

Radiação Bidimensional de uma Linha de Corrente em Regiões Estratificadas na Horizontal e Vertical

Jeferson B. N. Leite e Karlo Q. da Costa

Resumo—Este artigo apresenta uma análise teórica da radiação de uma linha de corrente magnética sobre regiões compostas por três meios com estratificação horizontal e vertical. Utilizando as equações de Maxwell e o método da função de Green, obtemos um sistema de equações integrais para cálculo dos campos nos três meios. O Método dos Momentos foi utilizado para resolver este sistema, no entanto alguns resultados foram obtidos pelo Método dos Elementos Finitos para comparação. Os resultados mostram quatro exemplos de regiões com diferentes combinações de materiais (ar, água e solo), e fonte operando em 521 MHz com polarização vertical.

Palavras-chaves—radiação, estratificação vertical e horizontal; meio não homogêneo, funções de Green; Método dos Momentos

Abstract—This paper presents a theoretical analysis of radiation of a magnetic line current in regions composed by three media with horizontal and vertical stratification. Using the Maxwell equations and the Green’s function method, we derive a system of integral equation to calculate the fields in the three media. The Method of Moments was used to solve this system, but some results were obtained by Finite Element Method for comparison. The results show four examples of regions with different materials combinations (air, water and soil) and source operating in 521 MHz with vertical polarization.

Keywords— radiation; vertical and horizontal stratification; inhomogeneous medium; Green’s functions; Method of Moment

I. INTRODUÇÃO

O problema de propagação de ondas eletromagnéticas em meios estratificados na horizontal e vertical é bem conhecido e explorado na literatura [1]-[4]. Em [1]-[2] os autores analisam os efeitos de propagação de ondas planas atravessando dois meios: terra e mar, e também a situação com três meios: terra, mar e terra. Neste trabalho a estratificação é na vertical e foi utilizado um método relativamente simples chamado de função de atenuação. Em [3] os autores analisaram o comportamento do campo atravessando um meio com estratificação vertical por uma solução semi-analítica com baixo custo computacional comparada com métodos numéricos. Em [4] os autores estudaram os campos quase estáticos próximo de uma borda dielétrica, onde a estratificação não possui um ângulo de 90 graus (vertical) ou 180 graus (horizontal), mas pode ter qualquer valor angular (azimutal).

Uma situação particular é a propagação de ondas em meios estratificados tanto na horizontal quanto na vertical simultaneamente. Este caso considera no mínimo três meios diferentes. Modelos matemáticos para cálculo da intensidade e fase dos campos eletromagnéticos, no qual a fonte é localizada em um dos meios, podem ser obtidos pelo método da função

de Green [5] e pelo Método dos Momentos (MoM) [6]. O método da função de Green tem sido utilizado para resolver problemas heterogêneos e estratificados com campos estáticos [7]-[8] e eletrodinâmicos com aproximações [9]. Entretanto uma solução analítica exata para campos dinâmicos tem sido pouco explorada na literatura.

Apresentamos aqui uma solução semi-analítica do problema de uma fonte de corrente magnética linear em uma região com estratificação horizontal e vertical. Primeiro derivamos, pelo método da função de Green, um sistema de equações integrais para o campo magnético e depois resolvemos este sistema pelo MoM. Utilizamos este modelo para analisar quatro exemplos de regiões estratificadas na horizontal e vertical com diferentes combinações dos meios: ar, água e solo. A fonte utilizada opera em 521 MHz com polarização vertical.

II. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

A. Descrição do Problema

A Fig. 1 mostra a geometria dos problemas considerados neste trabalho. Nesta figura temos uma região não homogênea bidimensional com estratificação horizontal no eixo y e vertical no eixo x . A região é dividida em três meios, sendo que são considerados 4 casos com diferentes combinações dos materiais ar, água e solo para estes meios.

Cada meio possui uma permissividade relativa ($\epsilon_{r1}, \epsilon_{r2}, \epsilon_{r3}$), condutividade elétrica ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), permissividade complexa ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$) e permeabilidade ($\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_0$) para os meios 1, 2 e 3, respectivamente. O sistema de coordenadas é o cartesiano, onde o meio 1 está em $y>0$ e $-\infty<x<+\infty$, o meio 2 em $y<0$ e $x<0$, e o meio 3 em $y<0$ e $x>0$.

