

Análise Assintótica Unificada de Estatísticas de Segunda Ordem para Canais de Classe Gaussiana

Vanessa Mendes Rennó, Francisco Raimundo Albuquerque Parente e José Cândido Silveira Santos Filho

Resumo— A natureza dinâmica de um processo aleatório pode ser caracterizada por meio de estatísticas de segunda ordem. Para uma ampla classe gaussiana de modelos de desvanecimento abrangendo vários aspectos físicos do canal sem fio, a análise exata dessas estatísticas produz expressões intrincadas, que têm sido exploradas caso a caso para cenários particulares. Neste trabalho, fornecemos uma análise assintótica geral das estatísticas de segunda ordem em regime de alta relação sinal-ruído para os diversos modelos de desvanecimento da classe gaussiana referida. O arcabouço proposto conduz a expressões simples, unificadas e em forma fechada, capazes de caracterizar o impacto de cada aspecto físico do desvanecimento sobre o canal. Dessa forma, nossos resultados fornecem uma descrição completa, prática e intuitiva do comportamento dinâmico do sistema. As expressões assintóticas obtidas são validadas minuciosamente, tanto reduzindo-as a casos particulares conhecidos quanto por meio de simulações de Monte Carlo.

Palavras-Chave— Alta relação sinal-ruído, análise assintótica, canal de desvanecimento, estatísticas de segunda ordem.

Abstract— The dynamic nature of a random process can be characterized by means of second-order statistics. For a wide Gaussian class of fading models covering various physical aspects of the wireless channel, the exact analysis of these statistics yields intricate expressions, which have been explored on a case-by-case basis for particular scenarios. In this work, we provide a general asymptotic analysis of second-order statistics at high signal-to-noise ratio regime for the various referred Gaussian-class fading models. The proposed framework leads to simple, unified, and closed-form expressions that characterize the impact of each physical aspect of fading on the channel. In this way, our results provide a complete, practical, and intuitive description of the system's dynamic behavior. The asymptotic expressions obtained are thoroughly validated, both by reducing them to known particular cases and via Monte Carlo simulations.

Keywords— Asymptotic analysis, fading channel, high signal-to-noise ratio, second-order statistics.

I. INTRODUÇÃO

Com o notável aumento da taxa de transmissão de dados para a próxima geração de comunicações sem fio, novos cenários de propagação estão surgindo. Organizações padronizadoras, como o 3GPP, já sinalizaram que bandas de frequência acima de 10 GHz, as chamadas bandas de ondas milimétricas (mmWave), devem ser utilizadas para atender demandas que exigem altas taxas de transmissão. Apesar

V. M. Rennó, F. R. A. Parente e J. C. S. Santos Filho fazem parte do Departamento de Comunicações, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas-SP, 13083-852, Brasil (e-mails: {vmendesr, parente, candido}@decom.fee.unicamp.br).

O trabalho de V. M. Rennó foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) com Processo No. 2018/20179-9. O trabalho de F. R. A. Parente foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) com Processo No. 2018/25009-4.

da elevada disponibilidade espectral que a banda mmWave oferece, são grandes os desafios técnicos associados, como os fenômenos de propagação serem percebidos mais fortemente em relação às bandas de frequência mais baixas [1]. Vencer esses desafios requer uma caracterização aprofundada do canal sem fio.

O sinal transmitido ao longo da interface aérea chega ao receptor em um grande número de ondas de multipercurso. Essas ondas possuem amplitudes aleatórias que, ao se somarem, produzem agrupamentos de onda (*clusters*) do tipo gaussiano. Dada a natureza estocástica do fenômeno, inúmeros modelos probabilísticos têm sido propostos para descrever o comportamento do canal sem fio, cada um dos quais explorando certos aspectos físicos da propagação eletromagnética [2]. Mais recentemente, Parente *et al.* [3] exploraram um modelo de desvanecimento geral da classe gaussiana que contempla diversos outros modelos como casos particulares, desde o simples Rayleigh até o sofisticado α - η - κ - μ [2]. Esse novo modelo flexibiliza a análise, permitindo que *clusters* de multipercurso sejam arbitrariamente correlacionados. Essa é uma suposição bem mais realista para sistemas emergentes de comunicação, como em mmWave [4]. Ocorre que, quanto mais parâmetros de desvanecimento são considerados, mais complexa se torna a análise das métricas de desempenho, que geralmente não oferece soluções com expressões em forma fechada [2]. Além disso, dificilmente é possível obter intuições práticas sobre como cada parâmetro de desvanecimento interfere nas métricas analisadas. Esse problema pode ser contornado através de uma análise de desempenho assintótica em regime de alta relação sinal-ruído (*signal-to-noise ratio*, SNR), conforme realizado em [3] para as estatísticas de primeira ordem. Tal regime é de interesse prático para aplicações sem fio em geral, como em sistemas de radiofrequência [5], [6] e em comunicações ópticas [7].

