

Aproximações mais Precisas para Somas de Envoltórias em Regime de Alta SNR

Victor Gonçalves de Carvalho Feitosa Perim, Francisco Raimundo Albuquerque Parente,
Fernando Darío Almeida García e José Cândido Silveira Santos Filho

Resumo—Variáveis aleatórias não-negativas são amplamente usadas para modelar envoltórias de sinais em sistemas de comunicação. No receptor, essas envoltórias são frequentemente combinadas em uma soma, cuja descrição estatística em termos da função densidade de probabilidade e da função de distribuição acumulada é usada na análise de métricas de desempenho essenciais como taxa de erro de *bit* e probabilidade de interrupção. Em geral, porém, a formulação exata dessas estatísticas possui difícil tratamento matemático, um problema que pode ser contornado por meio de soluções aproximadas. Neste trabalho, um novo método de aproximação para estatísticas da soma de envoltórias é proposto. Além de não impor qualquer restrição quanto à quantidade de parâmetros da distribuição candidata aproximada, o novo método fornece um ajuste mais preciso em regime de média a alta relação sinal-ruído do que outros métodos disponíveis na literatura. Resultados numéricos ilustram a melhoria trazida pelas aproximações propostas quando comparadas com o estado da arte.

Palavras-Chave—Alta relação sinal-ruído, probabilidade de interrupção, soma de envoltórias, taxa de erro de *bit*.

Abstract—Nonnegative random variables are widely used to model signal envelopes in communication systems. At the receiver, these envelopes are often combined into a sum, whose statistical description in terms of the probability density function and the cumulative distribution function is used in the analysis of essential performance metrics such as bit-error rate and outage probability. In general, however, the exact formulation of these statistics is difficult to handle mathematically, a problem that can be circumvented through approximate solutions. In this work, a new approximation method for the statistics of the sum of envelopes is proposed. In addition to not posing any restriction on the number of parameters for the approximate candidate distribution, the new method provides a more precise fit at medium to high signal-to-noise ratio regime than other methods available elsewhere in the literature. Numerical results illustrate the improvement attained by the proposed approximations when compared with the state of the art.

Keywords—Bit-error rate, high signal-to-noise ratio, outage probability, sum of envelopes.

I. INTRODUÇÃO

Somas de variáveis aleatórias (VAs) não-negativas aparecem em diversos cenários na área de telecomunicações e

V. G. C. F. Perim, F. R. A. Parente, F. D. A. García e J. C. S. Santos Filho fazem parte do Wireless Technology Laboratory, Departamento de Comunicações, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, SP 13083-852, Brasil (e-mails: {victorp, parente, ferdaral, candido}@decom.fee.unicamp.br).

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. O trabalho de F. R. A. Parente foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) com Processo No. 2018/25009-4. O trabalho de F. D. A. García foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) com Processo No. 2021/03923-9.

processamento de sinais. Exemplos incluem tanto aplicações clássicas, como esquemas de combinação de diversidade e equalização [1], quanto aplicações emergentes, como comunicação por superfícies inteligentes reconfiguráveis, previstas para as redes móveis de sexta geração [2]. Nesses casos, VAs não-negativas são usadas para descrever o comportamento aleatório de envoltórias de sinais, cuja soma no receptor pode ser caracterizada estatisticamente em termos da função densidade de probabilidade (PDF, do inglês *probability density function*) e da função de distribuição acumulada (CDF, do inglês *cumulative distribution function*). Infelizmente, porém, a formulação exata dessas estatísticas é dada em termos de integrais multidimensionais cuja solução se torna inviável à medida que o número de VAs na soma cresce.