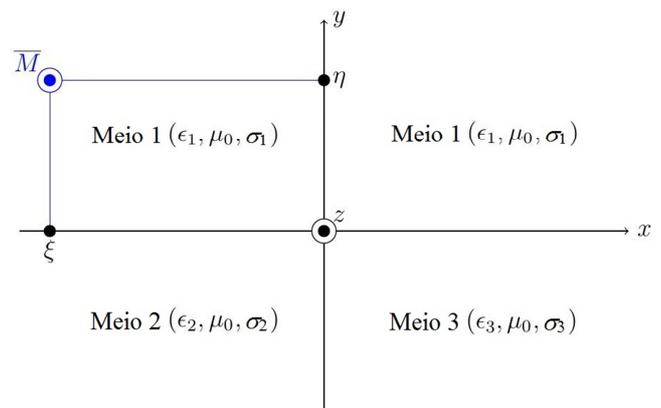


Fig. 1. Geometria do problema de radiação bidimensional (plano xy) de uma linha de corrente magnética (paralela ao eixo z) em um a regioes com três meios estratificados na horizontal (eixo y) e vertical (eixo x).

A fonte utilizada é uma linha de corrente magnética infinita paralela ao eixo z , localizada no ponto $x = \xi$ e $y = \eta$ e dada por:

$$\vec{M}(x, y) = M_0 \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) \vec{a}_z \quad (1)$$

onde M_0 é a intensidade da corrente magnética linear (V) [10] e \vec{a}_z um vetor unitário no eixo z . Os campos eletromagnéticos radiados por esta fonte satisfazem as equações de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} - \vec{M} \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \quad (3)$$

onde a dependência temporal considerada é $\exp(j\omega t)$, sendo j a unidade imaginária, ω a frequência angular e t a variável temporal. Devido a geometria e a fonte (Fig. 1) o problema é bidimensional no plano xy , neste caso temos $\partial/\partial z = 0$ e polarização vertical (TM_y). Com estas considerações, (1)-(3) produz a seguinte equação da onda escalar para a componente z do campo magnético (H_z):

$$\nabla_{xy}^2 H_z + k^2 H_z = j\omega\varepsilon M_z \quad (4)$$

onde $k = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2}$ e M_z é a componente escalar de (1). Como a fonte (1) está no meio 1, à equação (4) é não homogênea para o meio 1 e homogênea para os meios 2 e 3.

B. Equação Integral do Problema

Aplicando o método da função de Green e as condições de contorno ao problema descrito na seção anterior [5], obtemos as seguintes soluções na forma integral de (4) para cada meio:

$$H_{z1}(x, y) = -j\omega\varepsilon_1 M_0 g_1(\xi, \eta, x, y) - \int_{-\infty}^0 g_1(x', 0, x, y) \frac{\partial H_{z1}}{\partial y'} \Big|_{y'=0} dx' - \int_0^{+\infty} g_1(x', 0, x, y) \frac{\partial H_{z1}}{\partial y'} \Big|_{y'=0} dx' \quad (5)$$

$$H_{z2}(x, y) = \int_{-\infty}^0 g_2(x', 0, x, y) \frac{\partial H_{z2}}{\partial y'} \Big|_{y'=0} dx' + \int_{-\infty}^0 g_2(0, y', x, y) \frac{\partial H_{z2}}{\partial x'} \Big|_{x'=0} dy' \quad (6)$$

$$H_{z3}(x, y) = \int_0^{+\infty} g_3(x', 0, x, y) \frac{\partial H_{z3}}{\partial y'} \Big|_{y'=0} dx' - \int_{-\infty}^0 g_3(0, y', x, y) \frac{\partial H_{z3}}{\partial x'} \Big|_{x'=0} dy' \quad (7)$$

onde g_1 , g_2 e g_3 são as funções de Green dos meios 1, 2 e 3, respectivamente:

$$g_1(x, y, x', y') = \frac{1}{4j} \left[H_0^2(k_1 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}) + H_0^2(k_1 \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}) \right] \quad (8)$$

$$g_u(x, y, x', y') = \frac{1}{4j} \left[H_0^2(k_u \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}) + H_0^2(k_u \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}) + H_0^2(k_u \sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2}) + H_0^2(k_u \sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2}) \right] \quad (9)$$

sendo $u=2$ ou 3 .

