

Um estudo numérico do expoente de Lyapunov do Mapa Hénon com filtro FIR

Vinicius S. Borges e Marcio Eisencraft

Resumo—Ao aplicar sinais caóticos em sistemas de comunicações, é fundamental controlar e eventualmente limitar a banda espectral ocupada por esses sinais. Uma possibilidade para atingir esse objetivo é utilizar filtros de tempo discreto na realimentação de sistemas dinâmicos. Porém, a introdução desses filtros pode destruir as propriedades da dinâmica caótica do mapa original. Sendo assim, neste trabalho, faz-se um estudo numérico dos expoentes de Lyapunov dos sinais gerados pelo mapa de Hénon bidimensional acrescido de filtros passa-baixas de resposta ao impulso finita na realimentação. Os resultados de simulação mostram que os coeficientes do filtro afetam de forma significativa o comportamento dos sinais gerados.

Palavras-Chave—Sinais caóticos, sistemas não lineares, sistemas de tempo discreto.

Abstract—When applying chaotic signals in communications systems, it is essential to control and limit the spectral bandwidth occupied by these signals. One possibility to achieve this goal is to use discrete-time filters in the feedback loop of dynamical systems. However, the introduction of these filters may destroy the chaotic dynamics properties of the signals generated by the original map. Thus, this paper presents a numerical study of the Lyapunov exponents of the two-dimensional Hénon map with a low-pass filter with finite impulse response added in the feedback loop. The simulation results show that the filter coefficients significantly affect the dynamics of the generated signals.

Keywords—Chaotic signals, non-linear systems, discrete-time systems.

I. INTRODUÇÃO

Um sinal caótico tem três características principais: limitação em amplitude, aperiodicidade e dependência sensível com as condições iniciais (DSCI) [1]. Estas propriedades têm estimulado propostas para a aplicação de sinais caóticos em Telecomunicações e Processamento de Sinais desde os anos 1990 após o trabalho de Pecora e Carroll [2] que mostrou que dois sistemas idênticos, gerando sinais caóticos, poderiam ser sincronizados, apesar da DSCI. Desde então, muitas aplicações possíveis, tais como em modulações [3, 4], marca d'água [5], *compressive sensing* [6], codificação [7] e criptografia [8, 9] de imagens, comunicações de banda ultralarga [10] e, recentemente na 5ª geração da telefonia celular (5G) [11, 12].

Pesquisas recentes mostram uma evolução das aplicações de sinais caóticos no sentido de tornar sua aplicação possível em cenários realistas. Por exemplo, o uso de filtros adaptativos *kernel* em sistemas de comunicação usando sinais caóticos [13] e a resiliência desses sistemas na presença de distorções, ruído, restrições de largura de banda e atrasos no canal de comunicação [4, 14, 15].

Vinicius Borges, Engenharia Elétrica, Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, e-mail: viniciusb@usp.br; Marcio Eisencraft, Engenharia Elétrica, Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, e-mail: marcioft@usp.br

Um problema relevante quando se trata de aplicar sinais caóticos em problemas de comunicação é a sua largura de banda. Uma vez que os canais de transmissão são sempre limitados em banda [16], é necessário conhecer e controlar a largura de banda dos sinais caóticos transmitidos.

Eisencraft et. al., em [17], propuseram a utilização de um filtro linear de tempo discreto incorporado a um gerador de sinais caóticos como forma de controlar a largura de banda dos sinais gerados. Depois disso, demonstrou-se que a inserção do filtro não afeta a sincronização caótica [18, 19]. No entanto, permanece a questão de saber se os sinais gerados ainda são caóticos, uma vez que os filtros inseridos alteram o mapa gerador de sinais caóticos original.

A questão da natureza caótica dos sinais transmitidos por esse sistema foi abordada inicialmente em [20, 21]. No entanto, ainda não foram determinados os requisitos sobre os coeficientes de filtragem para preservar a natureza caótica do sinal transmitido e manter a sincronização.

No presente artigo, estende-se os resultados anteriores, analisando-se de uma forma mais detalhada e sistemática como o filtro afeta a dinâmica dos sinais transmitidos. Para várias ordens e frequências de corte calculam-se os expoentes de Lyapunov [1] e verifica-se se os sinais gerados são caóticos. No projeto desses filtros, consideram-se janelas de Hamming e de Blackman [22].