Como a natureza variante no tempo de um processo aleatório é um aspecto-chave nas comunicações sem fio, neste trabalho propomos uma análise assintótica para métricas dinâmicas do modelo de desvanecimento geral da classe gaussiana adotado em [3]. Mais especificamente, fornecemos expressões novas, simples e em forma fechada para estatísticas de segunda ordem fundamentais em regime de alta SNR, a saber, taxa de cruzamento de nível (*level crossing rate*, LCR) e duração média de desvanecimento (*average fade duration*, AFD). Os resultados analíticos assintóticos são validados minuciosamente, reduzindo-os a casos particulares conhecidos [2] e por meio de simulações de Monte Carlo.

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção II, o modelo de desvanecimento da classe gaussiana

explorado em [3] é revisitado. Na Seção III, as estatísticas assintóticas de segunda ordem do modelo são deduzidas e analisadas para o caso geral e para casos particulares de desvanecimento. Na Seção IV, resultados numéricos e de simulações são discutidos. Por fim, a Seção V apresenta as principais conclusões.

No texto que segue, $f_{(\cdot)}(\cdot)$ denota função densidade de probabilidade (*probability density function*, PDF); $N_{(\cdot)}(\cdot)$, LCR; $T_{(\cdot)}(\cdot)$, AFD; $\mathbb{E}[\cdot]$, esperança; $\mathbb{V}[\cdot]$, variância; $(\cdot)^T$, transposto; $\Gamma(\cdot)$, a função gama; ${}_2F_1(\cdot)$, a função hipergeométrica regularizada; e \sim , “assintoticamente igual a (em torno de zero)”, ou seja, $f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = 1$.

II. ESTATÍSTICAS ASSINTÓTICAS DE PRIMEIRA ORDEM REVISITADAS

Um modelo de desvanecimento geral adotado em [3] considera *clusters* de multipercurso com componentes dominantes e espalhadas de potências arbitrárias propagando-se em um ambiente não-linear. Diferentemente de modelos de desvanecimento que assumem independência entre os múltiplos *clusters*, o modelo em [3] permite que eles sejam arbitrariamente correlacionados — uma suposição mais realista para descrever canais não-homogêneos e não-lineares, como em sistemas mmWave [4]. Assim, seja a potência B do canal de comunicação sem fio expressa por

$$B^{\frac{\alpha}{2}} = \sum_{i=1}^M X_i^2, \quad (1)$$

em que $\alpha > 0$ representa a não-linearidade do meio de transmissão [2], M é o número de *clusters* de multipercurso, e $\mathbf{X} \triangleq [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_M]^T$ segue uma PDF gaussiana multivariada com vetor de média $\mathbf{m} \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{X}]$ e matriz de covariância $\mathbf{\Sigma} \triangleq \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbf{m})(\mathbf{X} - \mathbf{m})^T]$ [3]. Em particular, tem-se que $\mathbb{E}[X_i] = m_i$, $\mathbb{V}[X_i] = \sigma_i^2$, e $\rho_{i,j} \triangleq (\mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]) / (\mathbb{V}[X_i]\mathbb{V}[X_j])^{1/2}$ é o coeficiente de correlação entre as variáveis aleatórias (VAs) X_i e X_j . Em suma, a PDF gaussiana multivariada de \mathbf{X} pode ser expressa como

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m})\right)}{((2\pi)^M \det(\mathbf{\Sigma}))^{\frac{1}{2}}}. \quad (2)$$

Devido à correlação arbitrária entre as componentes de desvanecimento, a análise exata das estatísticas de B pode resultar em expressões matemáticas complicadas, com pouca percepção de como os aspectos de desvanecimento afetam as métricas de desempenho. Em [6], foi demonstrado que a assíntota da PDF do canal em torno de zero determina o desempenho do sistema em regime de alta SNR. Assim, em [3], foi feita uma análise assintótica em alta SNR, fornecendo-se expressões simples, gerais e em forma fechada para as estatísticas de *primeira* ordem do modelo de desvanecimento geral em (1), conforme revisitado a seguir.

Inicialmente, seja a matriz de covariância $\mathbf{\Sigma}$ fatorada na forma $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{D}\mathbf{R}\mathbf{D}$, em que \mathbf{R} é uma matriz de covariância normalizada, e \mathbf{D} é uma matriz diagonal $M \times M$ cujo elemento não nulo na i -ésima linha é σ_i [3]. Além disso, seja também $k_i \triangleq m_i^2 / \sigma_i^2$, $\forall i$, e $\mathbf{K} \triangleq [m_1 / \sigma_1 \ m_2 / \sigma_2 \ \dots \ m_M / \sigma_M]^T$, tal que $\mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{m}$. Assim, a PDF de \mathbf{X} em (2) pode ser expressa assintoticamente como