As condições de contorno de continuidade dos campos elétricos e magnéticos, nas três interfaces entre os meios da Fig. 1, são:

$$E_a(x') = \frac{1}{j\omega\varepsilon_1} \frac{\partial H_{z1}}{\partial y'} \Big|_{y'=0} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_2} \frac{\partial H_{z2}}{\partial y'} \Big|_{y'=0}, \quad -\infty < x' < 0 \quad (10)$$

$$E_b(x') = \frac{1}{j\omega\varepsilon_1} \frac{\partial H_{z1}}{\partial y'} \Big|_{y'=0} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_3} \frac{\partial H_{z3}}{\partial y'} \Big|_{y'=0}, \quad 0 < x' < +\infty \quad (11)$$

$$E_c(y') = \frac{1}{j\omega\varepsilon_2} \frac{\partial H_{z2}}{\partial x'} \Big|_{x'=0} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_3} \frac{\partial H_{z3}}{\partial x'} \Big|_{x'=0}, \quad -\infty < y' < 0 \quad (12)$$

$$H_{z1}(x, 0) = H_{z2}(x, 0), \quad -\infty < x < 0 \quad (13)$$

$$H_{z1}(x, 0) = H_{z3}(x, 0), \quad \infty < x < +\infty \quad (14)$$

$$H_{z2}(0, y) = H_{z3}(0, y), \quad -\infty < y < 0 \quad (15)$$

onde E_a é o campo elétrico tangencial na interface entre os meios 1 e 2, E_b é o campo elétrico tangencial na interface entre os meios 1 e 3, e E_c é o campo elétrico tangencial na interface entre os meios 2 e 3. Substituindo (10)-(15) em (5)-(7), obtemos o seguinte sistema de equações integrais:

$$\int_{-\infty}^0 [\varepsilon_1 g_1(x', 0, x, 0) + \varepsilon_2 g_2(x', 0, x, 0)] E_a(x') dx' + \int_0^{+\infty} \varepsilon_1 g_1(x', 0, x, 0) E_b(x') dx' - \int_{-\infty}^0 \varepsilon_2 g_2(0, y', x, 0) E_c(y') dy' = -\varepsilon_1 M_0 g_1(\xi, \eta, x, 0) \quad (16)$$

$$\int_{-\infty}^0 \varepsilon_1 g_1(x', 0, x, 0) E_a(x') dx' + \int_0^{+\infty} [\varepsilon_1 g_1(x', 0, x, 0) + \varepsilon_3 g_3(x', 0, x, 0)] E_b(x') dx' + \int_{-\infty}^0 \varepsilon_3 g_3(0, y', x, 0) E_c(y') dy' = -\varepsilon_1 M_0 g_1(\xi, \eta, x, 0) \quad (17)$$

$$-\int_{-\infty}^0 \varepsilon_2 g_2(x', 0, 0, y) E_a(x') dx' + \int_0^{+\infty} \varepsilon_3 g_3(x', 0, 0, y) E_b(x') dx' + \int_{-\infty}^0 [\varepsilon_3 g_3(0, y', 0, y) + \varepsilon_2 g_2(0, y', 0, y)] E_c(y') dy' = 0 \quad (18)$$

As funções desconhecidas E_a , E_b e E_c são obtidas resolvendo o sistema acima, e com obtenção destas funções podemos substituí-las em (10)-(12), (5)-(7) e (3) para obter os campos eletromagnéticos em todos os meios.

C. Solução do Sistema pelo MoM

A solução numérica do sistema (16)-(18) pode ser realizada pelo MoM [5]-[6]. Neste método aproximamos as funções E_a , E_b e E_c por expansões em um determinado conjunto de funções de base. No presente estudo utilizamos as seguintes expansões do tipo pulso retangular:

$$E_a(x') = \sum_{n_a=1}^{N_a} \alpha_{n_a} p_{n_a}, \quad E_b(x') = \sum_{n_b=1}^{N_b} \alpha_{n_b} p_{n_b} \quad \text{e} \quad E_c(y') = \sum_{n_c=1}^{N_c} \alpha_{n_c} p_{n_c} \quad (19)$$

onde α_{n_a} , α_{n_b} e α_{n_c} são os coeficientes de expansão e p_{n_a} , p_{n_b} e p_{n_c} as funções de expansão (funções de base) do tipo pulso