Devido à complexidade analítica e ao alto custo computacional inerentes à formulação estatística exata, diversos métodos têm sido propostos na literatura para obter soluções aproximadas. As primeiras aproximações datam dos trabalhos pioneiros de Nakagami, que propôs uma aproximação para somas de VAs Nakagami- m independentes e identicamente distribuídas (i.i.d., do inglês *independent and identically distributed*) usando como candidata à aproximação a própria VA Nakagami- m [3]. Esse trabalho de Nakagami inspirou diversas outras propostas de aproximação nos anos seguintes. Por exemplo, uma aproximação Nakagami- m foi proposta considerando-se a soma de múltiplas envoltórias Nakagami- m independentes e arbitrariamente distribuídas (i.a.d., do inglês *independent and arbitrarily distributed*) [4]. Posteriormente, propôs-se usar o modelo generalizado de desvanecimento α - μ para aproximar a soma de envoltórias Nakagami- m i.a.d. [5] e a soma de envoltórias α - μ i.i.d. [6]. É oportuno ressaltar que as aproximações supracitadas são obtidas com base em um método conhecido como casamento de momentos (MoM, do inglês *moment matching*), em que os parâmetros da PDF aproximada são ajustados de modo a atender a determinados momentos estatísticos da soma exata. Mais recentemente, outros métodos de aproximação têm sido desbravados. Em [7], por exemplo, os autores propuseram duas aproximações para a soma de VAs α - μ i.i.d. e i.a.d. por meio da série truncada de Puiseux [8]. Outra abordagem recente de aproximação prioriza o ajuste na região de alta relação sinal-ruído (SNR, do inglês *signal-to-noise ratio*) média, um regime crucial quando se avaliam métricas de desempenho essenciais como taxa de erro de *bit* (BER, do inglês *bit-error rate*) e probabilidade de interrupção (OP, do inglês *outage probability*).¹

¹O regime de alta SNR retrata a eficiência energética de cada sistema de comunicação quando do cumprimento adequado de requisitos de BER ou OP, sendo pois uma condição padrão para avaliar e comparar esses sistemas [14].

Essa abordagem, denominada casamento de assíntotas (AM, do inglês *asymptotic matching*) [1], [9], consiste em forçar que as assíntotas (em torno de zero) da PDF da soma exata e da PDF aproximada sejam idênticas, o que equivale a fazer com que as PDFs coincidam assintoticamente quando a SNR média tende a infinito. O ajuste obtido na região de média a alta SNR é muito superior àquele de outros métodos existentes. Por outro lado, como mostrado a seguir, há espaço para melhorias.

Neste trabalho, com o intuito de oferecer aproximações mais precisas do que as disponíveis na literatura na região de média a alta SNR, propõe-se um novo método de aproximação de estatísticas de somas de VAs não-negativas. O método consiste em explorar o primeiro e o segundo termos da expansão em série da PDF da soma, com o intuito de minimizar a disparidade entre a solução exata e a solução aproximada. Conforme detalhado nas próximas seções, isso pode ser atingido resolvendo-se um problema de otimização, que fornecerá os parâmetros ótimos da distribuição candidata que melhor se ajustará à distribuição exata. Enquanto alguns trabalhos fornecem resultados exatos para estatísticas de somas de VAs quadráticas, caso particular da análise aqui proposta, este artigo foca no estudo de somas de quaisquer VAs i.a.d. não-negativas, uma proposta mais abrangente que contempla o caso intrincado de somas de envoltórias.

No texto que segue, letra minúscula em negrito denota vetor (por exemplo, \mathbf{v}); letra maiúscula em negrito, matriz (por exemplo, \mathbf{X}); $\mathbf{0}$, o vetor nulo; $\mathbb{E}[\cdot]$, valor esperado; $*$, convolução; $\Gamma(\cdot)$, a função gama; \mathbb{C} , o conjunto de números complexos; $j = \sqrt{-1}$, a unidade imaginária; e \sim , “assintoticamente igual a (em torno de zero)”, ou seja, $f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

II. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja R a soma de M VAs não-negativas i.a.d. R_i , ou seja,

$$R = \sum_{i=1}^M R_i \approx \tilde{R}, \quad (1)$$

em que \tilde{R} é uma VA que aproxima a soma R . Em geral, a formulação exata para as estatísticas da soma R são de difícil tratamento matemático, o que tem motivado a busca por soluções aproximadas mais simples. Neste trabalho, um novo método de aproximação é proposto, capaz de fornecer um excelente ajuste à curva exata e superar outros métodos de aproximação disponíveis na literatura. Antes de entrar na análise do novo método, é oportuno revisitar as soluções exata e aproximada existentes.

III. SOLUÇÕES EXISTENTES

A. Solução Exata

Há diferentes formas de obter a PDF exata da soma de VAs. A seguir, os principais métodos são sucintamente revisitados: o Item 1) contempla a análise via convolução e Integral de Brennan e o Item 2) contempla a análise via função geradora de momentos (MGF, do inglês *moment-generating function*).