O artigo está dividido em 5 seções. Na Seção II define-se e caracteriza-se o sistema dinâmico não linear analisado. Na Seção III é descrito o método de cálculo para o obtenção do expoente de Lyapunov. Na Seção IV são colocados os principais resultados do trabalho e, por fim, na Seção V esboçam-se as conclusões e sugerem-se trabalhos futuros.

II. MAPA DE HÉNON

Considere o mapa de Hénon [23]

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \alpha - x_1(n)^2 + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) \end{cases} \quad (1)$$

em que α e β são parâmetros reais.

Na Figura 1(a) ilustra-se um trecho do sinal $x_1(n)$, gerado a partir das iterações de (1) para $x_1(0) = x_2(0) = 0$ (linha azul) e $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0,001$ (linha vermelha) e parâmetros $\alpha = 1,4$ e $\beta = 0,3$. Pode-se notar a característica aperiódica e a DSCI desses sinais produzidos pelo mapa. A partir de aproximadamente $n = 25$ as órbitas já visualmente divergem. A Figura 1(b) é um exemplo de sinal periódico obtido com a equação (1) com valores de $\alpha = 0,9$ e $\beta = 0,3$ e mesmas condições iniciais.

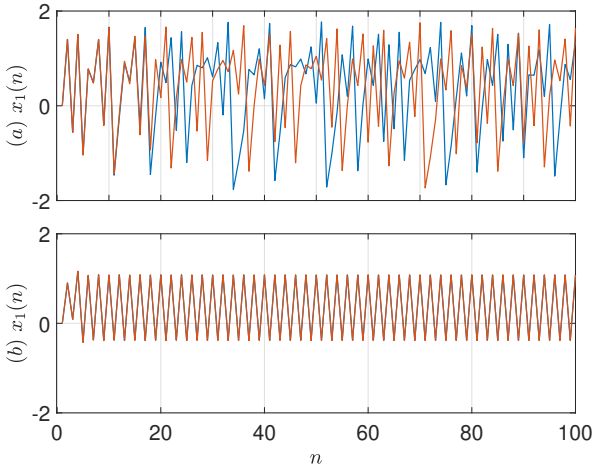


Fig. 1. Trechos de $x_1(n)$ obtido de (1) com $x_1(0) = x_2(0) = 0$ (linha azul) e $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0,001$ (linha vermelha) e parâmetros (a) $\alpha = 1,4$ e $\beta = 0,3$ e (b) $\alpha = 0,9$ e $\beta = 0,3$.

Eisencraft et. al., [17] propuseram acrescentar filtros digitais de forma a limitar a banda dos sinais caóticos gerados. A ideia é filtrar $x_1(n)$ utilizando um filtro passa-baixas de resposta ao impulso finita (FIR - *Finite Impulse Response*) [22] gerando um sinal $x_3(n)$ e realimentá-lo no sistema. Ou seja,

$$x_3(n) = \sum_{j=0}^{N_S-1} c_j x_1(n-j), \quad (2)$$

em que $c_j, 0 \leq j \leq N_S - 1$ são os coeficientes do filtro. Definindo-se N_S e a frequência de corte ω_s , é possível utilizar uma de várias técnicas diferentes de projeto de filtros FIR para obter os coeficientes c_j [22]. O sistema resultante é dado por

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \alpha - x_3^2(n) + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) \\ x_3(n+1) = c_0 x_1(n+1) + c_1 x_1(n) + c_2 x_1(n-1) + \\ \quad + \dots + c_{N_S-1} x_1(n - N_S + 2). \end{cases} \quad (3)$$

Neste artigo consideramos o caso $N_S > 3$.

Definem-se as variáveis de estado auxiliares

$$\begin{cases} x_{K+2}(n+1) \triangleq x_2(n) \\ x_{K+3}(n+1) \triangleq x_{K+2}(n) \\ \quad \vdots \\ x_{N_S}(n+1) \triangleq x_{N_S-1}(n) \end{cases} \quad (4)$$

Substituindo-se $x_1(n+1)$ na última equação de (3) e utilizando-se (4), reescreve-se o sistema como