retangular. Estas funções tem valor 1 ao longo de um subintervalo genérico Δx_a , Δx_b e Δy_c , e valor 0 fora deste intervalo, onde $\Delta x_a = |x_{min}|/N_a$, $\Delta x_b = |x_{max}|/N_b$ e $\Delta y_c = |y_{min}|/N_c$ ao longo dos intervalos $x_{min} < x' < 0$, $0 < x' < x_{max}$ e $y_{min} < y' < 0$, respectivamente, nas interfaces dos três meios. Os parâmetros N_a , N_b e N_c são as discretização de cada intervalo. A Fig. 2 mostra curvas genéricas das expansões (19), onde os pontos destacados x_{an} , x_{bn} e y_{cn} são os pontos centrais de cada subintervalo. As expansões em (19) convergem para as funções desconhecidas para maiores valores de N_a , N_b e N_c , e quando $x_{min} \rightarrow -\infty$, $x_{max} \rightarrow +\infty$ e $y_{min} \rightarrow -\infty$.

Substituindo (19) em (16)-(18) obtemos um sistema algébrico do tipo $[I][\alpha] = [f]$ de ordem $N_a + N_b + N_c$, onde $[\alpha]$ é um vetor coluna que contém as incógnitas α_{na} , α_{nb} e α_{nc} de (19), $[f]$ é um vetor coluna que contém a fonte de corrente magnética de (16) e (17), e $[I]$ é uma matriz que representa a interação mútua entre todos os subintervalos. Os coeficientes desta matriz contém integrais com limites em cada subintervalo, onde o integrando contém as funções de Green (8) e (9) e as permissividades nos meios. A solução é obtida por inversão matricial $[\alpha] = [I]^{-1}[f]$, e os $[\alpha]$ obtidos são então substituídos em (19), (10)-(12) e (5)-(7) para calcular aproximadamente o campo magnético H_z em cada meio.

III. RESULTADOS NUMÉRICOS

Baseado no método apresentado na seção anterior, desenvolvemos um programa MoM em Matlab [11] para calcular os campos elétricos tangenciais (19) nas interfaces e os campos magnéticos (5)-(7). Para comparação, calculamos alguns resultados pelo FEM com o software Comsol [12]. Os resultados apresentados a seguir mostram uma análise comparativa de 4 casos de radiação com diferentes combinações dos materiais ar, água e solo nos meios 1-3. A fonte opera em 521 MHz com polarização vertical, onde o comprimento de onda no ar é $\lambda_0 = 0,58\text{m}$.

A. Campo Elétrico Tangencial nas Interfaces

As Tabelas 1 e 2 mostram os casos analisados e as propriedades eletromagnéticas de cada meio. Os casos 1 e 2 possuem 2 meios com estratificação na horizontal. Já os casos 3 e 4 com 3 meios tem estratificação na horizontal e vertical.

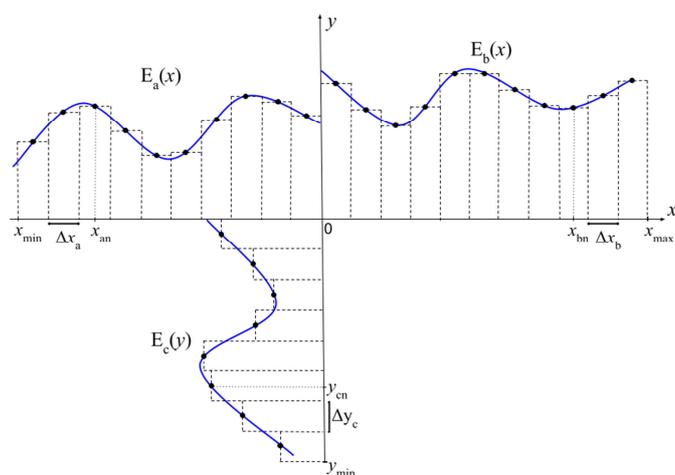


Fig. 2. Expansão por pulso retangular de E_a , E_b e E_c nas interfaces.

TABELA I. COMBINAÇÕES DOS MEIOS 2 E 3 PARA OS 4 CASOS ANALISADOS. O MEIO 1 É O AR EM TODOS OS CASOS (FIG. 1).

