

# Modelo Complexo $\alpha$ - $\mu$ Bivariável com Correlações Cruzadas e Desbalanceamento de Clusters

Thiago A. M. de Bairros, Alessandro P. de Oliveira, Rausley A. A. de Souza e Michel D. Yacoub

**Resumo**—Um modelo de desvanecimento para o processo  $\alpha$ - $\mu$  complexo bivariável é proposto. Uma expressão exata para a função densidade de probabilidade conjunta envolvendo duas envoltórias e duas fases com desbalanceamento entre *clusters* de multipercurso e correlações cruzadas entre as componentes em fase e quadratura é obtida. Esta expressão generaliza alguns modelos existentes na literatura. Um exemplo de aplicação em um sistema com detecção de portadora parcialmente coerente com desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  é apresentado. Observando os resultados é possível concluir que o desbalanceamento de *clusters* e a correlação afetam decisivamente o desempenho do sistema.

**Palavras-Chave**—Distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , distribuição bivariável, deslocamento de fase, diferença de fase.

**Abstract**—A fading model for the bivariate  $\alpha$ - $\mu$  is proposed. An exact expression for the probability density function involving two envelopes and two phases with *cluster* unbalance and cross-correlation between the in-phase and quadrature components is obtained. This expression generalizes some existing models in the literature. An application example in a system with partially coherent carrier detection under  $\alpha$ - $\mu$  fading is presented. Observing the results, it is possible to conclude that the cluster imbalance and the correlation affect decisively the system performance.

**Keywords**— $\alpha$ - $\mu$  distribution, bivariate distribution, phase shifting, phase difference.

## I. INTRODUÇÃO

Um sinal de rádio-frequência ao se propagar por um canal de comunicação sem fio sofre desvanecimento, tendo as suas características originais, por exemplo, amplitude e fase, alteradas de forma aleatória, em função dos diferentes fenômenos de propagação existentes, tais como reflexão, difração e espalhamento. Esses parâmetros são tratados de forma estocástica e representados por modelos estatísticos, os quais são essenciais dentro de qualquer projeto de uma rede de comunicação sem fio, desde a previsão de cobertura, análise de desempenho, comunicação e tráfego.

As estatísticas marginais, por exemplo, envoltória, potência e fase, costumam ser geralmente suficientes para a avaliação

Thiago A. M. de Bairros e Rausley A. A. de Souza, Instituto Nacional de Telecomunicações (Inatel), Santa Rita do Sapucaí-MG, Brasil, E-mails: thiagob@mtel.inatel.br, rausley@inatel.br; Alessandro P. de Oliveira, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo (UTFPR-TD), Toledo-PR, Brasil, E-mail: alessandro@utfpr.edu.br e Michel D. Yacoub, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas-SP, Brasil, E-mail: mdyacoub@unicamp.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq (contrato: 311470/2021-1), pela FAPEMIG (contrato: APQ 00966-17), pela FAPESP (contrato: 2021/06946-0), pela CAPES (contrato: 88887.353680/2019-00) e pela RNP, com recursos do MCTIC, processo No 01245.010604/2020-14, sob o projeto Sistemas de Comunicações Móveis de 6ª Geração (6G) do Centro de Referência em Radiocomunicações (CRR) do Instituto Nacional de Telecomunicações – Inatel, Brasil.

do sistema. Porém, em algumas aplicações há a necessidade do levantamento de outras estatísticas que por muitas vezes são baseadas apenas nas informações de envoltória e de potência, sendo as informações relacionadas à fase pouco exploradas devido à complexidade matemática. Como consequência, análises envolvendo as estatísticas de fase são escassas na literatura, deixando esse assunto em aberto e sujeito à discussão.

Em [1], análises da probabilidade de erro de bit média (*average bit error probability*, ABEP) sobre canais desvanecidos e distribuição de fase uniforme e não-uniforme sobre sistemas de multiplexação por divisão de frequência ortogonal (*orthogonal frequency division multiplexing*, OFDM) são analisadas e comparadas. Em [2], alguns resultados relacionados ao desempenho de sistemas coerentes com estimação imperfeita da fase da portadora e distribuição de erro de fase Tikhonov sobre canais Nakagami- $m$ /Gama são explorados. Considerando também o erro de estimação imperfeita do ganho do canal e distribuição de fase uniforme em [3], um modelo complexo bivariável para a distribuição Nakagami- $m$  e uma expressão exata para a função densidade de probabilidade (FDP) da diferença de fase são desenvolvidos. Em [4], expressões exatas e aproximadas para as FDPs da fase e da diferença de fase, além do desempenho sobre sistemas de modulação binária por deslocamento de fase (*binary phase shift keying*, BPSK) parcialmente coerentes para o modelo complexo  $\alpha$ - $\mu$  bivariável com fase não-uniforme são apresentadas. Entretanto, o efeito das correlações cruzadas e do desbalanceamento de *clusters* entre as componentes fase-quadratura, não são explorados. A motivação para se considerar tais fenômenos se deve, no mínimo, para manter-se a compatibilidade com os trabalhos [4]–[6], e também Rayleigh. Além disso, é importante contemplar o fenômeno implícito na correlação entre as componentes fase-quadratura (*delay spread*) e o desbalanceamento de *clusters* entre as componentes fase-quadratura.

Este trabalho tem por objetivo aprofundar os estudos do modelo de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  [7] ao propor um modelo estatístico de duas variáveis complexas com envoltórias  $\alpha$ - $\mu$  e suas correspondentes fases não-uniformes. Para este fim, com base nos resultados de [4]–[6], uma FDP conjunta de fase-envoltória contemplando o desbalanceamento entre *clusters* de multipercurso e as correlações cruzadas entre dois processos complexos distintos é desenvolvida. Expressões analíticas para as FDPs conjuntas das componentes em fase e quadratura, como também da FDP de fase-envoltória bivariável e suas distribuições marginais são derivadas.