1) *Convolução e Integral de Brennan*: Quando os termos da soma são VAs não-negativas, como é o caso de envoltórias, é possível obter a PDF da soma exata usando-se duas abordagens: (i) a primeira é a abordagem tradicional, por meio da convolução das PDFs marginais, e (ii) a segunda é uma abordagem geométrica, proposta por Brennan [10]. Para a soma de M VAs, ambas as abordagens consistem em uma integração de dimensão $M - 1$ da PDF conjunta das VAs na soma. Entretanto, diferentemente da abordagem tradicional em (i), a abordagem geométrica em (ii) pode ser estendida para o caso em que as envoltórias na soma são mutuamente correlacionadas. Nesse caso, a PDF da soma R usando-se a formulação proposta por Brennan pode ser expressa por [9]

$$f_R(r) = \int_0^r \int_0^{r-r_M} \cdots \int_0^{r-\sum_{i=3}^M r_i} f_{R_1, R_2, \dots, R_M}(r - \sum_{i=2}^M r_i, r_2, \dots, r_M) dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M, \quad (2)$$

em que $f_{R_1, R_2, \dots, R_M}(\cdot, \dots, \cdot)$ denota a PDF conjunta das VAs R_1, R_2, \dots, R_M na soma. Aqui, como as VAs são independentes, a PDF conjunta consiste no produto das PDFs marginais, ou seja, $f_{R_1, R_2, \dots, R_M}(r_1, r_2, \dots, r_M) = \prod_{i=1}^M f_{R_i}(r_i)$. A integral multidimensional em (2) tem solução em forma fechada apenas para algumas distribuições estatísticas. Além disso, a implementação por meio de rotinas de integração numérica em pacotes computacionais como Mathematica e MATLAB mostra-se demorada, suscetível a problemas de convergência, ou mesmo impraticável para além de um certo número de VAs na soma (por exemplo, $M \geq 5$).

2) *Função Geradora de Momentos*: A MGF de uma VA R_i é dada por $\mathcal{M}_{R_i}(s) \triangleq \mathbb{E}[\exp(sR_i)]$, em que $s \in \mathbb{C}$. Como a PDF da soma de VAs independentes consiste na convolução das PDFs marginais, a MGF da soma, $\mathcal{M}_R(s)$, consiste no produto das MGFs correspondentes, isto é, $\mathcal{M}_R(s) = \prod_{i=1}^M \mathcal{M}_{R_i}(s)$. Assim, a PDF da soma R é obtida pela integral de Fourier-Mellin como [11, eq. (4.3)]

$$f_R(r) = \left(\frac{1}{2\pi j} \right) \oint_{\mathcal{L}} \exp(-sr) \mathcal{M}_R(s) ds, \quad (3)$$

em que \mathcal{L} é o contorno de Bromwich. Embora haja alguns trabalhos que analisam de forma exata as estatísticas da soma utilizando a MGF (veja, por exemplo, [12], [13]), esses trabalhos consideram a soma de VAs i.i.d. muito simples (como Weibull e Rice), restrita portanto a cenários limitados de propagação. Para cenários mais abrangentes, entretanto, como aqueles vislumbrados para sistemas emergentes de comunicação, a análise exata da PDF da soma envolve um tratamento analítico bastante intrincado, especialmente quando as VAs na soma são modeladas por distribuições generalizadas do tipo α - μ , η - μ e κ - μ , tornando o método via MGF pouco atrativo.

B. Solução Aproximada via AM

Devido às dificuldades observadas para obter a solução exata, diversas soluções aproximadas têm sido propostas na literatura, conforme apresentado na Introdução. Mais recentemente, foi proposta uma técnica conhecida como AM [1], [9], capaz de fornecer um ótimo ajuste assintótico quando a SNR média tende a infinito. Nessa técnica, a assíntota da PDF da soma exata $f_R(r) \sim a_0 r^{b_0}$ é casada com a assíntota da PDF

aproximada $f_{\tilde{R}}(r) \sim \tilde{a}_0 r^{\tilde{b}_0}$, fazendo-se

$$\tilde{a}_0 = a_0 \quad (4a)$$

$$\tilde{b}_0 = b_0. \quad (4b)$$

Quando a distribuição candidata possui mais de dois parâmetros, o casamento assintótico é complementado usando-se o método MoM para obter os parâmetros restantes [1], [9].

Apesar de o método AM fornecer uma aproximação ótima quando a SNR tende a infinito, ele não possui compromisso explícito com o ajuste para quaisquer valores finitos de SNR. Neste trabalho, é proposto um novo método capaz de aprimorar o ajuste na região de média a alta SNR, enquanto mantém um ajuste assintoticamente ótimo quando a SNR tende a infinito. Esse método é introduzido a seguir.

IV. SOLUÇÃO APROXIMADA PROPOSTA

Antes de apresentar a solução proposta para aproximar as estatísticas da soma, é oportuno apresentar alguns resultados preliminares que servirão como base analítica para o novo método geral de ajuste.