Casos Analisados	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
Meio 2	Água	Solo	Água	Solo
Meio 3	Água	Solo	Solo	Água

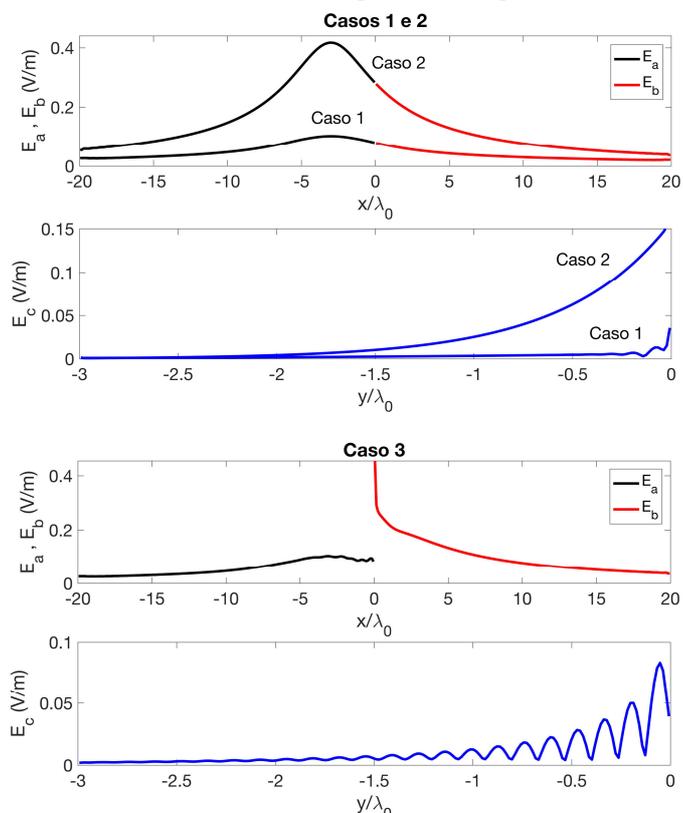
TABELA II. PROPRIEDADES ELETROMAGNÉTICAS DOS MEIOS NA FREQUENCIA DE 521 MHz [9]

Propriedade Eletromagnética	Ar	Água	Solo
Permeabilidade magnética, μ_r	1	1	1
Permissividade relativa, ϵ_r	1	80	1,9
Condutividade, σ (mS/m)	0	50	20

TABELA III. PARÂMETROS UTILIZADOS NAS SIMULAÇÕES ($\lambda_0 = 0,58\text{m}$)

Parâmetro	Value		
Posição da fonte	$\xi = -3\lambda_0$	$\eta = h = 3\lambda_0$	
Limites de E_a , E_b e E_c	$x_{min} = -20\lambda_0$	$x_{max} = 20\lambda_0$	$y_{min} = -3\lambda_0$
Discretização de E_a , E_b e E_c	$N_a = 200$	$N_b = 200$	$N_c = 200$
Área do plot de H_z	$-6\lambda_0 < x, y < 6\lambda_0$		
Discretização da área de plot 2D no plano xy	$N_x = N_y = 400$		

A Tabela 3 mostra os parâmetros utilizados nas simulações e a Fig. 3 mostra os resultados obtidos para os campos E_a , E_b e E_c para os 4 casos. Cada resultado desta figura durou 3 min para ser calculado utilizando um computador com processador i7 e



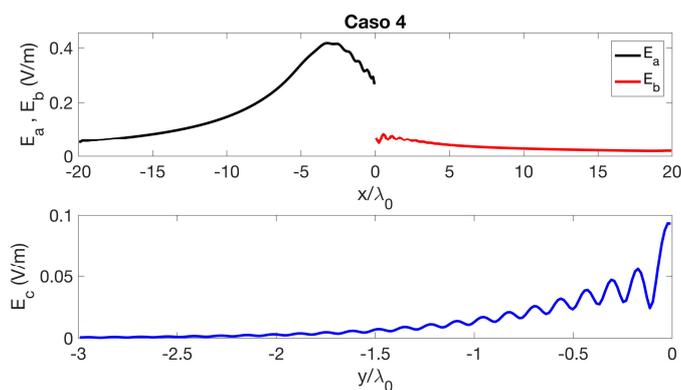


Fig. 3. Módulo dos campos elétricos tangenciais $abs(E_a)$, $abs(E_b)$ e $abs(E_c)$ obtidos ao longo das interfaces para os 4 casos.

16Gb de ram. Observamos na Fig. 3 uma boa resolução das curvas próximo das discontinuidades e baixos valores dos campos próximos dos limites x_{min} , x_{max} e y_{min} . Estas condições são necessárias para obter resultados mais precisos, conforme discutido na seção anterior. Além disso, os casos 1 e 2 apresentam campo elétrico tangencial contínuo na superfície $y=0$ e descontínuo para os casos 3 e 4. Este último resultado está de acordo com a condição de fronteira de descontinuidade do campo normal entre dois meios, no caso os meios 2 e 3 em $x=0$, e a permissividade da água é maior que a do solo.