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \alpha - x_3(n)^2 + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) \\ x_3(n+1) = c_0(\alpha - x_3(n)^2 + \beta x_2(n)) + c_1 x_1(n) \\ \quad + c_2 x_2(n) + c_3 x_4(n) + c_4 x_5(n) \\ \quad + \dots + c_{N_S-1} x_{N_S}(n) \\ \quad \vdots \\ x_4(n+1) = x_2(n) \\ x_5(n+1) = x_4(n) \\ x_6(n+1) = x_5(n) \\ \quad \vdots \\ x_{N_S}(n+1) = x_{N_S-1}(n) \end{cases} \quad (5)$$

A matriz jacobiana [1], permite o cálculo dos expoentes de Lyapunov do mapa de Hénon limitado em banda, utilizando o método descrito no Capítulo 4 do livro [1]. Para o sistema descrito em (5) a jacobiana é dada por

$$\mathbf{J}_{(N_S \times N_S)}(n) = \begin{bmatrix} 0 & \beta & -2x_3(n) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & c_0\beta + c_2 & -2c_0x_3(n) & c_3 & \dots & c_{N_S-2} & c_{N_S-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \quad \vdots & & \quad \vdots & & \ddots & & \quad \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

III. EXPOENTE DE LYAPUNOV

A sensibilidade de um sistema pode ser medida pela taxa com a qual dois pontos muito próximos se distanciam durante sua evolução. O matemático russo A. M. Lyapunov desenvolveu um método de medida do afastamento entre órbitas geradas por condições iniciais próximas considerando-se que a taxa de aumento da distância entre elas seja exponencial [1]. Dessa forma, o expoente de Lyapunov é o logaritmo natural da taxa média de separação de duas órbitas. Por exemplo, um expoente de Lyapunov $\ln 2$ numa dada coordenada, significa que a distância entre as órbitas duplica à cada iteração, em média, naquela direção. Assim, a DSCI dos sinais gerados por um sistema dinâmico, característica do comportamento caótico, pode ser medida pelo expoente de Lyapunov [1]. Se um sinal gerado computacionalmente é limitado, aperiódico e apresenta ao menos um expoente de Lyapunov positivo, ele tem comportamento caótico [1].

A. Método Numérico para o cálculo dos expoentes de Lyapunov

No método do mapa tangente [1] toma-se uma hiperesfera de raio unitário centrada na condição inicial $\mathbf{x}(0)$. Essa hiperesfera é representada pela matriz U cujas colunas são os vetores que representam seus eixos ortogonais.

Essa hipersfera é transformada num elipsoide pela iteração do mapa. Pode-se calcular os eixos ortogonais desse elipsoide depois de n iterações por meio de

$$\mathbf{J}(n)U = \mathbf{J}(n-1) \cdots \mathbf{J}(0)U. \quad (7)$$

Para calcular os expoentes de Lyapunov, determina-se os comprimentos dos eixos ortogonais por meio dos autovalores da matriz $\mathbf{J}(n)\mathbf{J}^T(n)$ após n iterações. No entanto, se houver direções em que os eixos são dilatados e outras em que os eixos são comprimidos, os resultados serão números muito grandes ou muito pequenos. Dessa forma, um método mais adequado numericamente é calcular os incrementos nos comprimentos a cada iteração, normalizando a cada passo os eixos novamente. Esse procedimento é resumido nas seguintes etapas para um sistema de dimensão K [1]:

- 1) Escolhe-se uma base ortonormal $\{w_1(0), \dots, w_K(0)\}$ e calcula-se os vetores

$$z_1(0) = \mathbf{J}(0)w_1(0), \dots, z_K(0) = \mathbf{J}(0)w_K(0). \quad (8)$$

Eles são eixos do novo elipsoide $\mathbf{J}(0)U$, mas não são necessariamente ortogonais.

- 2) Aplica-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt [1] nos vetores $z_i, 1 \leq i \leq K$, resultando

$$\begin{aligned} y_1(1) &= z_1(0) \\ y_2(1) &= z_2(0) - \frac{z_2(0) \cdot y_1(1)}{\|y_1(1)\|^2} y_1(1) \\ y_3(1) &= z_3(0) - \frac{z_3(0) \cdot y_1(1)}{\|y_1(1)\|^2} y_1(1) - \frac{z_3(0) \cdot y_2(1)}{\|y_2(1)\|^2} y_2(1) \\ &\vdots \\ y_K(1) &= z_K(0) - \frac{z_K(0) \cdot y_1(1)}{\|y_1(1)\|^2} y_1(1) - \dots - \frac{z_K(0) \cdot y_{K-1}(1)}{\|y_{K-1}(1)\|^2} y_{K-1}(1) \end{aligned}, \quad (9)$$

em que “ \cdot ” é o produto escalar.