A. Preliminares

Considere que a PDF $f_{R_i}(\cdot)$ de cada VA R_i na soma, a PDF $f_R(\cdot)$ da soma exata R e a PDF $f_{\tilde{R}}(\cdot)$ da soma aproximada \tilde{R} são expressas em série de Maclaurin, por $f_{R_i}(r) = \sum_{n_i=0}^{\infty} a_{i,n_i} r^{b_{i,n_i}}$, $f_R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{b_n}$ e $f_{\tilde{R}}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n r^{\tilde{b}_n}$. As VAs na soma são mutuamente independentes, o que implica que a PDF da soma pode ser obtida a partir da convolução das PDFs marginais:

$$\begin{aligned} f_R(r) &= f_{R_1}(r) * \dots * f_{R_M}(r) \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_M=0}^{\infty} a_{1,n_1} r^{b_{1,n_1}} * \dots * a_{M,n_M} r^{b_{M,n_M}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Além disso, é possível mostrar que a convolução de múltiplos termos $a_{i,n_i} r^{b_{i,n_i}}$ gera um termo de mesmo formato, ou seja,

$$a_{1,n_1} r^{b_{1,n_1}} * \dots * a_{M,n_M} r^{b_{M,n_M}} = a r^b, \quad (6)$$

em que $a = a(n_1, \dots, n_M)$ e $b = b(n_1, \dots, n_M)$ são determinados em função do conjunto de índices $\{n_i\}_{i=1}^M$. Por simplicidade, define-se $\mathbf{n} \triangleq [n_1, n_2, \dots, n_M]$. Assim, após algumas manipulações algébricas, ora omitidas por brevidade, $a(\mathbf{n})$ e $b(\mathbf{n})$ são obtidos como [9, eq. (22)]

$$a(\mathbf{n}) = \frac{\prod_{i=1}^M [a_{i,n_i} \Gamma(1 + b_{i,n_i})]}{\Gamma\left(M + \sum_{i=1}^M b_{i,n_i}\right)} \quad (7a)$$

$$b(\mathbf{n}) = M - 1 + \sum_{i=1}^M b_{i,n_i}. \quad (7b)$$

Os termos a_{i,n_i} e b_{i,n_i} de cada PDF marginal $f_{R_i}(\cdot)$, necessários para determinar $a(\mathbf{n})$ e $b(\mathbf{n})$ em (7), já são conhecidos na literatura para algumas distribuições generalizadas. Em particular, eles são dados para os modelos α - μ , κ - μ e η - μ conforme em [9, eq. (13)], [9, eq. (14)] e [9, eq. (15)], respectivamente.

No caso do casamento assintótico simples realizado em (4), que usa apenas o primeiro termo da expansão em série da PDF da soma, a_0 e b_0 são obtidos a partir de (7) fazendo-se $\mathbf{n} = \mathbf{0}$. No novo método, porém, serão usados mais termos dessa expansão, de forma que as componentes n_i de \mathbf{n} assumirão também valores não-nulos.

B. Novo Método de Aproximação

O novo método proposto para aproximar somas de VAs tem o objetivo de oferecer um ajuste mais preciso na região de média a alta SNR média da distribuição exata. Isso pode ser obtido explorando-se os dois primeiros termos não-nulos da expansão em série da PDF da soma R em (1).

Inicialmente, seja a expansão em série de Maclaurin da PDF $f_R(\cdot)$ de R :

$$f_R(r) = \underbrace{a_0 r^{b_0} + a_1 r^{b_1}}_{\text{termos em estudo}} + a_2 r^{b_2} + \dots \quad (8)$$

O novo método consiste em aproximar a distribuição exata da soma por meio de uma distribuição candidata usando-se os termos $a_0 r^{b_0}$ e $a_1 r^{b_1}$: o primeiro termo fornecerá os elementos a_0 e b_0 para o casamento da assíntota e o segundo termo fornecerá os elementos a_1 e b_1 para um ajuste melhorado em média a alta SNR. Em comparação com o casamento de assíntotas em (4), o novo método de aproximação explora o segundo termo da expansão em (8), que possui o segundo maior peso na série (depois do primeiro termo). Além disso, a análise de métricas de desempenho importantes em função da SNR média, como BER e OP, é normalmente realizada em escala log-dB, de forma que uma boa aproximação para a solução exata seja precisa quando visualizada nessa escala. Com base nessa observação, propõe-se obter uma distribuição aproximada que seja, em escala log-dB, a mais próxima possível da distribuição exata. Isso impele avaliar a diferença entre o termo $\log(a_1 r^{b_1}) = \log(a_1) + b_1 \log(r)$ da PDF $f_R(\cdot)$ e o termo $\log(\tilde{a}_1 r^{\tilde{b}_1}) = \log(\tilde{a}_1) + \tilde{b}_1 \log(r)$ da PDF $f_{\tilde{R}}(\cdot)$.

