

# Análise de Degradação do Cancelador de Eco Híbrido FIR-IFIR

Luis Cláudius Coradine, Leonardo S. Resende, Carlos Aurélio F. da Rocha e Antonio Augusto R. Coelho

**Resumo**—Neste trabalho apresentamos uma análise da degradação introduzida pelo filtro interpolado no cancelador de eco híbrido FIR-IFIR. Através de uma abordagem conjunta, combinando filtragem transversal interpolada e otimização restrita, os filtros ótimos são determinados e uma medida de degradação, a qual é função da correlação do sinal de entrada, do grau de esparsidade do filtro IFIR e dos parâmetros do interpolador, é obtida.

**Palavras-Chave**—Cancelador de eco, filtro interpolado, análise de degradação.

**Abstract**—In this paper, we present an analysis of the degradation introduced by the interpolated filter into the FIR-IFIR hybrid echo canceller. Through a joint approach combining interpolated transversal filtering and linearly-constrained optimization, the optimum filters are determined and a degradation measure, which is a function of the input signal correlation, of the IFIR filter sparseness degree and of the interpolator parameters, is obtained.

**Index Terms**—Eco canceller, interpolated filter, degradation analysis.

## I. INTRODUÇÃO

Filtros FIR interpolados têm sido empregados no esquema de filtragem de Wiener a fim de reduzir a complexidade de processamento, principalmente no que tange ao número de operações de multiplicação nas etapas de filtragem e adaptação. Tais filtros decorrem da remoção de algumas amostras da resposta impulsiva de um filtro FIR que se deseja projetar, as quais são recuperadas posteriormente por interpolação. Quanto a operação de interpolação, esta também é implementada por filtragem FIR (passa-baixas) de baixa ordem [1]-[3].

Em algumas aplicações, com o intuito de manter a complexidade de processamento do filtro a patamares praticáveis, costuma-se remover um número significativo de amostras de sua resposta ao impulso e, além disto, utilizar um interpolador rudimentar – em geral linear. O preço pago por isto é a perda de desempenho do sistema, que pode chegar a níveis inadequados. Surge, então, a necessidade de estudarmos a degradação introduzida pelo filtro FIR interpolado nos sistemas de filtragem de Wiener.

Luis Cláudius Coradine, TCI/UFAL. Leonardo S. Resende e Carlos A. F. da Rocha, EEL/UFSC. Antonio A. R. Coelho, DAS/UFSC. E-mails: coradine@tci.ufal.br, {leonardo,aurelio}@eel.ufsc.br, aarc@das.ufsc.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) através do projeto nro. 472448/2003-0.

Recentemente, a filtragem de Wiener interpolada foi tratada como um problema de otimização com restrições lineares [4]-[6]. Uma nova estrutura de implementação foi apresentada e o filtro ótimo de Wiener interpolado foi definido. Além disto, a análise da degradação introduzida pelo filtro IFIR foi realizada. Já no contexto adaptativo, o emprego do algoritmo RLS tornou-se possível e tem sido sugerido.

Contudo, tal abordagem não contempla a estrutura de filtragem híbrida, FIR e IFIR, proposta por Abousaada [7] para cancelamento de eco em linhas telefônicas, onde a remoção das amostras ocorre somente numa parte e não ao longo de toda a resposta ao impulso do filtro. Logo, a definição dos filtros ótimos do cancelador Abousaada e a quantificação da degradação inserida neste sistema pelo filtro interpolado fazem-se necessários e constituem no objeto de proposta do presente trabalho.

## II. FILTRAGEM DE WIENER COM RESTRIÇÕES LINEARES

Considere o esquema clássico de filtragem de Wiener representado na Figura 1 [8]. O sinal de erro,  $e(n)$ , dado pela diferença entre o sinal desejado ou de referência,  $d(n)$ , e sua estimativa,  $y(n)$ , é descrito por

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - y(n) \\ &= d(n) - \mathbf{w}^t \mathbf{x}(n), \end{aligned} \quad (1)$$

onde

$$\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^t \quad (2)$$

denota o vetor  $N \times 1$  contendo as  $N$  amostras mais recentes do sinal de entrada e

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{N-1}]^t \quad (3)$$

o vetor  $N \times 1$  de coeficientes do filtro transversal de ordem  $N-1$ . Sem perda de generalidade, todos os parâmetros são assumidos reais.

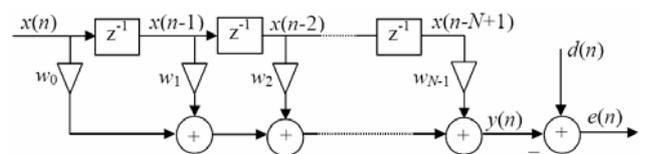


Fig.1: Filtragem de Wiener.