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \sim \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{K}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}\right)}{((2\pi)^M \det(\mathbf{R}))^{\frac{1}{2}}} \prod_{i=1}^M \frac{1}{\sigma_i}, \quad (3)$$

em que $\det(\mathbf{R}) > 0$. Além disso, através de uma simples transformação de variáveis em (3), a PDF assintótica de \mathbf{X}^2 é dada como

$$f_{\mathbf{X}^2}(x^2) \sim \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{K}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}\right)}{((2\pi)^M \det(\mathbf{R}))^{\frac{1}{2}}} \prod_{i=1}^M \frac{1}{\sigma_i |x_i|}. \quad (4)$$

Para determinar a PDF assintótica da potência B em (1), foi utilizado um conceito-chave em [5]: sob condições amenas, um conjunto de VAs positivas correlacionadas se comporta assintoticamente em torno de zero como um conjunto equivalente de VAs positivas independentes. Em particular, (4) atende a essas condições [5, eq. (5)]. Dessa forma, seja $\{\check{X}_i^2\}_{i=1}^M$ o conjunto de VAs independentes assintoticamente equivalentes a $\{X_i^2\}_{i=1}^M$. Comparando-se (4) com [5, eq. (5)], a PDF assintótica de \check{X}_i^2 reduz-se a

$$f_{\check{X}_i^2}(\check{x}_i^2) \sim a_{i,0}(\check{x}_i^2)^{b_{i,0}} \quad (5a)$$

$$a_{i,0} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2M}\mathbf{K}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}\right)}{((2\pi)^M \det(\mathbf{R}))^{\frac{1}{2M}}} \prod_{j=1}^M \sigma_j^{-\frac{1}{M}} \quad (5b)$$

$$b_{i,0} = -\frac{1}{2}. \quad (5c)$$

Substituindo-se (5) em [5, eq. (4)], e após algumas manipulações algébricas, a PDF assintótica de B é obtida como [3]

$$f_B(\beta) \sim a_{B,0} \beta^{b_{B,0}} \quad (6a)$$

$$a_{B,0} = \alpha \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{K}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}\right)}{(2^{M+2} \det(\mathbf{R}))^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{M}{2}\right)} \prod_{i=1}^M \frac{1}{\sigma_i} \quad (6b)$$

$$b_{B,0} = \frac{\alpha M}{4} - 1. \quad (6c)$$

A relação entre a potência B e a envoltória R do canal é dada por $B = R^2$. Assim, a PDF assintótica da envoltória resulta em

$$f_R(r) \sim 2r f_B(r^2) \sim 2a_{B,0} r^{2b_{B,0}+1}, \quad (7)$$

em que $a_{B,0}$ e $b_{B,0}$ são dados em (6)

Observe que (7) fornece uma caracterização simples, mas abrangente, da PDF assintótica da envoltória do canal em termos de todos os parâmetros de desvanecimento do modelo geral em (1). Esse resultado servirá como base para a análise assintótica de estatísticas de segunda ordem proposta a seguir.

III. ESTATÍSTICAS ASSINTÓTICAS DE SEGUNDA ORDEM

As estatísticas de segunda ordem do modelo em (1) abordadas nesta seção dizem respeito àquelas relacionadas à derivada temporal da envoltória do sinal. Começamos calculando a distribuição conjunta de $\{\check{X}_i^2\}_{i=1}^M$ e da derivada temporal de R , denotada por \dot{R} . Então, procedemos fazendo uma transformação de variáveis para obter a distribuição conjunta de R , \dot{R} e $\{\check{X}_i^2\}_{i=2}^M$. O objetivo final é encontrar a distribuição conjunta de R e \dot{R} e, a partir dela, deduzir a LCR e a AFD.

A. LCR e AFD: Análise Assintótica em Alta SNR

Começamos a análise tomando a derivada temporal em ambos os lados de (1) em termos da envoltória R ($B = R^2$). Isolando \dot{R} , obtemos

$$\dot{R} = \frac{\sum_{i=1}^M 2X_i \dot{X}_i}{\alpha R^{\alpha-1}}. \quad (8)$$

Em [8], a relação entre as componentes de multipercursos e suas respectivas derivadas temporais foi investigada minuciosamente. Aqui, seguindo uma prática comum, consideramos espalhamento isotrópico e recepção omnidirecional, em que \check{X}_i é uma VA gaussiana independente de X_i , de média nula, e de variância dada por $\check{\sigma}_i^2 = 2\pi^2 f_D^2 \sigma_i^2$, com f_D sendo o deslocamento Doppler máximo em Hz e σ_i^2 sendo a variância de X_i , $i \in \{1, \dots, M\}$. Além disso, embora $\{X_i\}_{i=1}^M$ sejam correlacionadas, consideramos que X_i e \check{X}_j são independentes $\forall(i, j)$, bem como $\{\check{X}_i\}_{i=1}^M$. Assim, dado o conhecimento de $\{X_i\}_{i=1}^M$, \check{R} é uma soma de M VAs independentes, tal que

$$f_{\check{R}|X_1^2, \dots, X_M^2}(\check{r}|x_1^2, \dots, x_M^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\check{r}}^2}} \exp\left(\frac{-\check{r}^2}{2\sigma_{\check{r}}^2}\right), \quad (9)$$

em que $\sigma_{\check{r}}^2 = \left(4 \sum_{i=1}^M x_i^2 \check{\sigma}_i^2\right) / \alpha^2 r^{2\alpha-2}$.