Por meio da FDP de fase-envoltória é obtida uma FDP da diferença de fase, a qual é utilizada para verificar o desempenho sobre sistemas BPSK parcialmente coerentes.

Os resultados apresentados neste artigo corroboram com os já apresentados pelos autores em [4] e também mostram que o desbalanceamento entre *clusters* de multipercurso pode contribuir para um melhor desempenho do sistema.

## II. PRELIMINARES

A distribuição  $\alpha$ - $\mu$  [7] é utilizada para caracterizar os fenômenos de desvanecimento de curto prazo tendo incorporado em seu modelo, o agrupamento de *clusters* de multipercurso e a não linearidade do meio de transmissão de forma conjunta pelos parâmetros  $\alpha > 0$  e  $\mu > 0$ , respectivamente. Distribuições como Nakagami- $m$ , Weibull e outras [7, Sec. V], podem ser obtidas por meio do ajuste desses parâmetros.

Considere dois processos aleatórios  $W_1$  e  $W_2$  com variáveis aleatórias complexas  $\alpha$ - $\mu$  com parâmetros  $(\alpha_1, \mu, \hat{r}_1, p)$  e  $(\alpha_2, \mu, \hat{r}_2, p)$  dados por  $W_1 = X_1 + jY_1 = R_1 e^{j\Theta_1}$  e  $W_2 = X_2 + jY_2 = R_2 e^{j\Theta_2}$ , em que as variáveis  $X_1, X_2, Y_1$  e  $Y_2$  são as componentes em fase e quadratura dos processos  $W_1$  e  $W_2$ . As fases são dadas por  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$  e as envoltórias por  $R_1 = |W_1|^{\frac{2}{\alpha_1}}$  e  $R_2 = |W_2|^{\frac{2}{\alpha_2}}$ , com potências médias  $\hat{r}_1^{\alpha_1} = \mathbb{E}[R_1^{\alpha_1}]$  e  $\hat{r}_2^{\alpha_2} = \mathbb{E}[R_2^{\alpha_2}]$ , em que  $\mathbb{E}[\cdot]$  corresponde ao operador esperança matemática. Os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  modelam a não-linearidade do canal de propagação e  $\mu$  o número de *clusters* de multipercursos. O parâmetro  $p$  é denominado de parâmetro de fase  $-1 < p < 1$  e, conforme definido em [8], é responsável por mensurar o desbalanceamento de potência entre as componentes em fase e quadratura. Para  $p > 0$  a potência da componente em fase é predominante, enquanto para  $p < 0$  a potência da componente em quadratura possui maior influência. Para  $p = 0$  as potências das componentes em fase e quadratura são equivalentes (condição balanceada).

As FDPs das componentes em fase e quadratura dos processos  $W_1$  ou  $W_2$ , para o modelo  $\alpha$ - $\mu$  com desbalanceamento de *clusters* são obtidas diretamente do modelo proposto em [8, eqs. (11) e (12)], substituindo  $m = \mu$  e  $\Omega = \hat{r}^\alpha$ , gerando a seguinte FDP  $f_Z(z) = (\mu/\hat{r}^\alpha)^{(1 \circ p)\mu/2} |z|^{(1 \circ p)\mu-1} \exp(-\mu z^2/\hat{r}^\alpha) / (\Gamma((1 \circ p)\mu/2))$ , com  $Z = X$  ou  $Z = Y$  e  $-\infty < z < \infty$ . Para  $Z = X$  e  $\circ \rightarrow +$  tem-se a FDP da componente em fase, enquanto para  $Z = Y$  e  $\circ \rightarrow -$  obtém-se a FDP da componente em quadratura dos processos  $W_1$  ou  $W_2$ . Como as variáveis aleatórias são independentes, a FDP conjunta é obtida pelo produto de suas respectivas FDPs, ou seja,  $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$ . Por meio da FDP conjunta, utilizando o processo de mudança de variáveis para  $X = (P\hat{r})^{\frac{\alpha}{2}} \cos \Theta$ ,  $Y = (P\hat{r})^{\frac{\alpha}{2}} \sin \Theta$ ,  $f_{P\Theta}(\rho, \theta) = |J| f_{XY}(x, y)$  e  $|J| = \alpha P^{\alpha-1} \hat{r}^{\alpha}/2$ , sendo  $J$  o Jacobiano da transformação e  $P = R/\hat{r}$ . Após o processo, a FDP conjunta de fase-envoltória normalizada é então obtida da seguinte forma  $f_{P,\Theta}(\rho, \theta) = 2^{-\mu} \alpha \mu^\mu \rho^{\alpha\mu-1} \exp(-\mu\rho^\alpha) |\sin(2\theta)|^{\mu-1} \times |\tan \theta|^{-p\mu} / (\Gamma((1-p)\mu/2) \Gamma((1+p)\mu/2))$  com  $\rho > 0$  e  $-\pi \leq \theta < \pi$ . As FDPs marginais são obtidas de  $f_{P,\Theta}(\rho, \theta)$  como  $f_P(\rho) = \alpha \mu^\mu \rho^{\alpha\mu-1} \exp(-\mu\rho^\alpha) / \Gamma(\mu)$  and  $f_\Theta(\theta) = \Gamma(\mu) |\sin(2\theta)|^{\mu-1} / (2^\mu |\tan \theta|^{p\mu} \Gamma((1-p)\mu/2) \Gamma((1+p)\mu/2))$ .