Por conveniência, sejam os vetores \mathbf{v} e $\tilde{\mathbf{v}}$ definidos como

$$\mathbf{v} \triangleq [\log(a_1), b_1] \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} \triangleq [\log(\tilde{a}_1), \tilde{b}_1]. \quad (10)$$

Os elementos \tilde{a}_1 e \tilde{b}_1 , obtidos da expansão em série de Maclaurin da PDF aproximada candidata, são expressos em função dos P parâmetros $\{p_i\}_{i=1}^P$ da distribuição correspondente, de forma que pode-se escrever

$$\tilde{a}_1 = \tilde{a}_1(\mathbf{p}) \quad (11a)$$

$$\tilde{b}_1 = \tilde{b}_1(\mathbf{p}), \quad (11b)$$

em que \mathbf{p} é definido por $\mathbf{p} \triangleq [p_1, p_2, \dots, p_P]$. Os parâmetros da distribuição candidata que se ajustará melhor à distribuição exata serão obtidos através da minimização da norma euclidiana do vetor diferença $\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}$, tendo-se como restrição o critério AM em (4). Isso pode ser formalizado em notação matemática por meio do seguinte problema de otimização:

$$\mathbf{p}^\dagger = \arg \min_{\mathbf{p}} \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_2 \quad (12a)$$

$$\text{sujeito a } a_0 = \tilde{a}_0 \quad (12b)$$

$$b_0 = \tilde{b}_0, \quad (12c)$$

em que o vetor solução $\mathbf{p}^\dagger \triangleq [p_1^\dagger, p_2^\dagger, \dots, p_P^\dagger]$ contém os valores de parâmetros da PDF aproximada que melhor se ajusta à PDF exata da soma.

Como $\|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_2^2 = [\log(a_1) - \log(\tilde{a}_1(\mathbf{p}))]^2 + [b_1 - \tilde{b}_1(\mathbf{p})]^2$, para determinar \mathbf{p}^\dagger é necessário a princípio encontrar os elementos a_0 , b_0 , a_1 e b_1 da PDF exata da soma, conforme detalhado a seguir.

1) *Determinando-se a_0 e b_0* : Para encontrar os elementos a_0 e b_0 , note que b_{i,n_i} em (7) é uma função monotonicamente crescente com n_i [9], o que também vale para $b(\mathbf{n})$. Assim, o primeiro termo dessa expansão, que governa o comportamento assintótico da PDF, é sempre dado por

$$a_0 r^{b_0} = a(\mathbf{0}) r^{b(\mathbf{0})}, \quad (13)$$

o que implica que os elementos a_0 e b_0 na restrição do problema de otimização em (12) podem ser determinados por

$$a_0 = a(\mathbf{0}) \quad (14a)$$

$$b_0 = b(\mathbf{0}). \quad (14b)$$

2) *Determinando-se a_1 e b_1* : Para encontrar os elementos a_1 e b_1 , é preciso observar duas particularidades que podem surgir quando se avalia a convolução em (5). A primeira consiste na possibilidade de surgirem múltiplos termos de mesmo grau polinomial (ou seja, mesmo valor de $b(\mathbf{n})$) como resultado da convolução, enquanto a segunda consiste na possibilidade de haver termos nulos na expansão.

- Em relação à primeira particularidade, os termos de mesmo grau polinomial são somados, de modo que a_1 é a soma dos diferentes $a(\mathbf{n})$ cujos $b(\mathbf{n})$ têm mesmo valor, cada um dos quais gerado por um vetor de índices \mathbf{n} particular, e b_1 é o valor de $b(\mathbf{n})$ em questão. Por conveniência, seja L a quantidade de termos com mesmo valor de $b(\mathbf{n})$ observados da convolução em (5), e

$$\mathbf{X} = \arg \min_{\mathbf{n}} [b(\mathbf{n})] \quad (15a)$$

$$\text{sujeito a } b(\mathbf{n}) > b_k, \quad (15b)$$

em que \mathbf{X} é uma matriz $L \times M$ cujo elemento x_{li} representa o índice n_i da i -ésima VA na soma para a l -ésima solução, e b_k é um limiar inferior condicionante. A matriz solução \mathbf{X} pode ser usada para calcular os enésimos termos da expansão em série da PDF exata da soma fazendo-se

$$a_n = \sum_{l=1}^L a(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lM}) \quad (16a)$$

$$b_n = b(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1M}). \quad (16b)$$