Para a análise a seguir, as equações são mostradas no topo da próxima página. No cenário assintótico, conforme detalhado na Seção II, o conjunto $\{X_i^2\}_{i=1}^M$ de VAs correlacionadas se comporta assintoticamente em torno de zero como um conjunto equivalente de VAs independentes $\{\check{X}_i^2\}_{i=1}^M$. Assim, a PDF conjunta de $\check{R}, \check{X}_1^2, \dots, \check{X}_M^2$ é dada em (10), em que $f_{\check{X}_i^2}(\check{x}_i^2)$, $i \in \{1, \dots, M\}$, é expressa conforme (5). A PDF conjunta de $\check{R}, R, \check{X}_1^2, \dots, \check{X}_M^2$ é então obtida a partir de (10), através de transformações de variáveis. Para isso, considerando-se $\check{X}_1^2 = R^\alpha - \sum_{i=2}^M \check{X}_i^2$, obtido a partir da manipulação de (1) em termos da envoltória R , a PDF conjunta $f_{\check{R}, R, \check{X}_1^2, \dots, \check{X}_M^2}(\check{r}, r, \check{x}_1^2, \dots, \check{x}_M^2)$ resulta em (11). Por sua vez, a PDF conjunta de \check{R} e R pode ser obtida a partir da integral de Brennan [9] sobre (11), a qual resulta na expressão dada em (12). Finalmente, (12) pode ser utilizada para deduzir a LCR e a AFD assintóticas, como segue.

A LCR é uma estatística de segunda ordem que fornece o número médio de cruzamentos ascendentes (ou descendentes) por segundo para um determinado nível de envoltória. Por definição, a LCR de um processo contínuo pode ser calculada como em [1, eq. (11)]. Assim, substituindo-se nessa expressão geral a PDF conjunta $f_{\check{R}, R}(\cdot, \cdot)$ dada em (12), e usando-se (5) e (9), a LCR assintótica para o modelo de desvanecimento geral da classe gaussiana é obtido em forma fechada como em (13), em que $a_{i,0}$ e $b_{i,0}$ são os coeficientes assintóticos dados em (5).

A AFD da envoltória do sinal de desvanecimento é o tempo médio que o sinal passa abaixo de certo limiar de envoltória. É dada pela razão entre a função de distribuição acumulada (*cumulative distribution function*, CDF) e a LCR da envoltória, como em [1, eq. (18)]. Usando-se a CDF assintótica deduzida a partir de (7) e a LCR assintótica dada em (13), obtém-se a AFD assintótica para o modelo de desvanecimento geral como em (14), em que $a_{B,0}$ e $b_{B,0}$ são os coeficientes assintóticos dados em (6).

A LCR e a AFD assintóticas para o modelo de desvanecimento geral da classe gaussiana, apresentadas respectivamente em (13) e (14), fornecem uma caracterização simples, porém completa, do desempenho dinâmico do canal de transmissão sem fio, operando em alta SNR. Essa caracterização se dá em termos dos mais variados parâmetros de desvanecimento conhecidos, como o número de *clusters* de multipercursos (M),

as componentes dominantes (m_i), a potência média das ondas espalhadas (σ_i^2), a não-linearidade do meio de transmissão (α), e a correlação entre *clusters* ($\rho_{i,j}$). A seguir, analisamos alguns casos particulares importantes.

B. Cenário Comutativo

Esse é o caso em que os parâmetros se reduzem a $m_i = m$, $\sigma_i = \sigma$ e $\rho_{i,j} = \rho$, $\forall i \neq j$. Em [3], foi demonstrado que, nesse caso, $\det(\mathbf{R}) = (1 - \rho)^{M-1} (1 + \rho(M-1))$. A condição $\det(\mathbf{R}) > 0$ em (3) implica então que $\rho \in \left(\frac{1}{1-M}, 1\right)$. A matriz inversa \mathbf{R}^{-1} pode ser obtida como em [3, eq. (22)].

Mantendo-se essas simplificações e substituindo-as em (13) e (14), a LCR e a AFD assintóticas para o modelo de desvanecimento geral da classe gaussiana no cenário comutativo são dadas por

$$N_R(r) \sim \frac{f_D \sqrt{\pi} (1 - \rho)^{\frac{1-M}{2}} \exp\left(\frac{-kM}{2(1+\rho(M-1))}\right)}{\Gamma\left(\frac{M}{2}\right) \sigma^{M-1} 2^{\frac{M}{2}-1} (1 + \rho(M-1))^{\frac{1}{2}}} r^{\alpha\left(\frac{M-1}{2}\right)} \quad (15)$$

$$T_R(r) \sim \frac{r^{\frac{\alpha}{2}}}{M \sqrt{\pi} f_D \sigma}. \quad (16)$$

Essas expressões trazem informações relevantes sobre a caracterização do desempenho dinâmico do sistema em termos de cada parâmetro físico de desvanecimento, conforme discutido na Seção IV.