De acordo com [5] para os processos  $W_1$  e  $W_2$  é admitido que existe correlação entre as componentes em fase  $X_1$  e  $X_2$ , assim como das componentes em quadratura  $Y_1$  e  $Y_2$ . A FDP conjunta dos processos em quadratura é dada por [5, eq. (18)]

$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = \frac{\lambda^{1-(1 \circ p)\mu/2} \left( \mu \sqrt{\hat{r}_1^{-\alpha_1} \hat{r}_2^{-\alpha_2}} \right)^{1+(1 \circ p)\mu/2}}{|z_1 z_2|^{-(1 \circ p)\mu/2} (1 - \lambda^2) \Gamma((1 \circ p)\mu/2)} \times \exp \left( \frac{\mu \left( z_1^2 \hat{r}_2^{\alpha_2} + z_2^2 \hat{r}_1^{\alpha_1} \odot 2\lambda z_1 z_2 \hat{r}_1^{\alpha_1/2} \hat{r}_2^{\alpha_2/2} \right)}{-(1 - \lambda^2) \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2}} \right) \times I_{\frac{(1 \circ p)\mu}{2}-1} \left( \frac{2\mu\lambda |z_1 z_2|}{\hat{r}_1^{-\alpha_1/2} \hat{r}_2^{-\alpha_2/2}} \right) \operatorname{sech} \left( \frac{2\mu\lambda |z_1 z_2|}{\hat{r}_1^{-\alpha_1/2} \hat{r}_2^{-\alpha_2/2}} \right), \quad (1)$$

com  $-\infty < z_1, z_2 < \infty$ ,  $I_v(\cdot)$  corresponde à função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem arbitrária  $v$  [9, eq. (9.6.20)] e  $\operatorname{sech}(\cdot)$  é a função secante hiperbólica [9, eq. (4.5.5)]. Aplicando em (1) para  $Z = X$ ,  $\circ \rightarrow +$  e  $\odot \rightarrow -$ ,  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$  é obtida, enquanto para  $Z = Y$ ,  $\circ \rightarrow -$  e  $\odot \rightarrow -$ , obtém-se  $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ . O coeficiente de correlação de potência,  $0 < \lambda^2 < 1$ , entre as componentes em fase ( $X_1, X_2$ ) e quadratura ( $Y_1, Y_2$ ) são iguais, ao passo que as correlações cruzadas ( $X_1, Y_2$ ) e ( $X_2, Y_1$ ) são nulas. Isso implica que  $X_1, X_2$  e  $Y_1, Y_2$  são conjuntamente independentes e a FDP conjunta fase-quadratura bivariável é determinada por  $f_{X_1, Y_1, X_2, Y_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) = f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \times f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ , que leva a (2) [5, eq. (19)], no topo da próxima página.

A equação (2) abrange apenas os casos em que há correlação direta entre as componentes em fase  $X_1, X_2$  e quadratura  $Y_1, Y_2$  referentes aos processos complexos  $W_1$  e  $W_2$ , não havendo as correlações cruzadas entre as componentes fase-quadratura  $X_1, Y_2$  e  $X_2, Y_1$  (correlação cruzada nula). Na Seção III é apresentado o desenvolvimento de um modelo mais abrangente que também inclui as correlações cruzadas.

## III. MODELO PROPOSTO

### A. FDP Conjunta Envoltória-Fase Bivariável com Correlação Cruzada

Considere dois processos aleatórios complexos distintos ( $W_1$  e  $W_2$ ) com correlação cruzada entre as componentes em fase-quadratura  $X_1, Y_2$  e  $X_2, Y_1$ . O fato de haver correlação cruzada, indica que existe um deslocamento de fase em uma das variáveis complexas. Por outro lado, se existe um deslocamento de fase entre as variáveis complexas, ocorrerá como consequência uma correlação cruzada entre as componentes fase-quadratura. Esse deslocamento de fase na literatura é conhecido como parâmetro  $\varphi = \arg(\tan(\lambda_2/\lambda_1))$  [10, eq. (1.5-17)], em que  $\lambda_1 = \mathbb{C}(X_1, X_2) = \mathbb{C}(Y_1, Y_2)$  e  $\lambda_2 = \mathbb{C}(X_1, Y_2) = -\mathbb{C}(Y_1, X_2)$ , sendo  $\mathbb{C}(\cdot)$  o operador covariância. Segundo [11] para o modelo isotrópico  $\lambda_2 = \Delta\omega \bar{T} J_0(\beta d) / (1 + (\Delta\omega \bar{T})^2)$ , em que  $\beta$  é uma constante de fase,  $d$  é a distância entre dois pontos de recepção,  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  é a separação em frequência angular dos processos  $W_1$  e  $W_2$ ,  $\bar{T}$  é o espalhamento de retardos e  $J_n(\cdot)$  é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem  $n$  [9, eq. (9.1.21)]. Para  $\beta d = 0$ , a correlação fase-quadratura será não nula sempre que  $\Delta\omega \bar{T} \neq 0$ , i.e. (i)  $\Delta\omega \neq 0$  (os processos  $W_1$  e  $W_2$  propagando-se com frequências ligeiramente diferentes, ou seja,  $\omega_1 \neq \omega_2$ ) e  $\bar{T} > 0$  (banda de coerência finita) ou (ii)  $\Delta\omega \neq 0$  e  $\bar{T} = 0$  (canal plano, ou de maneira semelhante, banda de coerência infinita).