B. Campo H_z em Função da Altura

A Fig. 4 mostra a variação da intensidade do campo $abs(H_z)$ versus x , para todos os casos, em diferentes alturas em relação à fonte $y=h$, $h/2$, $h/4$, 0 , $-h/4$ e $-h/2$. Para comparação os casos 2 e 4 mostram também os resultados obtidos pelo FEM, e observamos uma boa concordância entre os métodos. Cada curva nessas figuras foi obtida em 1min depois dos cálculos principais (iniciais) apresentados na Fig. 3.

Observamos na Fig. 4, para $y>0$, um comportamento oscilatório devido à interferência das ondas direta e refletida da superfície $y=0$, sendo que esse efeito é maior acima da água, pois o coeficiente de reflexão normal entre ar e água ($|\Gamma|=0,79$) é maior que aquele entre ar e solo ($|\Gamma|=0,15$).

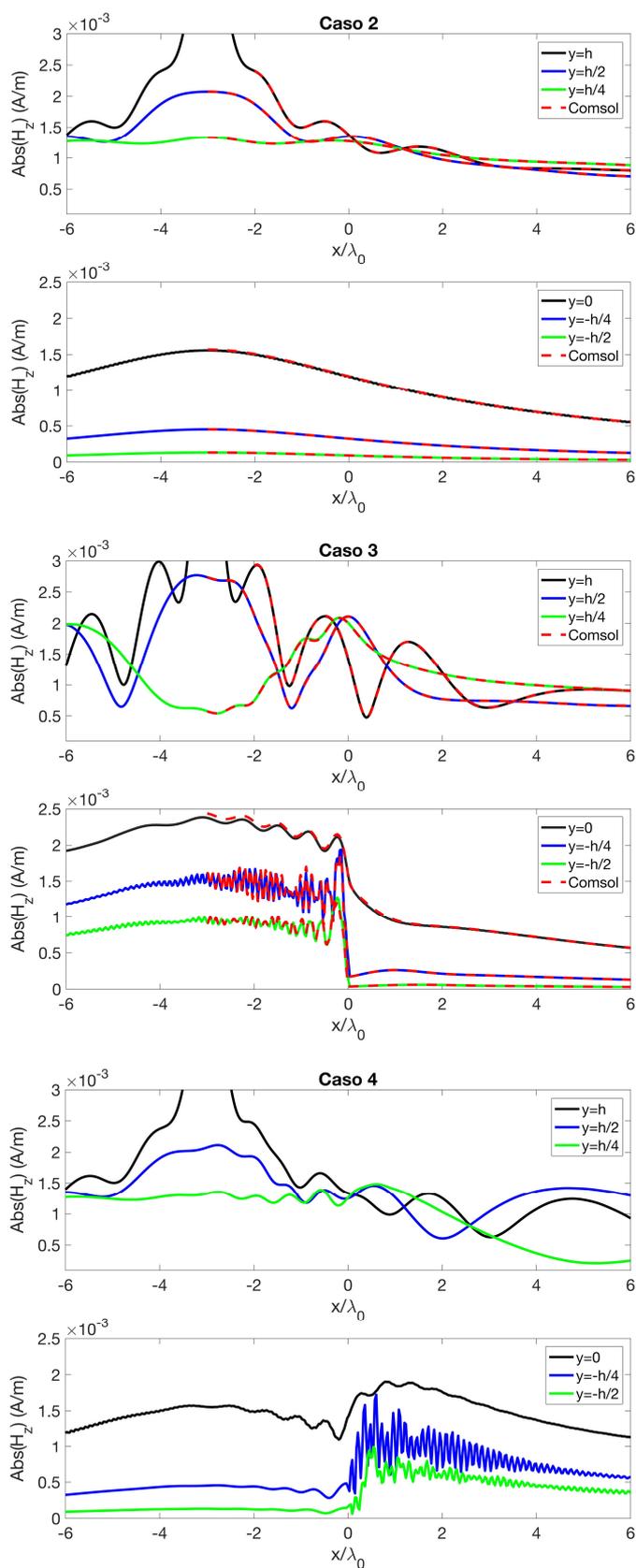
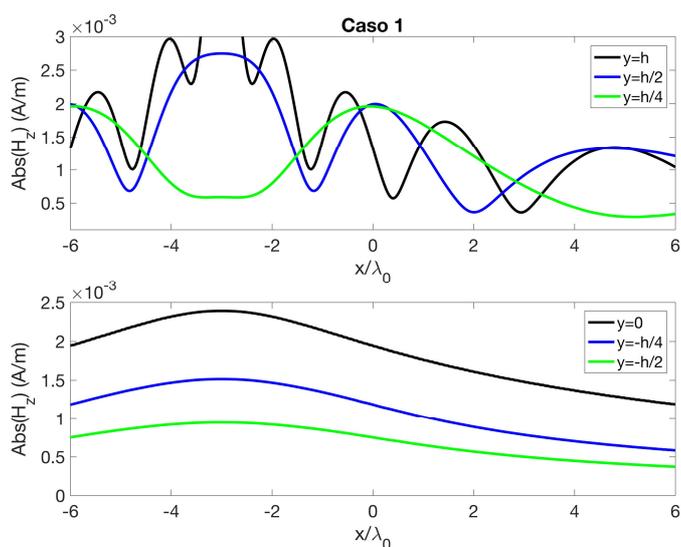