C. Modelos de Desvanecimento Particulares

Um grande número de modelos estatísticos consolidados na literatura é usado para descrever a aleatoriedade do desvanecimento de curto prazo [2]. Esses modelos supõem independência entre os *clusters* de multipercursos ou entre as componentes em fase e quadratura correspondentes — hipótese menos abrangente do que o modelo de desvanecimento ora considerado. Para obter o desempenho assintótico do sistema dinâmico em alta SNR para todas essas distribuições, reduzimos nossa análise, apresentada em (13) e (14), para alguns casos particulares. Por simplicidade, é conveniente definir os parâmetros (positivos) seguintes: K é a razão entre a potência total das componentes dominantes e a potência total das componentes espalhadas, ou seja, $K \triangleq \frac{\sum_{i=1}^M m_i^2}{\sum_{i=1}^M \sigma_i^2}$; P é a razão entre o número de componentes em fase M_x e o número de componentes em quadratura M_y , ou seja, $P \triangleq M_x / M_y$, em que $M_x + M_y = M$; e Q é a razão entre duas outras razões, a saber, (i) a potência total das componentes dominantes em fase dividida pela potência total das componentes espalhadas em fase $\left(K_x \triangleq \frac{\sum_{i=1}^{M_x} m_i^2}{\sum_{i=1}^{M_x} \sigma_i^2}\right)$ e (ii) a potência total das componentes dominantes em quadratura dividida pela potência total das componentes espalhadas em quadratura $\left(K_y \triangleq \frac{\sum_{i=M_x+1}^{M_x+M_y} m_i^2}{\sum_{i=M_x+1}^{M_x+M_y} \sigma_i^2}\right)$, ou seja, $Q \triangleq K_x / K_y$ [3].

Na Tabela I, fornecemos as expressões assintóticas em forma fechada da LCR e da AFD para alguns modelos de desvanecimento disponíveis na literatura [2]. Nessa tabela, (i) a primeira coluna lista os modelos de desvanecimento em consideração, (ii) a segunda coluna contém a parametrização original do modelo, (iii) a terceira coluna mostra como os

$$f_{\dot{R}, \check{X}_1^2, \dots, \check{X}_M^2}(\dot{r}, \check{x}_1^2, \dots, \check{x}_M^2) = f_{\dot{R} | \check{X}_1^2, \dots, \check{X}_M^2}(\dot{r} | \check{x}_1^2, \dots, \check{x}_M^2) f_{\check{X}_1^2}(\check{x}_1^2) \dots f_{\check{X}_M^2}(\check{x}_M^2), \quad (10)$$

$$f_{\dot{R}, R, \check{X}_2^2, \dots, \check{X}_M^2}(\dot{r}, r, \check{x}_2^2, \dots, \check{x}_M^2) = \alpha r^{\alpha-1} f_{\dot{R}, \check{X}_1^2, \check{X}_2^2, \dots, \check{X}_M^2} \left(\dot{r}, r^\alpha - \sum_{i=2}^M \check{x}_i^2, \check{x}_2^2, \dots, \check{x}_M^2 \right) \quad (11)$$

$$f_{\dot{R}, R}(\dot{r}, r) = \int_0^{r^\alpha} \int_0^{r^\alpha - \check{x}_M^2} \dots \int_0^{r^\alpha - \sum_{i=3}^M \check{x}_i^2} f_{\dot{R}, R, \check{X}_2^2, \dots, \check{X}_{M-1}^2, \check{X}_M^2}(\dot{r}, r, \check{x}_2^2, \dots, \check{x}_{M-1}^2, \check{x}_M^2) d\check{x}_2^2 \dots d\check{x}_{M-1}^2 d\check{x}_M^2 \quad (12)$$

$$N_R(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} a_{i,0}^M \sigma_1 \Gamma(1 + b_{i,0})^M \left(\prod_{i=1}^{M-1} \Gamma(i(1 + b_{i,0})) \right) \left(\prod_{j=1}^M {}_2F_1 \left(\frac{-1}{2}; 1 + b_{i,0}; j(1 + b_{i,0}); 1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2} \right) \right) \times r^{\alpha(Mb_{i,0} + \frac{2M-1}{2})} \quad (13)$$

$$T_R(r) \sim \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} a_{B,0} a_{i,0}^{-M} \sigma_1^{-1} \Gamma(1 + b_{i,0})^{-M}}{(b_{B,0} + 1) \left(\prod_{i=1}^{M-1} \Gamma(i(1 + b_{i,0})) \right) \left(\prod_{j=1}^M {}_2F_1 \left(\frac{-1}{2}; 1 + b_{i,0}; j(1 + b_{i,0}); 1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2} \right) \right)} \times r^{2(b_{B,0} + 1) - \alpha(Mb_{i,0} + \frac{2M-1}{2})} \quad (14)$$