$$\begin{aligned}
 f_{X_1, Y_1, X_2, Y_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) &= \frac{\sqrt{|x_1 x_2|^{(1+p)\mu} |y_1 y_2|^{(1-p)\mu} (\mu^2 \hat{r}_1^{-\alpha_1} \hat{r}_2^{-\alpha_2})^{\mu+2}}}{\lambda^{\mu-2} (1-\lambda^2)^2 \Gamma((1-p)\mu/2) \Gamma((1+p)\mu/2)} \exp\left(\frac{\mu((x_1^2 + y_1^2) \hat{r}_2^{\alpha_2} + (x_2^2 + y_2^2) \hat{r}_1^{\alpha_1})}{-(1-\lambda^2) \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \\
 &\times \exp\left(\frac{\mu(-2\lambda \hat{r}_1^{\alpha_1/2} \hat{r}_2^{\alpha_2/2} (x_1 x_2 + y_1 y_2))}{-(1-\lambda^2) \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) I_{\frac{(1+p)\mu}{2}-1}\left(\frac{2\mu\lambda |x_1 x_2|}{(1-\lambda^2) \hat{r}_1^{\alpha_1/2} \hat{r}_2^{\alpha_2/2}}\right) I_{\frac{(1-p)\mu}{2}-1}\left(\frac{2\mu\lambda |y_1 y_2|}{(1-\lambda^2) \hat{r}_1^{\alpha_1/2} \hat{r}_2^{\alpha_2/2}}\right) \\
 &\times \operatorname{sech}\left(2\mu\lambda |x_1 x_2| \left((1-\lambda^2) \hat{r}_1^{\alpha_1/2} \hat{r}_2^{\alpha_2/2}\right)^{-1}\right) \operatorname{sech}\left(2\mu\lambda |y_1 y_2| \left((1-\lambda^2) \hat{r}_1^{\alpha_1/2} \hat{r}_2^{\alpha_2/2}\right)^{-1}\right)
 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 f_{P_1, P_2, \Theta_1, \Theta_2}(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2) &= \frac{\sqrt{|\cos(\theta_1 + \theta_2 - \varphi) + \cos(\theta_1 - \theta_2 + \varphi)|^{(1+p)\mu} |\cos(\theta_1 - \theta_2 + \varphi) - \cos(\theta_1 + \theta_2 - \varphi)|^{(1-p)\mu}}}{\lambda^{\mu-2} (\mu/2)^{-(\mu+2)} \rho_1^{1-\alpha_1(\mu+2)/2} \rho_2^{1-\alpha_2(\mu+2)/2} (1-\lambda^2)^2 \Gamma((1-p)\mu/2) \Gamma((1+p)\mu/2)} \\
 &\times \alpha_1 \alpha_2 \exp\left(-\frac{\mu(\rho_1^{\alpha_1} + \rho_2^{\alpha_2} - 2\lambda \rho_1^{\alpha_1/2} \rho_2^{\alpha_2/2} \cos(\theta_1 - \theta_2 + \varphi))}{1-\lambda^2}\right) I_{\frac{(1+p)\mu}{2}-1}\left(\frac{\mu\lambda |\cos(\theta_1 + \theta_2 - \varphi) + \cos(\theta_1 - \theta_2 + \varphi)|}{\rho_1^{-\alpha_1/2} \rho_2^{-\alpha_2/2} (1-\lambda^2)}\right) \\
 &\times I_{\frac{(1-p)\mu}{2}-1}\left(\frac{\mu\lambda |\cos(\theta_1 - \theta_2 + \varphi) - \cos(\theta_1 + \theta_2 - \varphi)|}{\rho_1^{-\alpha_1/2} \rho_2^{-\alpha_2/2} (1-\lambda^2)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\mu\lambda |\cos(\theta_1 + \theta_2 - \varphi) + \cos(\theta_1 - \theta_2 + \varphi)|}{\rho_1^{-\alpha_1/2} \rho_2^{-\alpha_2/2} (1-\lambda^2)}\right) \\
 &\times \operatorname{sech}\left(\mu\lambda |\cos(\theta_1 - \theta_2 + \varphi) - \cos(\theta_1 + \theta_2 - \varphi)| \left(\rho_1^{-\alpha_1/2} \rho_2^{-\alpha_2/2} (1-\lambda^2)\right)^{-1}\right)
 \end{aligned} \quad (3)$$

Portanto, faz-se necessário considerar correlação cruzada entre os processos  $W_1$  e  $W_2$ . O mesmo aplica-se a  $\lambda_1$ , uma vez que  $\lambda_2$  é dependente de  $\lambda_1$ , pois  $\lambda_2 = \Delta\omega\bar{T}\lambda_1$ . O coeficiente de correlação  $\lambda^2$  pode ser expresso em função de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  pela seguinte relação  $\lambda^2 = 4\mu^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)/(\hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2})$ . O modelo apresentado em [5] não contempla as correlações cruzadas, visto que a base de dedução para o modelo  $\alpha$ - $\mu$  é a distribuição Nakagami- $m$ . Essa, por sua vez, é derivada da distribuição Rayleigh, em que a fase é perdida durante o processo de obtenção da FDP conjunta de envoltória Rayleigh [10, eq. (1.5-22)]. A inserção do parâmetro  $\varphi$  se faz necessária, garantindo assim a compatibilidade do modelo  $\alpha$ - $\mu$  complexo bivariável com o modelo Rayleigh em sua totalidade. Partindo de (2), e seguindo [10, eq. (1.5-17)], o parâmetro  $\varphi$  de deslocamento de fase é inserido sobre as variáveis aleatórias  $X_2$  e  $Y_2$  durante o processo de mudança de variáveis em que  $X_1 = (P_1 \hat{r}_1)^{\frac{\alpha_1}{2}} \cos \Theta_1$ ,  $Y_1 = (P_1 \hat{r}_1)^{\frac{\alpha_1}{2}} \sin \Theta_1$ ,  $X_2 = (P_2 \hat{r}_2)^{\frac{\alpha_2}{2}} \cos(\Theta_2 - \varphi)$ ,  $Y_2 = (P_2 \hat{r}_2)^{\frac{\alpha_2}{2}} \sin(\Theta_2 - \varphi)$  e  $|J| = \alpha_1 \alpha_2 P_1^{\alpha_1-1} P_2^{\alpha_2-1} \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2} / 4$ , com  $P_1 = R_1 / \hat{r}_1$  e  $P_2 = R_2 / \hat{r}_2$ . Após o processo de transformação de variáveis e aplicando [9, eqs. (4.3.31) e (4.3.32)] obtém-se a FDP conjunta de fase-envoltória normalizada dada por (3). Para  $\varphi = 0$ , (3) reduz-se à [5, eq. (20)]. Ainda, considerando  $p = 0$  obtém-se [4, eq. (2)]. Para  $\mu = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$  e  $p = 0$  em (3), a distribuição conjunta bivariável com envoltória Rayleigh e fase uniforme é obtida [10, eq. (1.5-22)]. A FDP conjunta de fase é determinada utilizando métodos numéricos por  $f(\theta_1, \theta_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_{P_1 P_2 \Theta_1 \Theta_2}(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2) d\rho_1 d\rho_2$ .