- 3) Determina-se uma nova base ortonormal para o cálculo dos expoentes de Lyapunov da próxima iteração como

$$w_1(1) = \frac{y_1(1)}{\|y_1(1)\|}, \dots, w_K(1) = \frac{y_K(1)}{\|y_K(1)\|}. \quad (10)$$

- 4) Aplica-se a matriz jacobiana no próximo ponto da órbita, $x(1)$, reortogonaliza-se o conjunto

$$\mathbf{J}(1)w_1(1), \dots, \mathbf{J}(1)w_K(1) \quad (11)$$

e produz-se uma nova base ortonormal

$$w_1(2) = \frac{y_1(2)}{\|y_1(2)\|}, \dots, w_K(2) = \frac{y_K(2)}{\|y_K(2)\|}. \quad (12)$$

Repetindo-se os passos 1), 2), 3) e 4) n vezes, para $2 \leq j \leq n$,

$$\mathbf{J}(j)w_1(j), \dots, \mathbf{J}(j)w_K(j) \quad (13)$$

e

$$w_1(j+1) = \frac{y_1(j+1)}{\|y_1(j+1)\|}, \dots, w_K(j+1) = \frac{y_K(j+1)}{\|y_K(j+1)\|}, \quad (14)$$

obtém-se o conjunto final de vetores que equivalem aos eixos do elipsoide $\mathbf{J}(n)U$.

- 5) O expoente de Lyapunov na k -ésima direção, $1 \leq k \leq K$, é dado por

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \|y_k(1)\| + \dots + \ln \|y_k(n)\|}{n}. \quad (15)$$

No estudo realizado aqui considera-se o maior dos k expoentes de Lyapunov, representado por λ_1 . Um valor de λ_1 positivo em sinal limitado em amplitude é forte indício de um sinal caótico já que ele só poderia convergir para uma órbita periódica instável [1].

IV. RESULTADOS

Com a definição do mapa de Hénon acrescido do filtro FIR da Seção II e o método de cálculo do expoente de Lyapunov na Seção III é possível observar para quais valores de frequência de corte e ordem os sinais gerados pelo sistema (3) são caóticos ou não. Para as simulações realizadas, considerou-se $\alpha = 0,9$ e $\beta = 0,3$, como em [18, 19].

Os filtros FIR foram gerados janelando-se e atrasando-se de forma conveniente a resposta ao impulso do filtro passa-baixas ideal com N_S coeficientes e frequência de corte discreta ω_S [22]. Consideraram-se janelas de Hamming e Blackman [22].

Para cada combinação de frequência de corte e ordem foram consideradas 10 condições iniciais independentes e uniformemente distribuídas no intervalo $[0,1]$. Os expoentes λ_1 mostrados nos resultados são a média de 10 simulações, juntamente com as barras de erro para um desvio-padrão.

Nas Figuras 2 e 3 apresenta-se λ_1 para o sistema (5), utilizando-se janela de Hamming, em função da frequência de corte, ω_S , e do número de coeficientes N_S do filtro.

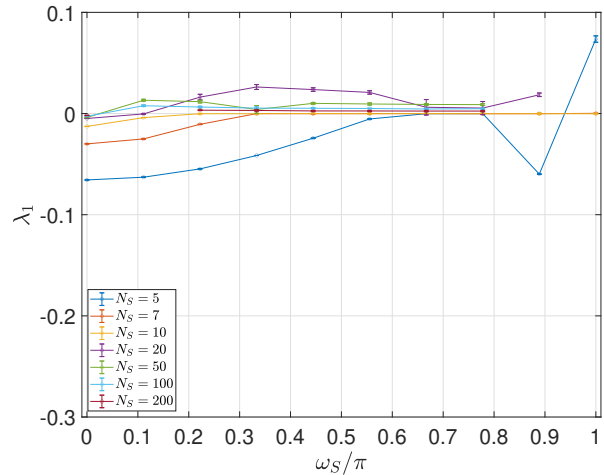


Fig. 2. Maior expoente de Lyapunov para o sistema descrito em (5) com filtros projetados utilizando-se janela de Hamming em função da frequência de corte ω_S .