Em particular, quando $b_k = b_0$ na restrição (15b), a_n e b_n em (16) são os próprios a_1 e b_1 , respectivamente. Assim,

$$b_k = b_0 \implies a_1 = a_n \quad \text{e} \quad b_1 = b_n. \quad (17)$$

- Em relação à segunda particularidade, é possível que o termo $a_1 r^{b_1}$ obtido inicialmente a partir de (17) seja nulo, devendo portanto ser descartado. Para isso, b_k na restrição (15b) deve ser feito maior que b_0 , de forma que a_n e b_n sejam recalculados usando-se b_k na restrição com $k \geq 1$. Esse cálculo se repete até a_n e b_n em (16) gerarem um termo $a_n r^{b_n}$ não nulo, o qual denotará $a_1 r^{b_1}$.

Como se observa a partir do exposto acima, é preciso determinar os termos $a_0 r^{b_0}$ e $a_1 r^{b_1}$ por meio de uma sequência de passos. Para isso, basta usar o Algoritmo a seguir, que fornece os elementos a_0 , b_0 , a_1 e b_1 da PDF exata da soma.

Após determinar a_0 , b_0 , a_1 e b_1 , escolhe-se uma PDF candidata (forma funcional) como aproximação. Essa PDF deve ser expandida em série de Maclaurin de forma a obter os elementos \tilde{a}_0 , \tilde{b}_0 , \tilde{a}_1 e \tilde{b}_1 em função dos parâmetros da distribuição. Em posse desses resultados, aplica-se finalmente o critério de minimização em (12), o qual irá fornecer o vetor

Algoritmo: Cálculo dos elementos a_0 , b_0 , a_1 e b_1

Dados: série de Maclaurin da PDF das VAs na soma

Resultado: elementos a_0 , b_0 , a_1 e b_1 não-nulos

```

1  $a_0 \leftarrow a(\mathbf{0});$ 
2  $b_0 \leftarrow b(\mathbf{0});$ 
3  $n \leftarrow 0;$ 
4 faça
5    $n \leftarrow n + 1;$ 
6    $\mathbf{X} \leftarrow \arg \min_{\mathbf{n}} [b(\mathbf{n})]$ 
       sujeito a  $b(\mathbf{n}) > b_{n-1};$ 
7    $a_n \leftarrow \sum_{l=1}^L a(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lM});$ 
8    $b_n \leftarrow b(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1M});$ 
9 enquanto  $a_n = 0;$ 
10  $a_1 = a_n;$ 
11  $b_1 = b_n;$ 

```

\mathbf{p}^\dagger contendo os valores dos P parâmetros da distribuição candidata que melhor se ajusta à distribuição exata da soma. Em termos de implementação, há vários pacotes computacionais disponíveis que podem auxiliar na solução do problema.

Nota 1: Dada a natureza do método de aproximação proposto, recomenda-se que, depois de encontrado o valor de a_1 da PDF da soma, escolha-se como PDF candidata aquela que forneça o elemento \tilde{a}_1 com mesmo sinal (positivo ou negativo) de a_1 , o que garantirá que a distribuição candidata irá fornecer o melhor ajuste possível através do método. Além disso, o método não possui qualquer restrição quanto à quantidade de parâmetros que a distribuição aproximada deva possuir, de forma que a PDF candidata pode ter dois ou mais parâmetros [9].

Nota 2: Diferentemente de algumas propostas de aproximação disponíveis na literatura, o novo método fornece uma função candidata $f_{\tilde{R}}(\cdot)$ que é matematicamente uma PDF válida, ou seja, $f_{\tilde{R}}(r) \geq 0$ e $\int_0^\infty f_{\tilde{R}}(r) dr = 1$. Ademais, as aproximações obtidas oferecem um excelente ajuste em regime de média a alta SNR, inclusive na região assintótica ($\text{SNR} \rightarrow \infty$), este último sendo assegurado pelas restrições em (12b) e (12c) oriundas do critério AM.

