ pertence ao subespaço

$$\mathcal{M} = \cap_{k,l=1}^{2} ker\ [A_1^k, A_2^l] \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

e pela Conjectura 1, reafirma-se que capacidade erro-zero do canal é igual a zero.

IV. Conclusões

Neste artigo, foi apresentada uma conjectura que relaciona o teorema de Shemesh e a capacidade erro-zero de canais quânticos. A demostração da mesma ainda é uma questão em aberto e depende de ajustes matemáticos.

Foram também discutidos alguns resultados envolvendo capacidade erro-zero de canais quânticos, tais como duas condições para que o canal quântico tenha capacidade erro-zero positiva. Ao passo que estas condições foram utilizadas para verificar a capacidade erro-zero do canal de despolarização e do canal do Exemplo 4.

Além disso, também foi enunciado o teorema de Shemesh, o qual juntamente com exemplos apresentados no artigo, motivaram a elaboração da conjectura.

Ademais, a concretização da relação entre o teorema de Shemesh e a capacidade erro-zero de canais quânticos aqui conjecturada, se torna uma condição para capacidade erro-zero de canais quânticos. Ampliando os olhares, essa relação pode abrir um leque de possibilitadas imediatas de estudos

[4] Para ver maiores detalhes sobre o cálculo da capacidade erro-zero do canal *Bit Flip*, ver [4]

e novas relações, por exemplo, entre a capacidade erro-zero e as álgebras com identidades polinomiais, as chamadas PI-álgebras.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

[1] Dan Shemesh. *Common Elgenvectors of Two Matrices,* Department of Mathematics, Technion - Israel Institute of Technolog, 1984.

[2] A. Jamiolkowski, *On applications of PI-algebras in the analysis of quantum channels,* International Journal of Quantum Information, vol. 10, n. 8, 2012.

[3] M. Bialonczyk, A. Jamiolkowski and Karol Zyczkowski, *Application of Shemesh theorem to quantum channels*, Journal of Mathematical Physics, 59, 102204, 2018.

[4] Rex A. C. Medeiros and F. M. de Assis, *Quantum Zero-Error Capacity*, International Journal of Quantum Information, vol. 3, n. 1, pp. 135-139, 2005.

[5] Mark M. Wilde, *From Classical to Quantum Shannon Theory*, Cambridge University Press, 2019.

[6] Rex A. C. Medeiros and F. M. de Assis, "Capacidade erro-zero de canais quânticos e estados puros",*XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT 2013*, Fortaleza, Ceará, Brasil, 2013.

[7] Rex A. C. Medeiros, R. Alleaume, G. Cohen, and F. M. de Assis, "Zero-error capacity of quantum channels and noiseless subsystems," *IEEE International Telecommunications Symposium,* pp. 900 - 905, 2006.

[8] E. B. Guedes, F. M. de Assis and Rex A.C. Medeiros, *Quantum Zero-Error Information Theory,* Springer, 2016.

[9] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information,* Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[10] Ved P. Gupta, Prabha Mandayam e V.S Sunder, *The Functional Analysis of Quantum Information Theory,* Springer, 2015.

[11] Newton Loeben, *Espaço Atrator para Operadores Completamente Positivos de Dimensão Finita*, 2018, 76f, Dissertação (Mestrado em Matemática) pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.