Da Figura 2 nota-se que para $N_S > 10$ há intervalos maiores de frequências em que os sinais são caóticos. Por outro lado, para $N_S < 10$ a condição caótica é pouco presente. Na Figura 3 para $N_S > 45$ os sinais são caóticos, menos para $\omega_s = 0,01\pi$, e há a convergência para o mesmo valor de λ_1 , independentemente da frequência de corte. Dessa forma, a condição caótica é encontrada majoritariamente para filtros

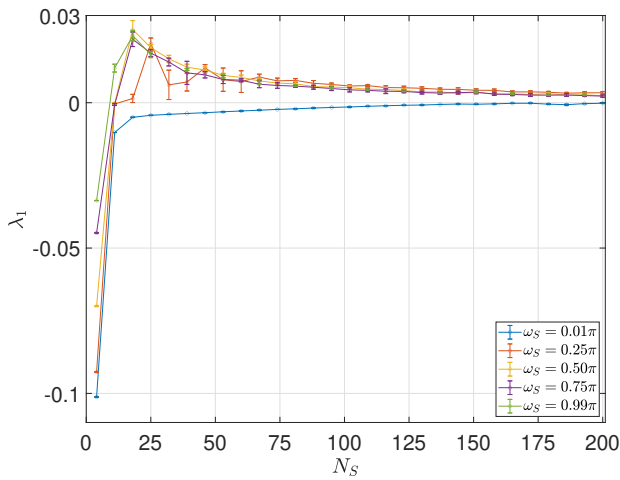


Fig. 3. Maior expoente de Lyapunov para o sistema descrito em (5) com filtros projetados utilizando-se janela de Hamming em função do número de coeficientes N_S do filtro.

passa-baixas com mais coeficientes e frequências de corte mais altas.

Na Figura 4 ilustram-se três exemplo de sinais gerados utilizando-se janela de Hamming.

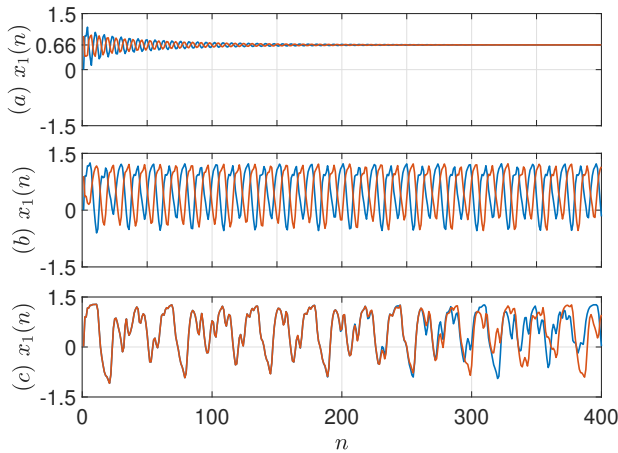


Fig. 4. Gráficos de $x_1(n)$ para diversos valores de ω_S e N_S da Figura 2: (a) $N_S = 5$ e $\omega_S = 0,5\pi$: convergência para um ponto fixo; (b) $N_S = 10$ e $\omega_S = 0,5\pi$: órbitas periódicas. (c) $N_S = 20$ e $\omega_S = 0,5\pi$: sinais caóticos. Em todos os casos consideram-se duas condições iniciais diferentes, gerando os sinais mostrados em azul e vermelho.

Na Figura 4(a), mostram-se sinais gerados com duas condições iniciais diferentes e $\omega_s = 0,5\pi$ e $N_S = 5$. Pelos resultados da Figura 2 esses sinais apresentam $\lambda_1 < 0$. Como esperado, os sinais gerados não apresentam DSCI, convergindo para um ponto fixo.

Para observar a condição em que $\lambda_1 \approx 0$, consideram-se sinais gerados com $N_s = 10$ e $\omega_S = 0,5\pi$ na Figura 4.b. As órbitas não convergem nem divergem e apresentam um comportamento aparentemente periódico.

Na Figura 4.c, considera-se finalmente o caso $N_s = 20$ e $\omega_S = 0,5\pi$ em que, pela Figura 2 $\lambda_1 > 0$. Como esperado,

nota-se que os sinais gerados são aperiódicos e apresentam DSCI, típico de sinais caóticos.