parâmetros do modelo de desvanecimento geral em (1) são escolhidos para obter cada modelo particular, e (iv) a quarta e a quinta colunas fornecem as expressões assintóticas em forma fechada da LCR e da AFD, respectivamente. Enquanto essas estatísticas de segunda ordem são dadas em termos da parametrização original (segunda coluna), observe que a correspondência mostrada na terceira coluna é em termos da lista de parâmetros ($M, K, P, Q, \alpha, \sigma$), em que os parâmetros não mostrados são irrelevantes para a equivalência (veja [2, Sec. VI] para maiores detalhes sobre a parametrização original dos modelos de desvanecimento particulares). Além disso, como os modelos particulares supõem que as componentes em fase e em quadratura são mutuamente independentes, os coeficientes de correlação correspondentes são nulos, ou seja, $\rho_{i,j} = 0, \forall i \neq j$, omitido na tabela por simplicidade. A partir da Tabela I, pode-se determinar o desempenho dinâmico assintótico, em termos da LCR e da AFD, para cenários de desvanecimento variados, com diversas combinações de parâmetros físicos.

IV. SIMULAÇÃO E RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, considerando-se o cenário comutativo, as expressões assintóticas da LCR e da AFD são validadas através de simulações de Monte Carlo. Além disso, avalia-se como a LCR e a AFD assintóticas variam em termos dos parâmetros de desvanecimento α, M, σ, m e ρ .

Inicialmente, foi gerada uma sequência de $N = 10^7$ realizações para cada *cluster* de multipercorso gaussiano autocorrelacionado $X_i, i \in \{1, \dots, M\}$, de média nula, formando-se uma matriz \mathbf{X}_I de dimensão $M \times N$. A autocorrelação de cada sequência X_i foi ajustada de acordo com o tradicional modelo de Jakes/Clark [10]. Então, o vetor de média \mathbf{m} e a matriz de covariância $\mathbf{\Sigma}$ foram incluídos como $\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{X}_I + \mathbf{m}$, em que \mathbf{C} é a decomposição de Cholesky da matriz de covariância, ou seja, $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$. Finalmente, as M linhas de \mathbf{X} foram combinadas como em (1), resultando em uma sequência $1 \times N$ para a potência B e, com uso de $B = R^2$, para a envoltória R . Em posse da sequência para R , a LCR e a AFD empíricas foram calculadas.

A LCR é mostrada na Fig. 1-(a), e a AFD, na Fig. 1-(b). Nessas figuras, (i) as soluções assintóticas em (15) e (16)

são representadas por linhas sólidas, (ii) os resultados de simulação são representados por marcadores, e (iii) as expressões teóricas, calculadas numericamente pelo método de Brennan [9], são representadas por linhas tracejadas. Selecionamos os cenários de desvanecimento arbitrariamente, variando um parâmetro por vez do conjunto inicial $\alpha = 2.2, M = 2, \sigma = 1.2, m = 1$ e $\rho = 0.5$. Os casos particulares apresentados na Subseção III-C também foram validados, comparando-se as simulações e expressões aqui deduzidas com as estatísticas teóricas de cada modelo [1], [2], ora omitidas por brevidade.

Observa-se que, na região assintótica, ou seja, $r \rightarrow 0$, as estatísticas analíticas e empíricas coincidem perfeitamente entre si, conforme esperado. Além disso, as expressões assintóticas têm um ajuste geral muito bom para $r < 0$ dB, região que governa o desempenho em alta SNR (*média*) [6], sendo portanto de primordial interesse prático para aplicações sem fio. A Fig. 1-(a) mostra que, à medida que α, M, σ e m aumentam, níveis mais baixos de envoltória são cruzados com taxas menores, enquanto níveis mais altos são cruzados com taxas maiores. Um comportamento oposto é observado à medida que a correlação ρ aumenta, ou seja, níveis mais baixos de envoltória são cruzados com taxas maiores, enquanto níveis mais altos são cruzados com taxas menores. A Fig. 1-(b) mostra que a variação dos parâmetros m e ρ não altera o tempo médio que o nível do sinal permanece abaixo de um determinado limiar. Por outro lado, à medida que α, M e σ aumentam, níveis mais baixos de envoltória têm uma menor duração de desvanecimento, enquanto níveis mais altos têm uma maior duração de desvanecimento.

V. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi proposta uma análise assintótica geral, simples e unificada do desempenho dinâmico de sistemas de comunicação sem fio em canais com desvanecimento. Para isso, foram deduzidas expressões assintóticas em forma fechada para estatísticas cruciais de segunda ordem de distribuições da classe gaussiana, que consideram os mais diversos fenômenos físicos de desvanecimento descritos na literatura. As expressões analíticas foram validadas por meio de simulações de Monte Carlo para vários cenários de desvanecimento.