### B. FDP Conjunta das Componentes em Fase e em Quadratura Bivariável com Correlação Cruzada

Para a obtenção da FDP conjunta das componentes em fase e em quadratura bivariável com correlação cruzada,

utiliza-se em (3) o processo de transformação de variáveis  $X_1 = (P_1 \hat{r}_1)^{\frac{\alpha_1}{2}} \cos \Theta_1$ ,  $Y_1 = (P_1 \hat{r}_1)^{\frac{\alpha_1}{2}} \sin \Theta_1$ ,  $X_2 = (P_2 \hat{r}_2)^{\frac{\alpha_2}{2}} \cos \Theta_2$ ,  $Y_2 = (P_2 \hat{r}_2)^{\frac{\alpha_2}{2}} \sin \Theta_2$  e  $|J| = \alpha_1 \alpha_2 P_1^{\alpha_1-1} P_2^{\alpha_2-1} \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2} / 4$ . Ainda, aplicando as seguintes propriedades [9, eqs. (4.3.31) e (4.3.32)] obtém-se (4). Para  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ ,  $\mu = 1$  e  $p = 0$ , (4) reduz-se à FDP conjunta Gaussiana complexa bivariável correlacionada [10, eq. (1.5-16)].

### C. FDP Conjunta das Componentes em Fase ou em Quadratura ou Fase-Quadratura Correlacionadas

As FDPs conjuntas das componentes em fase ou em quadratura, ou fase-quadratura correlacionadas são obtidas utilizando (4) pelas seguintes relações: (i) para  $\lambda_1 = 0$ ,  $f_{X_1 Y_1 X_2 Y_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) = f_{X_1 Y_2}(x_1, y_2) \times f_{X_2 Y_1}(x_2, y_1)$  e (ii) para  $\lambda_2 = 0$ ,  $f_{X_1 Y_1 X_2 Y_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) = f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \times f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2)$ . Substituindo  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = \lambda \hat{r}_1^{\alpha_1/2} \hat{r}_2^{\alpha_2/2} / (2\mu)$  em (4) e repetindo o procedimento para  $\lambda_2 = 0$  e  $\lambda_1 = \lambda \hat{r}_1^{\alpha_1/2} \hat{r}_2^{\alpha_2/2} / (2\mu)$  são obtidas as FDPs de  $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ ,  $f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2)$ ,  $f_{X_1 Y_2}(x_1, y_2)$  e  $f_{X_2 Y_1}(x_2, y_1)$ , não mostradas aqui por uma questão de conveniência. Porém, podem ser obtidas diretamente de (1) fazendo as seguintes considerações: (i) Para  $Z = X$ ,  $\circ \rightarrow +$  e  $\odot \rightarrow -$ , obtém-se  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ , (ii) para  $Z = Y$ ,  $\circ \rightarrow -$  e  $\odot \rightarrow +$ , obtém-se  $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ , (iii) para  $Z_1 = X_1$  e  $Z_2 = Y_2$ ,  $\circ \rightarrow +$  e  $\odot \rightarrow -$ , obtém-se  $f_{X_1, Y_2}(x_1, y_2)$  e (iv) para  $Z_1 = Y_1$  e  $Z_2 = X_2$ ,  $\circ \rightarrow -$  e  $\odot \rightarrow +$ , obtém-se  $f_{X_2, Y_1}(x_2, y_1)$ .

### IV. FDP DA DIFERENÇA DE FASE

Para a investigação da análise de desempenho na Seção V, a determinação da FDP da diferença de fase é necessária. Por meio da seguinte transformação de variáveis  $f_{P_1, P_2, \Delta\theta, \Phi}(\rho_1, \rho_2, \Delta\theta, \Phi) = f_{P_1, \Theta_1, P_2, \Theta_2}(\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2) |J|$ , (5) é então obtida, em que  $\Delta\theta = \Theta_1 - \Theta_2$ ,  $\Phi = \Theta_2$  e  $|J| = 1$ . A