Para verificar a influência do tipo de janela utilizada no projeto do filtro, nas Figuras 5 e 6, mostra-se λ_1 quando se utiliza uma janela de Blackman.

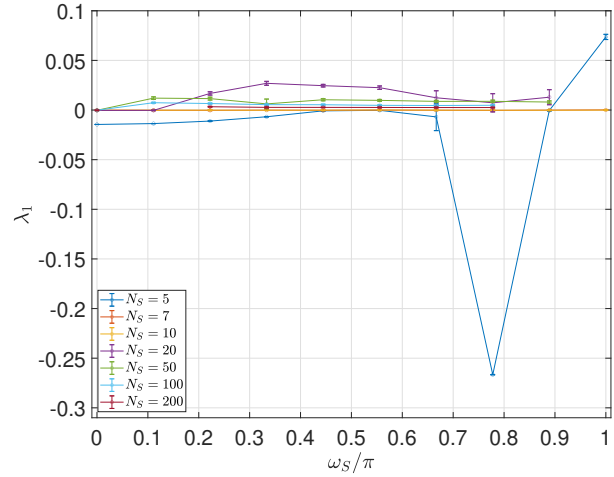


Fig. 5. Maior expoente de Lyapunov para o sistema descrito em (5) com filtros projetados utilizando-se janela de Blackman em função da frequência de corte ω_S/π .

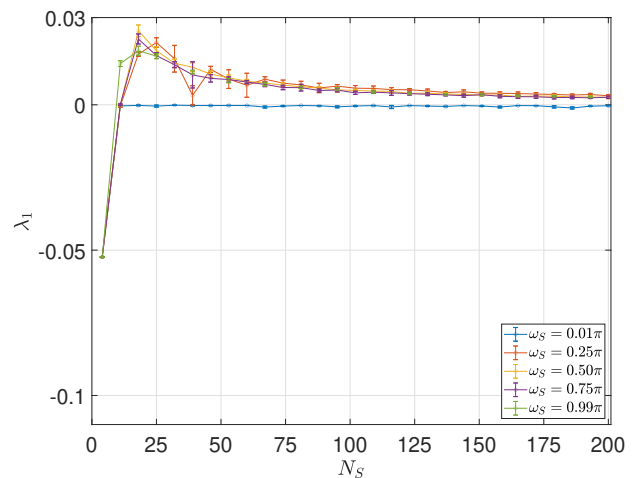


Fig. 6. Maior expoente de Lyapunov para o sistema descrito em (5) com filtros projetados utilizando-se janela de Blackman em função do número de coeficientes N_S do filtro.

Comparando-se as Figuras 5 e 6 com as Figuras 2 e 3 nota-se comportamentos similares de λ_1 , de modo que a janela utilizada parece ter pouca importância na geração ou não de caos.

V. CONCLUSÕES

Neste artigo, explorou-se numericamente a dinâmica dos sinais gerados pelo sistema formado pelo mapa de Hénon acrescido de filtros FIR passa-baixas.

Nota-se que a inserção dos filtros pode mudar substancialmente a natureza dos sinais gerados, podendo-se observar

convergências para pontos fixos ou órbitas periódicas e comportamentos caóticos.

Em particular, observou-se os sinais caóticos sobretudo quando são utilizados filtros com mais coeficientes e $\omega_S > 0,2\pi$. Para as duas janelas testadas, o comportamento dinâmico dos sinais gerados foi similar.

Essa variação da dinâmica em função dos filtros utilizados alerta para a necessidade de se avaliar com atenção propostas de sistemas de comunicação baseadas em caos. Não se pode tomar como garantido, ao utilizar-se mapas que geram sinais sabidamente caóticos, que este comportamento vai se manter quando da introdução de filtros, mesmo lineares.