Fig. 4. Módulo do campo magnético $abs(H_z)$ versus x/λ_0 , para todos os casos, em diferentes alturas $y = h$, $h/2$, $h/4$, 0 , $-h/4$ e $-h/2$, onde $h=3\lambda_0$.

Além disso, observamos no caso 4 que a intensidade do campo sofre um ligeiro aumento na superfície ($y=0$) para $x>0$ maior que aquele observado no caso 3.

C. Campo H_z no Plano xy

A Fig. 5 mostra os gráficos bidimensionais no plano xy do módulo $\text{abs}(H_z)$ e fase $\text{angle}(H_z)$ do campo magnético obtido para os 4 casos da Tabela 1. Estes resultados foram obtidos em $400\text{min}=400\text{linhas}\times 1\text{min}/\text{linha}$ horizontal. Estas figuras mostram a variação espacial de uma onda cilíndrica TM_y radiada por uma linha de corrente magnética e se propagando em meios não homogêneos com estratificação horizontal e vertical.

Os casos 1 e 3 mostram um comportamento oscilatório abaixo da fonte maior que os outros casos. Isto ocorre porque

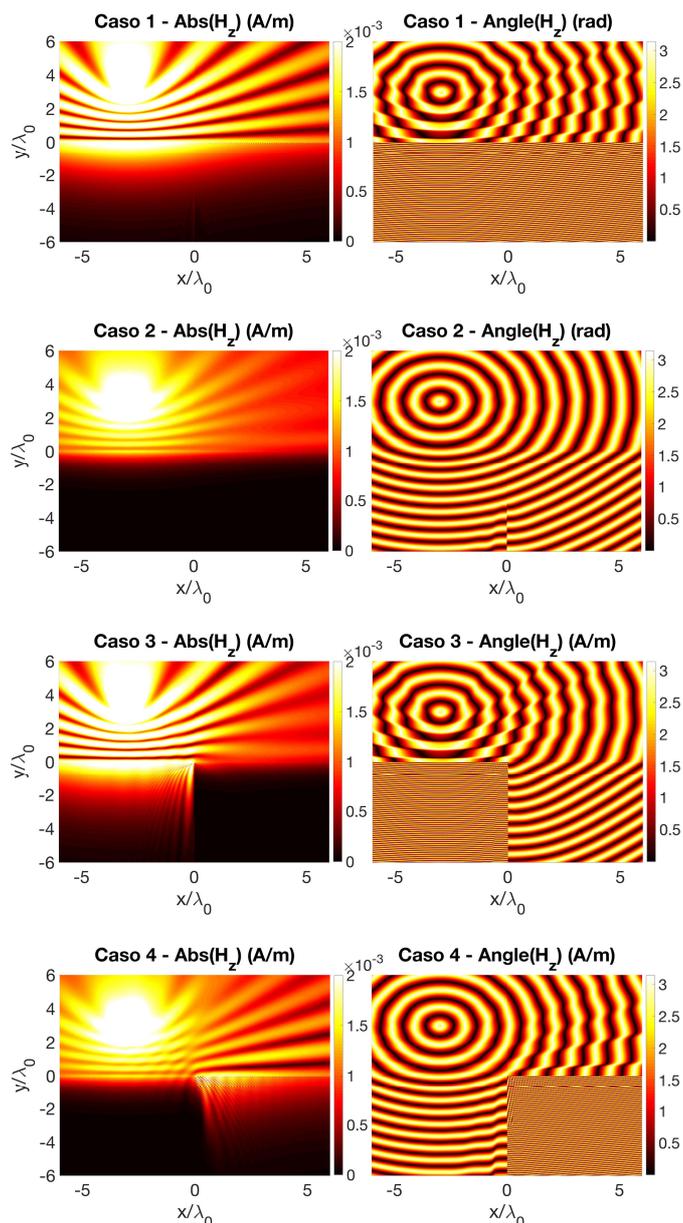


Fig. 5. Gráficos bidimensionais no plano xy do módulo $\text{abs}(H_z)$ e fase $\text{angle}(H_z)$ do campo magnético para os 4 casos da Tabela 1.

a reflexão na água é maior que no solo. Notamos também que os gráficos de $\text{abs}(H_z)$ no solo sofre maior decaimento que na água, pois a tangente de perdas no solo é maior que da água. Comparando os casos 1 e 3 observamos bem a diferença e a transição das ondas no ar de $x<0$ para $x>0$. Esta transição também é evidente comparando os casos 2 e 4. Estes resultados mostram para $x>0$ uma reflexão e difração menor quando a transição é água-solo (caso 3) do que quando a transição é solo-água (caso 4).

IV. CONCLUSÕES

Neste artigo apresentamos uma análise teórica da radiação de uma fonte de corrente magnética linear em regiões com estratificação horizontal e vertical, formadas por ar, água e solo. A frequência da fonte considerada é 521 MHz e a polarização TM_y (vertical). O MoM foi utilizado para análise numérica e alguns resultados foram calculados pelo FEM para comparação, onde uma boa concordância entre eles foi observada. Os resultados dos casos com dois meios ar-água e ar-solo foram comparados e utilizados como referência para entender alguns fenômenos dos casos com três meios: ar-água-solo e ar-solo-água. No caso ar-solo-água o campo na superfície $y=0$ sofre uma ligeira amplificação logo após a interface solo-água ($x=0$). Já no caso ar-água-solo, este campo em $y=0$ sofre uma redução em intensidade quando atravessa a interface água-solo ($x=0$). Também o caso ar-água-solo apresentou menos reflexão e difração para $x>0$ que o caso ar-solo-água. Em trabalhos futuros serão consideradas regiões com quatro meios (ar-água-floresta-solo) e outras polarizações.

REFERÊNCIAS

- [1] J. R. Wait, and L. C. Walters, "Curves for ground wave propagation over mixed land and sea paths," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 11, N. 1, pp. 38-45, Jan. 1963.
- [2] A. Shoory, A. Mimouni, F. Rachidi, V. Cooray, and M. Rubinstein, "On the accuracy of approximate techniques for the evaluation of lightning electromagnetic fields along a mixed propagation Path," *Radio Sci.*, vol. 46, 2011, propagation Path," *Radio Sci.*, vol. 46, 2011.
- [3] W. C. Chew, "Response of a source on top of a vertically stratified half-space," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 33, no. 6, pp. 649-654, Jun. 1985.
- [4] J. B. Andersen, and V. V. Solodukhov, "Field behavior near a dielectric wedge," *IEEE Trans. Ant. Propag.*, vol. 26, N. 4, pp. 598-602, Jul. 1978.
- [5] D. G. Dudley, *Mathematical Foundations for Eletromagnetic Theory*, IEEE Press, 1994.
- [6] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, IEEE Press, 1993.
- [7] R. W. Scharstein. "Green's function for the harmonic potential of the three-dimensional wedge transmission problem," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 52, N. 2, pp. 452-460, Feb. 2004.
- [8] E. Zareian-Jahromi, et.al., "Image solution for the three-dimensional static green's function of a vertically stratified two-layer half space," *IEEE Trans. Ant. Propagat.*, vol. 64, N. 10, pp. 4336-4342, Oct. 2016.
- [9] D. K. N. da Silva, et.al., "A propagation model for mixed paths using dyadic Green's functions: a case study over the river for a city-river-forest path," *IEEE Antennas Wirel. Propagat. Lett.*, vol. 17, N. 12, pp. 2364-2368, Dec. 2018.
- [10] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, 2nd ed., John Wiley and Sons, 2012.
- [11] Matlab software. <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>.
- [12] Comsol software. <https://www.comsol.com>.