$$\begin{aligned}
 f_{X_1, X_2, Y_1, Y_2}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \frac{2^\mu (\lambda^2)^{1-\mu} \sqrt{|\lambda_1 x_1 x_2 + \lambda_2 x_1 y_2|^{(1+p)\mu} |\lambda_1 y_1 y_2 - \lambda_2 x_2 y_1|^{(1-p)\mu}}}{(\mu^2 \hat{r}_1^{-\alpha_1} \hat{r}_2^{-\alpha_2})^{-(\mu+1)} (1-\lambda^2)^2 \Gamma((1-p)\mu/2) \Gamma((1+p)\mu/2)} \\
 &\times \exp\left(\frac{(x_1^2 + y_1^2) \hat{r}_2^{\alpha_2} + (x_2^2 + y_2^2) \hat{r}_1^{\alpha_1} - 4\mu(\lambda_1(x_1 x_2 + y_1 y_2) + \lambda_2(x_1 y_2 - x_2 y_1))}{(1-\lambda^2) \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2} / (-\mu)}\right) I_{\frac{(1+p)\mu}{2}-1}\left(\frac{4|\lambda_1 x_1 x_2 + \lambda_2 x_1 y_2|}{\mu^{-2} (1-\lambda^2) \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \\
 &\times I_{\frac{(1-p)\mu}{2}-1}\left(\frac{4\mu^2 |\lambda_1 y_1 y_2 - \lambda_2 x_2 y_1|}{(1-\lambda^2) \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{4\mu^2 |\lambda_1 x_1 x_2 + \lambda_2 x_1 y_2|}{(1-\lambda^2) \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{4\mu^2 |\lambda_1 y_1 y_2 - \lambda_2 x_2 y_1|}{(1-\lambda^2) \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2}}\right). \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{P_1, P_2, \Delta\theta, \Phi}(\rho_1, \rho_2, \Delta\theta, \phi) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 \sqrt{|\cos(\Delta\theta + \varphi) + \cos(\Delta\theta - \varphi + 2\phi)|^{(1+p)\mu} |\cos(\Delta\theta + \varphi) - \cos(\Delta\theta - \varphi + 2\phi)|^{(1-p)\mu}}}{(\mu/2)^{-(\mu+2)} \lambda^{\mu-2} \rho_1^{1-(\alpha_1(\mu+2)/2)} \rho_2^{1-(\alpha_2(\mu+2)/2)} (1-\lambda^2)^2 \Gamma((1-p)\mu/2) \Gamma((1+p)\mu/2)} \\
 &\times \exp\left(-\frac{\mu(\rho_1^{\alpha_1} + \rho_2^{\alpha_2} - 2\lambda\rho_1^{\alpha_1/2} \rho_2^{\alpha_2/2} \cos(\Delta\theta + \varphi))}{1-\lambda^2}\right) I_{\frac{(1+p)\mu}{2}-1}\left(\frac{\mu\lambda |\cos(\Delta\theta + \varphi) + \cos(\Delta\theta - \varphi + 2\phi)|}{\rho_1^{-\alpha_1/2} \rho_2^{-\alpha_2/2} (1-\lambda^2)}\right) \\
 &\times I_{\frac{(1-p)\mu}{2}-1}\left(\frac{\mu\lambda |\cos(\Delta\theta + \varphi) - \cos(\Delta\theta - \varphi + 2\phi)|}{\rho_1^{-\alpha_1/2} \rho_2^{-\alpha_2/2} (1-\lambda^2)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\mu\lambda |\cos(\Delta\theta + \varphi) + \cos(\Delta\theta - \varphi + 2\phi)|}{\rho_1^{-\alpha_1/2} \rho_2^{-\alpha_2/2} (1-\lambda^2)}\right) \\
 &\times \operatorname{sech}\left(\mu\lambda |\cos(\Delta\theta + \varphi) - \cos(\Delta\theta - \varphi + 2\phi)| (\rho_1^{-\alpha_1/2} \rho_2^{-\alpha_2/2} (1-\lambda^2))^{-1}\right). \quad (5)
 \end{aligned}$$

FDP da diferença de fase é obtida de (5) por  $f_{\Delta\theta}(\Delta\theta, \lambda, p) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_{P_1, P_2, \Delta\theta, \Phi}(\rho_1, \rho_2, \Delta\theta, \phi) d\rho_1 d\rho_2 d\phi$ . Para  $\mu = 1$  e  $p = 0$  a FDP é obtida sobre a forma fechada como:

$$f_{\Delta\theta}(\Delta\theta, \lambda) = \frac{\left(\frac{\lambda \cos(\Delta\theta + \varphi) \left(2 \arctan\left(\frac{\lambda \cos(\Delta\theta + \varphi)}{\sqrt{1 - (\lambda \cos(\Delta\theta + \varphi))^2}}\right) + \pi\right)}{2\sqrt{1 - (\lambda \cos(\Delta\theta + \varphi))^2}} + 1\right)}{2\pi (1 - (\lambda \cos(\Delta\theta + \varphi))^2) (1 - \lambda^2)^{-1}}, \quad (6)$$

em que  $-\varphi - \pi \leq \Delta\theta < -\varphi + \pi$ . A Figura 1(a) mostra a FDP exata da diferença de fase para diferentes valores de  $p$ . Quando  $|p|$  aumenta, a FDP tende a mudar o seu formato se concentrando em torno da origem, tendendo a um impulso quando  $|p| \rightarrow 1$ . Para  $\varphi \neq 0$  a FDP, apenas sofre um deslocamento em  $\Delta\theta$ , com simetria em relação a  $\Delta\theta = -\varphi$ .