Como próximos passos, pretende-se introduzir nas simulações sinais aleatórios, que poderiam simular mensagens sendo transmitidas. Outro ponto a ser estudados é o comportamento do sincronismo e da dinâmica quando filtros com resposta ao impulso infinita são introduzidos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pelo financiamento do trabalho (Processos 140081/2022-4 e 311039/2019-7). O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, *Chaos*. Textbooks in Mathematical Sciences, Springer New York, 2000.
- [2] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Synchronization in chaotic systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, no. 8, 1990.
- [3] C. E. C. Souza, D. P. B. Chaves, and C. Pimentel, “Digital communication systems based on three-dimensional chaotic attractors,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 10523–10532, 2019.
- [4] M. S. Baptista, “Chaos for communication,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 105, no. 2, pp. 1821–1841, 2021.
- [5] N. A. Loan, N. N. Hurrah, S. A. Parah, J. W. Lee, J. A. Sheikh, and G. M. Bhat, “Secure and robust digital image watermarking using coefficient differencing and chaotic encryption,” *IEEE Access*, vol. 6, pp. 19876–19897, 2018.
- [6] D. Rontani, D. Choi, C. Y. Chang, A. Locquet, and D. S. Citrin, “Compressive sensing with optical chaos,” *Scientific Reports*, vol. 6, pp. 35206 EP –, 12 2016.
- [7] E. Sabatini, M. Silva, and M. Eisencraft, “Codificação de imagens usando sinais caóticos,” in *Anais de XXXVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, 11 2020.
- [8] X. Li, C. Li, and I.-K. Lee, “Chaotic image encryption using pseudo-random masks and pixel mapping,” *Signal Processing*, vol. 125, pp. 48–63, aug 2016.
- [9] N. Zhou, S. Pan, S. Cheng, and Z. Zhou, “Image compression-encryption scheme based on hyper-chaotic system and 2d compressive sensing,” *Optics & Laser Technology*, vol. 82, pp. 121 – 133, 2016.
- [10] A. Dmitriev, A. Kletsov, A. Laktyushkin, A. Panas, and S. Starkov, “Ultrawideband wireless communications based on dynamic chaos,” *Journal of Communications Technology and Electronics*, vol. 51, no. 10, pp. 1126–1140, 2006.
- [11] R. K. Mohammed and H. A. Abdullah, “Efficient fpga implementation of chaotic based communication system with polar encoding,” in *2022 9th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ICEEE)*, pp. 123–128, IEEE, 2022.
- [12] T. Reena raj, K. Sakthidasan@ Sankaran, and V. Nagarajan, “Chaotic sequence-based mc-cdma for 5g,” *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, vol. 33, no. 4, p. e4992, 2021.
- [13] E. Sabatini, R. Candido, M. Silva, and M. Eisencraft, “Sistemas de comunicação baseados em caos com filtros adaptativos kernel e mapa quadrático,” in *Anais de XXXVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, 11 2020.
- [14] Z. Liu, L. Zhang, Z. Wu, and J. Bian, “A secure and robust frequency and time diversity aided OFDM–DCSK modulation system not requiring channel state information,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 68, no. 3, pp. 1684–1697, 2019.
- [15] G. Abib and M. Eisencraft, “Sobre o desempenho em canal com ruído de um sistema de comunicação baseado em caos,” in *Anais de XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, 2013.
- [16] B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems (The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering)*. The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering, Oxford University Press, 2009.
- [17] M. Eisencraft, R. D. Fanganiello, and L. A. Baccala, “Synchronization of discrete-time chaotic systems in bandlimited channels,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2009, pp. 1–12, 2009.
- [18] R. T. Fontes and M. Eisencraft, “Conditions for synchronizing a master-slave bandlimited chaos-based communication system,” in *Proceedings of the 2015 International Workshop on Telecommunications (IWT)*, vol. 1, (Santa Rita do Sapucaí), pp. 1–4, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), jun 2015.
- [19] R. T. Fontes and M. Eisencraft, “A digital bandlimited chaos-based communication system,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 37, pp. 374–385, 2016.
- [20] M. Eisencraft, R. D. Fanganiello, and L. H. A. Monteiro, “Chaotic synchronization in discrete-time systems connected by bandlimited channels,” *IEEE Communications Letters*, vol. 15, pp. 671–673, jun 2011.
- [21] M. Eisencraft, J. V. C. Evangelista, R. A. Costa, R. T. Fontes, R. Candido, D. P. B. Chaves, C. Pimentel, and M. T. M. Silva, *New Trends in Chaos-Based Communications and Signal Processing*, pp. 109–129. Cham: Springer International Publishing, 2019.
- [22] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall Press, 3rd ed., 2009.
- [23] M. Hénon, “A two-dimensional mapping with a strange attractor,” in *The Theory of Chaotic Attractors*, pp. 94–102, Springer, 1976.