C. Estudo de Caso

Para ilustrar de forma genérica a aplicação do método proposto, considere uma PDF candidata com três parâmetros de ajuste: p_1 , p_2 e p_3 .² A partir de (12), note que dois parâmetros (por exemplo, p_1 e p_2) podem ser determinados diretamente das restrições em (12b) e (12c). Assim, falta determinar o terceiro parâmetro (p_3), que pode ser obtido com o grau de liberdade restante em (12a). Nesse caso, relaxando-se a notação em (11) de $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_1(\mathbf{p})$ e $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_1(\mathbf{p})$ para $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_1(p_3)$ e $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_1(p_3)$, o problema de otimização com múltiplas variáveis e restrições reduz-se a um problema com uma única variável e sem restrições, ou seja,

$$p_3^\dagger = \arg \min_{p_3} \left\{ [\log(a_1) - \log(\tilde{a}_1(p_3))]^2 + [b_1 - \tilde{b}_1(p_3)]^2 \right\}, \quad (18)$$

em que foi usado $\arg \min \|\cdot\|_2 = \arg \min \|\cdot\|_2^2$.

A solução do problema em (18) finalmente fornece o valor do parâmetro que faltava para obter a PDF aproximada que melhor se ajusta à PDF exata da soma.

²Há diversas distribuições de desvanecimento com três parâmetros, a exemplo dos modelos α - μ , η - μ e κ - μ .

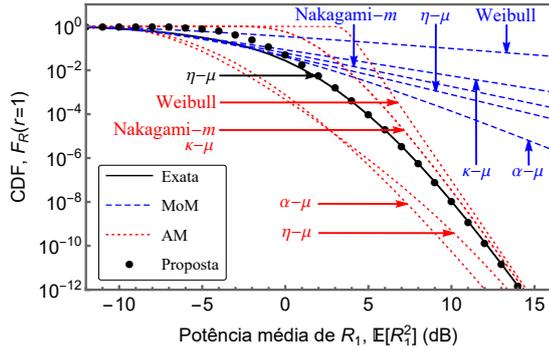


Fig. 1. CDF da soma de uma VA η - μ R_1 (com parâmetros $\eta = 0,8$ e $\mu = 5,2$) e uma VA Nakagami- m R_2 (com parâmetro $m = 0,6$), considerando-se o desbalanceamento de potência $\mathbb{E}[R_1^2]/\mathbb{E}[R_2^2] = 3$.

V. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, as aproximações propostas são comparadas com as aproximações obtidas via MoM e AM. A solução exata foi gerada por meio de integração numérica usando-se (2).

As Figs. 1 e 2 apresentam as CDFs exatas e aproximadas da soma de duas e três VAs i.a.d., respectivamente. Considerando-se um limiar de referência da soma escolhido arbitrariamente como $r = 1$, as curvas de CDF são plotadas em termos da potência média de R_1 , a qual é uma VA do tipo η - μ na Fig. 1 e uma VA do tipo κ - μ na Fig. 2. Além disso, linhas sólidas, linhas com tracejado longo, linhas pontilhadas e círculos representam, respectivamente, a CDF exata da soma, as aproximações via MoM, as aproximações via AM e a aproximação proposta. Mais especificamente, a Fig. 1 mostra a CDF da soma de uma variável η - μ e uma variável Nakagami- m . Nesse caso, com base na Nota 1 (Seção IV-B), utiliza-se a variável η - μ como distribuição candidata, de modo que o termo \tilde{a}_1 correspondente possua o mesmo sinal (negativo) que o termo a_1 da soma exata. A Fig. 2 mostra a CDF da soma de uma variável κ - μ , uma variável Nakagami- m e uma variável Weibull. Nesse caso, a distribuição κ - μ é usada como candidata, de modo que, novamente, \tilde{a}_1 possua o mesmo sinal (agora positivo) de a_1 . Note que algumas distribuições candidatas via MoM ou AM geram a mesma aproximação para a CDF exata, o que está indicado nas Figs. 1 e 2 rotulando-se as setas com o nome de mais de uma distribuição aproximada.

Em ambas as figuras, observa-se que a técnica proposta fornece um excelente ajuste na região de média a alta SNR, muito superior ao dos métodos MoM e AM, como esperado. Em particular, note que, embora equivalente ao método AM em termos assintóticos, o novo método é muito mais preciso para valores práticos de requisito de probabilidade de interrupção (digamos, $F_R(r) < 10^{-4}$). Vale ressaltar que o método proposto é geral, aplicando-se a uma quantidade arbitrária de VAs i.a.d. na soma.