## V. EXEMPLO DE APLICAÇÃO: ANÁLISE DE DESEMPENHO PARA A MODULAÇÃO BPSK

Considere um sinal transmitido sobre um canal  $\alpha$ - $\mu$  com desvanecimento plano. Admitindo estimação de canal imperfeita, o sinal recebido discreto é dado por  $\hat{z} = R_1 \exp(j\Theta_1)x + n$ , sendo  $x$  um sinal transmitido com energia média por bit  $E_b$  e  $n$  é o ruído Gaussiano com densidade espectral de potência unilateral  $N_0$ .  $R_1$  e  $\Theta_1$  são, respectivamente, a envoltória e fase do canal  $\alpha$ - $\mu$  pelo qual trafega o sinal transmitido. No lado do receptor é utilizado  $R_2 \exp(j\Theta_2)$  como o coeficiente de desvanecimento estimado para cancelar  $R_1 \exp(j\Theta_1)$ , tal que  $z = \hat{z}/(R_2 e^{j\Theta_2}) = R_1 e^{-j(\Theta_1 - \Theta_2)} x / R_2 + n / R_2 e^{j\Theta_2}$ . Observe que as variáveis aleatórias  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$  são completamente descritas pela FDP conjunta correlacionada  $\alpha$ - $\mu$  dada em (3) com diferença de fase associada à variável aleatória  $\Delta\Theta = \Theta_1 - \Theta_2$  cuja FDP é dada por  $f_{\Delta\theta}(\Delta\theta, \lambda, p)$ .

Notar que  $f_{\Delta\theta}(\Delta\theta, \lambda, p)$  depende, em última análise, do valor de  $\lambda$  e não dos valores específicos de  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$ , dado

que infinitas combinações de valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  levam a um mesmo valor de  $\lambda$ . Consequentemente, para um dado valor de  $\lambda$  é possível obtermos infinitos valores de  $\varphi$ . Também,  $f_{\Delta\theta}(\Delta\theta, \lambda, p)$  é uma função par em relação aos parâmetros  $p$  e  $\lambda$ . Ainda, os cálculos da ABEP devem ser feitos em toda a extensão da fase  $\Delta\theta$ , ou seja,  $-\varphi - \pi \leq \Delta\theta < -\varphi + \pi$ . Desta maneira, sem perda de generalidades, adotou-se  $\varphi = 0$ , o que resultará em uma expressão da ABEP mais simples. Baseado nessas informações, a expressão da ABEP será dada por

$$P_s = \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma} \cos \Delta\theta) f_{\Delta\theta}(\Delta\theta, |\lambda|, |p|) f_{\Gamma}(\gamma) d\Delta\theta d\gamma, \quad (7)$$

sendo  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  a função erro complementar e  $\gamma$  a RSR instantânea por bit de um sinal recebido. A escolha da modulação BPSK para o cálculo da ABEP é devido à sua simplicidade, porém, a extensão do modelo para uma modulação de ordem superior pode ser realizada de forma direta.

Na Figura 1(b), as curvas da ABEP são traçadas em função da RSR média por bit. Para as análises é considerado um sistema BPSK, canal com desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$ , ruído aditivo Gaussiano branco (*additive white Gaussian noise*, AWGN) e erro de estimação da portadora (ruído de fase) representado pela FDP da diferença de fase  $f_{\Delta\theta}(\Delta\theta, \lambda, p)$ . A ABEP é analisada para um valor fixo de  $\mu = 2.8$  e os seguintes parâmetros: (i)  $\alpha = \{1, 5; 2; \infty\}$ , (ii)  $\lambda = \{0.5; 0.7; 0.9\}$  e (iii)  $|p| = \{0; 0.3; 0.5; 0.7\}$ . Para efeito de comparação, também foi incluída uma curva considerando o caso AWGN com detecção coerente ideal ( $\lambda \rightarrow 1$ ). Pode-se observar que a ABEP melhora de forma significativa (diminui) quando  $\lambda$  aumenta de valor e o contrário ocorre quando  $\lambda$  diminui (piora). Em um cenário de alta RSR para um valor de  $\mu$  fixo, observa-se nas curvas que os valores da ABEP tendem a se manterem constantes com um valor de erro irreduzível (erro mínimo) sendo dependente apenas dos parâmetros  $\lambda$  e

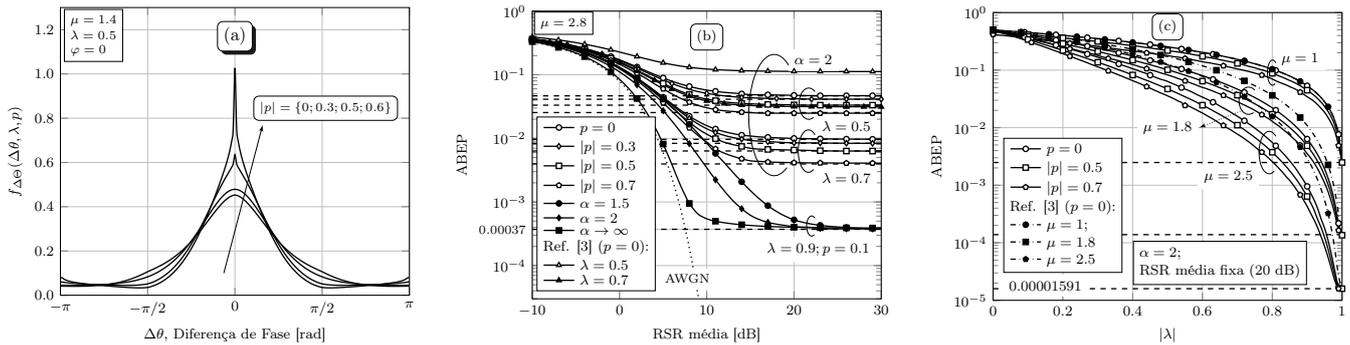


Fig. 1. (a) FDP da diferença de fase, (b) ABEP em função da RSR média e (c) ABEP em função da correlação de potência.