TABELA I: LCR e AFD assintóticas para alguns modelos de desvanecimento particulares.

Modelo de Desvanecimento	Parametrização Original	Parametrização do Modelo Geral em (1)	$N_R(r)$	$T_R(r)$
Rayleigh	(Ω)	$M = 2; K = 0; P = 1; \alpha = 2;$ $\sigma_1 = \sigma_2 = \left(\frac{\Omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{2\pi}f_D r}{\sqrt{\Omega}}$	$\frac{r}{\sqrt{2\pi}f_D \sqrt{\Omega}}$
Nakagami- m	(m, Ω)	$M = 2m; K = 0; P = 1; \alpha = 2;$ $\sigma_i = \left(\frac{\Omega}{2m}\right)^{\frac{1}{2}}, i \in \{1, \dots, M\}$	$\frac{\sqrt{2\pi}f_D m^{m-\frac{1}{2}} r^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^{m-\frac{1}{2}}}$	$\frac{r}{\sqrt{2\pi}f_D \sqrt{m\Omega}}$
α - μ	(α, μ, \hat{r})	$M = 2\mu; K = 0; P = 1;$ $\sigma_i = \left(\frac{\hat{r}^\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}, i \in \{1, \dots, M\}$	$\frac{\sqrt{2\pi}f_D \mu^{\mu-\frac{1}{2}} r^{\alpha(\mu-\frac{1}{2})}}{\Gamma(\mu)\hat{r}^{\alpha(\mu-\frac{1}{2})}}$	$\frac{r^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2\pi}f_D \sqrt{\mu\hat{r}^\alpha}}$
κ - μ	(κ, μ, \hat{r})	$M = 2\mu; K = \kappa; P = 1; \alpha = 2;$ $\sigma_i = \left(\frac{\hat{r}^2}{2\mu(\kappa+1)}\right)^{\frac{1}{2}}, i \in \{1, \dots, M\}$	$\frac{\sqrt{2\pi}f_D (\mu+\kappa)\mu^{\mu-\frac{1}{2}} r^{2\mu-1}}{\exp(\kappa\mu)\Gamma(\mu)\hat{r}^{2(\mu-\frac{1}{2})}}$	$\frac{\sqrt{(1+\kappa)r}}{\sqrt{2\pi}f_D \sqrt{\mu\hat{r}^2}}$
η - μ	(η, μ, \hat{r})	$M = 4\mu; K = 0; P = 1; \alpha = 2;$ $\sigma_i = \left(\frac{\eta\hat{r}^2}{2\mu(\eta+1)}\right)^{\frac{1}{2}}, i \in \{1, \dots, \frac{M}{2}\};$ $\sigma_i = \left(\frac{\hat{r}^2}{2\mu(\eta+1)}\right)^{\frac{1}{2}}, i \in \{\frac{M}{2}+1, \dots, M\}$	$\sqrt{2\pi}f_D \left(\frac{(1+\eta)\mu}{\hat{r}^2}\right)^{2\mu-\frac{1}{2}} \eta^{-\mu} \times$ $2F_1\left(\frac{-1}{2}; \mu; 2\mu; 1-\eta\right) r^{4\mu-1}$	$\frac{(2\hat{r}\mu)^{-1} \sqrt{\mu(1+\eta)} r}{\sqrt{2\pi}f_D 2F_1\left(\frac{-1}{2}; \mu; 2\mu; 1-\eta\right)}$
α - η - κ - μ	$(\alpha, \eta, \kappa, \mu, p, q, \hat{r})$	$M = 2\mu; K = \kappa; P = p; Q = q;$ $\sigma_i = \left(\frac{\eta\hat{r}^\alpha (p+1)}{2\mu p(\eta+1)(\kappa+1)}\right)^{\frac{1}{2}}, i \in \{1, \dots, M_X\};$ $\sigma_i = \left(\frac{\hat{r}^\alpha (p+1)}{2\mu(\eta+1)(\kappa+1)}\right)^{\frac{1}{2}}, i \in \{M_X+1, \dots, M\}$	$\sqrt{2\pi}f_Y \left(\frac{(1+p)\hat{r}^\alpha}{(1+\eta)(1+\kappa)\mu}\right)^{\frac{1}{2}-\mu} \times$ $\left(\frac{p}{\eta}\right)^{\frac{p\mu}{1+p}} \exp\left(-\frac{(1+p)q}{(1+p)(1+q\eta)}\right) \times$ $2F_1\left(\frac{-1}{2}; \frac{p\mu}{1+p}; \mu; 1-\frac{f_X^2 \eta}{f_Y^2 p}\right) r^{\alpha(\mu-\frac{1}{2})}$	$\frac{\sqrt{(1+\eta)(1+\kappa)}}{\sqrt{2\pi}f_Y \sqrt{\mu\hat{r}^\alpha (1+p)}} \times$ $\frac{\exp\left(-\frac{(q-1)(p-\eta)\kappa\mu}{(1+p)(1+q\eta)}\right) r^{\frac{\alpha}{2}}}{2F_1\left(\frac{-1}{2}; \frac{p\mu}{1+p}; \mu; 1-\frac{f_X^2 \eta}{f_Y^2 p}\right)}$