VI. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi proposto um método geral para aproximar as funções estatísticas da soma de VAs não-negativas. O método consiste em explorar os dois primeiros termos da expansão em série de Maclaurin da PDF da soma a fim de ajustar os parâmetros da distribuição aproximada. As

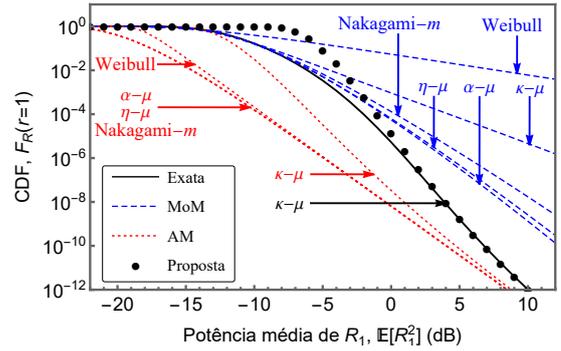


Fig. 2. CDF da soma de uma VA κ - μ R_1 (com parâmetros $\kappa = 6,8$ e $\mu = 2,1$), uma VA Nakagami- m R_2 (com parâmetro $m = 1,3$) e uma VA Weibull R_3 (com parâmetro $\alpha = 2,2$), considerando-se os desbalanceamentos de potência $\mathbb{E}[R_1^2]/\mathbb{E}[R_2^2] = 2$ e $\mathbb{E}[R_1^2]/\mathbb{E}[R_3^2] = 5$.

aproximações obtidas por meio do novo método são capazes de fornecer um excelente ajuste para média a alta SNR, superando outras abordagens disponíveis na literatura. Em trabalhos futuros, almeja-se realizar a análise de complexidade para a técnica proposta e explorar o impacto que os demais termos da expansão em série têm sobre as aproximações.

REFERÊNCIAS

- [1] F. R. A. Parente and J. C. S. Santos Filho, "Asymptotically exact framework to approximate sums of positive correlated random variables and application to diversity-combining receivers," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 8, no. 4, pp. 1012–1015, Aug. 2019.
- [2] C. Pan *et al.*, "Reconfigurable intelligent surfaces for 6G systems: Principles, applications, and research directions," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 59, no. 6, pp. 14–20, Jun. 2021.
- [3] M. Nakagami, "The m -distribution—A general formula of intensity distribution of rapid fading," *Stat. Methods Radio Wave Propag.*, vol. 26, no. 2, pp. 3–36, Apr. 1960.
- [4] J. C. S. Santos Filho and M. D. Yacoub, "Nakagami- m approximation to the sum of M non-identical independent Nakagami- m variates," *IEEE Electron. Lett.*, vol. 40, no. 15, pp. 951–952, Jul. 2004.
- [5] D. B. da Costa, M. D. Yacoub, and J. C. S. Santos Filho, "An improved closed-form approximation to the sum of arbitrary Nakagami- m variates," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, no. 6, pp. 3854–3858, Nov. 2008.
- [6] D. B. da Costa, M. D. Yacoub, and J. C. S. Santos Filho, "Highly accurate closed-form approximations to the sum of α - μ variates and applications," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 7, no. 9, pp. 3301–3306, Sep. 2008.
- [7] M. Payami and A. Falahati, "Accurate variable-order approximations to the sum of α - μ variates with application to MIMO systems," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 20, no. 3, pp. 1612–1623, Mar. 2021.
- [8] D. Y. Grigor'ev and M. F. Singer, "Solving ordinary differential equations in terms of series with real exponents," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 327, no. 1, pp. 329–351, Jan. 1991.
- [9] V. Perim, J. D. V. Sánchez and J. C. S. Santos Filho, "Asymptotically exact approximations to generalized fading sum statistics," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 19, no. 1, pp. 205–217, Jan. 2020.
- [10] D. G. Brennan, "Linear diversity combining techniques," *Proc. IRE*, vol. 47, no. 6, pp. 1075–1102, Jun. 1959.
- [11] J. L. Schiff, *The Laplace Transform: Theory and Applications*, 1st ed. New York: Springer, 1999.
- [12] F. D. A. García, F. R. A. Parente, G. Fraidenaich, and J. C. S. Santos Filho, "Light exact expressions for the sum of Weibull random variables," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 10, no. 11, pp. 2445–2449, Nov. 2021.
- [13] F. D. A. García, H. R. C. Mora, and N. V. O. Garzón, "Novel expressions for Ricean sum distributions and densities," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 25, no. 11, pp. 3513–3517, Nov. 2021.
- [14] Z. Wang and G. B. Giannakis, "A simple and general parameterization quantifying performance in fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 8, pp. 1389–1398, Aug. 2003.