$p$ , não sofrendo influência do parâmetro de não-linearidade  $\alpha$ . Nessa situação de  $RSR \rightarrow \infty$  (alta RSR), o efeito do canal e também do ruído AWGN (ruído térmico) não possuem influência alguma sobre as estatísticas da ABEP, permitindo que a mesma seja determinada por assintotas pela seguinte relação  $P_s^\infty = 1 - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_{\Delta\Theta}(\Delta\theta, |\lambda|, |p|) d\theta$ . Na Figura 1(b), as assintotas são ilustradas por linhas tracejadas. Pode-se observar que os valores da ABEP tendem para os valores assintóticos. Por exemplo, para  $\lambda = 0.9$  o valor da ABEP é de 0.00037. Outro fato importante observado é com relação ao parâmetro  $p$ ; para  $\alpha = 2$  (Nakagami- $m$ ) e  $\lambda = \{0.5; 0.7\}$ , pode-se observar que com o aumento em módulo de  $p$ , menor é o valor da ABEP, ou seja, o aumento do parâmetro  $p$  faz com que ocorra uma melhora no desempenho do sistema. Para  $p = 0$ , comparando os resultados do modelo proposto neste artigo (fase não-uniforme) com o modelo em [3] (fase uniforme), observa-se que os valores da ABEP são maiores dos que foram obtidos aqui neste trabalho, concluindo assim que os resultados obtidos em [3], constituem um cenário de ABEP mais pessimista para um dado valor de  $\lambda$ , corroborando com os já apresentados em [4] (modelo  $\alpha$ - $\mu$  sem desbalanceamento entre *clusters*). Para  $\alpha = 2$ ,  $\mu = 1$  e  $p = 0$ , os resultados apresentados são equivalentes a [3] para  $m = 1$  (distribuição de envoltória Rayleigh e fase uniforme).

A Figura 1(c) mostra a ABEP em função de  $|\lambda|$  para diferentes valores de  $\mu$  e  $p$ . Pelas curvas pode-se observar que o valor da ABEP diminui à medida que os valores de  $\lambda$ ,  $p$  e  $\mu$  aumentam. Para  $\lambda = 1$ , o valor da ABEP alcança um valor mínimo irreduzível e nessas condições não ocorre erro de fase, sofrendo apenas influência do desvanecimento e do AWGN. Para  $\mu = 2.5$  por exemplo, o valor de ABEP mínimo é de 0.00001591.

## VI. CONCLUSÕES

Neste artigo foi proposto um modelo complexo  $\alpha$ - $\mu$  de dois processos correlacionados. A inclusão do parâmetro de fase e do parâmetro de desbalanceamento de *clusters*, além dos parâmetros já existentes no modelo apresentado, permitem análises mais amplas e mais próximas da realidade. Foi possível concluir que o desbalanceamento entre *clusters* de multipercorso afeta o desempenho médio do sistema. Este desbalanceamento entre *clusters*, de certa forma, é equivalente ao desbalanceamento de potências entre fase e quadratura.

Como sabido, o desbalanceamento de potência, neste caso, pode ser mapeado em correlação. E, maior a correlação, menos dispersiva é a diferença de fase, o que, certamente, implica em melhor desempenho. Também, diferentes combinações de correlações das componentes em fase ou em quadratura, ou fase-quadratura, levam a um mesmo desempenho, considerando um valor fixo de correlação entre os processos  $\alpha$ - $\mu$ . Essa conclusão não pode ser afirmada para outras análises (e.g. correlação de fase), necessitando de investigações futuras. Observe também que os trabalhos apresentados em [4]–[6] correspondem a casos particulares do modelo apresentado. Questões sobre a influência da fase no desempenho de outros sistemas de modulação, banda, tempo e distância de coerência deverão ser respondidas em trabalhos futuros.

## REFERÊNCIAS

- [1] K. A. Hamdi, “Analysis of OFDM over Nakagami- $m$  fading with non-uniform phase distributions,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 11, no. 2, pp. 488–492, Feb. 2012.
- [2] J. A. Anastasov, Z. M. Marjanović, D. N. Milić, and G. T. Djordjević, “Average BER and noisy reference loss of partially coherent PSK demodulation over shadowed multipath fading channel,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 67, no. 8, pp. 7831–7835, Aug. 2018.
- [3] C. Polprasert and J. A. Ritcey, “A Nakagami fading phase difference distribution and its impact on BER performance,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 7, no. 7, pp. 2805–2813, Jul. 2008.
- [4] T. A. M. Bairros, P. M. R. Pereira, R. A. A. Souza, and M. D. Yacoub, “Bivariate complex  $\alpha$ - $\mu$  statistics,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 71, no. 3, pp. 3276–3280, Mar. 2022.
- [5] A. P. Oliveira, T. A. M. Bairros, and M. D. Yacoub, “Modelo complexo  $\alpha$ - $\mu$  bivariável com desbalanceamento de potência,” in *Anais do XXXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBRT2018)*, Set. 2018.
- [6] T. A. M. Bairros, A. P. Oliveira, R. A. A. Souza, and M. D. Yacoub, “Modelo complexo  $\alpha$ - $\mu$  bivariável com correlações cruzadas,” in *Anais do XXXVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBRT2019)*, Set. 2019.
- [7] M. D. Yacoub, “The  $\alpha$ - $\mu$  distribution: A physical fading model for the Stacy distribution,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 56, no. 1, pp. 27–34, Jan. 2007.
- [8] —, “Nakagami- $m$  phase-envelope joint distribution: A new model,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 59, no. 3, pp. 1552–1557, Mar. 2010.
- [9] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York, NY, USA: Dover, 1972.
- [10] W. C. Jakes and D. C. Cox, Eds., *Microwave Mobile Communications*. New York, NY, USA: Wiley-IEEE Press, 1994.
- [11] J. R. Mendes, M. D. Yacoub, and U. S. Dias, “Power correlation coefficient of a very general fading model in maximal ratio combining,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 58, no. 9, pp. 2472–2479, Sep. 2010.