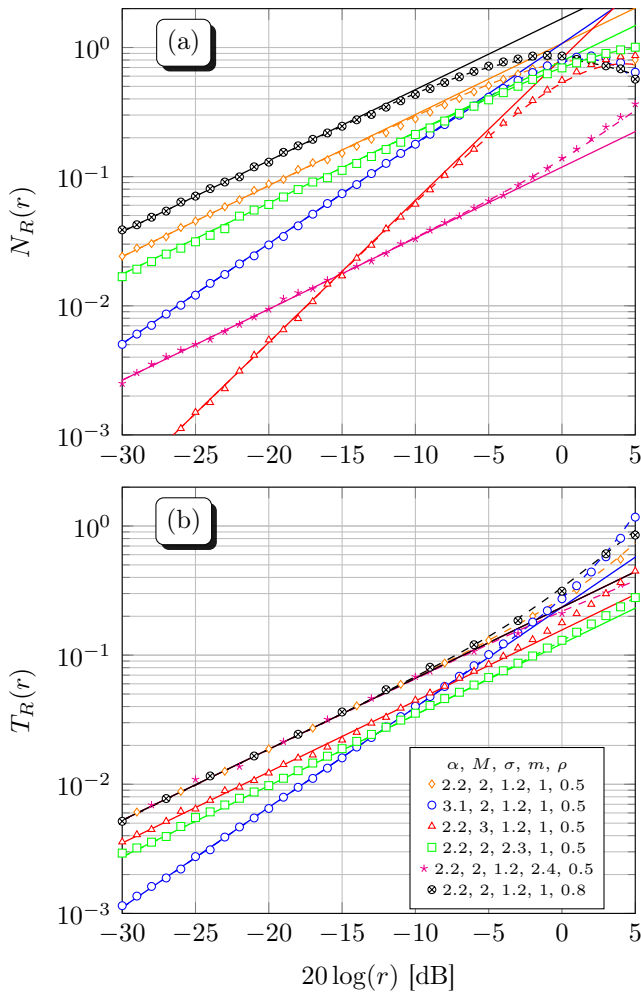


Fig. 1: LCR e AFD analítico-assintóticas (linhas sólidas), simuladas (marcadores) e teóricas (linhas tracejadas) para modelos de desvanecimento da classe gaussiana.

Os resultados aqui apresentados podem ser prontamente utilizados para avaliar e otimizar aplicações sujeitas a uma variedade de cenários de propagação, como aqueles vislumbrados para sistemas emergentes de comunicação.

REFERÊNCIAS

- [1] A. A. Dos Anjos, T. R. R. Marins, C. R. N. Da Silva, V. M. R. Peñarrocha, L. Rubio, J. Reig, R. A. A. De Souza, and M. D. Yacoub, "Higher Order Statistics in a mmWave Propagation Environment," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 103 876–103 892, Jul. 2019.
- [2] M. D. Yacoub, "The α - η - κ - μ Fading Model," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 64, no. 8, pp. 3597–3610, Aug. 2016.
- [3] F. R. A. Parente, F. P. Calmon, and J. C. S. Santos Filho, "High-SNR Performance in Gaussian-Class Fading," in *IEEE International Conference on Communications*, Dublin, Ireland, Jun. 2020, pp. 1–7.
- [4] N. Iqbal, J. Luo, R. Müller, G. Steinböck, C. Schneider, D. A. Dupleich, S. Häfner, and R. S. Thomä, "Multipath Cluster Fading Statistics and Modeling in Millimeter-Wave Radio Channels," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 67, no. 4, pp. 2622–2632, Jan. 2019.
- [5] F. R. A. Parente and J. C. S. Santos Filho, "Asymptotically Exact Framework to Approximate Sums of Positive Correlated Random Variables and Application to Diversity-Combining Receivers," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 8, no. 4, pp. 1012–1015, Aug. 2019.
- [6] Z. Wang and G. B. Giannakis, "A Simple and General Parameterization Quantifying Performance in Fading Channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 8, pp. 1389–1398, Aug. 2003.
- [7] A. Chaaban, Z. Rezki, and M. Alouini, "Capacity Bounds and High-SNR Capacity of MIMO Intensity-Modulation Optical Channels," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 17, no. 5, pp. 3003–3017, May 2018.
- [8] I. B. G. Pôrto and M. D. Yacoub, "On the Phase Statistics of the κ - μ Process," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 15, pp. 4732–4744, Jul. 2016.
- [9] D. G. Brennan, "Linear diversity combining techniques," *Proc. IRE*, vol. 47, no. 6, pp. 1075–1102, Jun. 1959.
- [10] W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*. Wiley, 1974.