A formulação da filtragem de Wiener com restrições lineares é descrita como [9]:

*minimizar*

$$E\{e^2(n)\} = E\{[d(n) - \mathbf{w}^t \mathbf{x}(n)]^2\} \quad (4a)$$

sujeito a

$$\mathbf{C}^t \mathbf{w} = \mathbf{f}, \quad (4b)$$

onde a matriz de restrição  $\mathbf{C}$   $N \times K$  e o vetor de resposta  $\mathbf{f}$   $K \times 1$  estabelecem o conjunto de  $K$  equações lineares a ser satisfeito pelos  $N$  coeficientes do filtro transversal. Vale ressaltar que os elementos de  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{f}$  são constantes.

Assumindo que  $\mathbf{C}$  tem posto cheio e  $K < N$  (o que implica em posto igual a  $K$ ), as  $K$  restrições são linearmente independentes e (4b) possui mais de uma solução em  $\mathbf{w}$ . A solução desejada é aquela que minimiza o erro quadrático médio.

O vetor de coeficientes ótimo é obtido pelo método dos multiplicadores de Lagrange [8] e é dado por:

$$\mathbf{w}_{or} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{C}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}), \quad (5)$$

onde

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^t(n)\} \quad (6)$$

é a matriz de autocorrelação  $N \times N$  de  $\mathbf{x}(n)$  e

$$\mathbf{p} = E\{\mathbf{x}(n)d(n)\} \quad (7)$$

o vetor  $N \times 1$  de correlação cruzada entre  $\mathbf{x}(n)$  e  $d(n)$ .

Em (4), as restrições são inseridas de forma conjunta com o critério de otimização. A seguir, apresenta-se uma maneira indireta de incorporar as restrições no esquema de filtragem de Wiener.

#### A Estrutura GSC

Uma forma de implementação alternativa e indireta da filtragem de Wiener com restrições lineares é representada em diagrama de blocos na Figura 2. O esquema de filtragem restrita apresentado é conhecido como GSC (*Generalized Sidelobe Canceller*) [9]. Basicamente, o GSC é um mecanismo para transformar um problema de otimização restrita na forma não restrita.

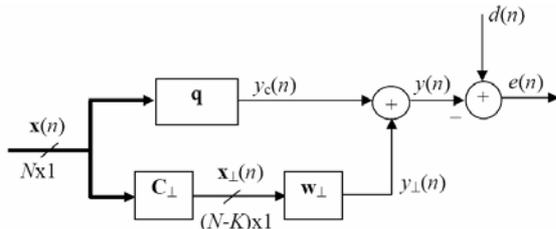


Fig. 2: Implementação GSC da filtragem de Wiener restrita.

As colunas da matriz  $\mathbf{C}_\perp$   $N \times (N-K)$  constituem uma base para o complemento ortogonal do subespaço expandido pelas colunas de  $\mathbf{C}$  ( $\mathbf{C}^t \mathbf{C}_\perp = \mathbf{0}_{K \times (N-K)}$ ). Esta matriz é chamada de matriz de bloqueio de sinal. O vetor  $\mathbf{w}_\perp$   $(N-K) \times 1$  constitui um filtro irrestrito, enquanto que o vetor  $\mathbf{q} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^t \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}$   $N \times 1$  um filtro que satisfaz as restrições ( $\mathbf{C}^t \mathbf{q} = \mathbf{f}$ ).

Agora, o sinal de erro é dado por:

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - y_c(n) - y_\perp(n) \\ &= d(n) - \mathbf{q}^t \mathbf{x}(n) - \mathbf{w}_\perp^t \mathbf{C}_\perp^t \mathbf{x}(n). \end{aligned} \quad (8)$$

No sentido do erro quadrático médio, o vetor  $\mathbf{w}_\perp$  é escolhido de forma a minimizar a seguinte função custo:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}_\perp) &= E\{e^2(n)\} = E\{[d(n) - \mathbf{q}^t \mathbf{x}(n) - \mathbf{w}_\perp^t \mathbf{C}_\perp^t \mathbf{x}(n)]^2\} \\ &= \sigma_d^2 - 2\mathbf{q}^t \mathbf{p} + \mathbf{q}^t \mathbf{R} \mathbf{q} - 2\mathbf{w}_\perp^t \mathbf{C}_\perp^t \mathbf{p} + \end{aligned}$$

$$+ \mathbf{w}_\perp^t \mathbf{C}_\perp^t \mathbf{R} \mathbf{C}_\perp \mathbf{w}_\perp + 2\mathbf{w}_\perp^t \mathbf{C}_\perp^t \mathbf{R} \mathbf{q}, \quad (9)$$

onde  $\sigma_d^2$  denota a variância do sinal desejado. A solução ótima é

$$\mathbf{w}_{\perp o} = [\mathbf{C}_\perp^t \mathbf{R} \mathbf{C}_\perp]^{-1} \mathbf{C}_\perp^t [\mathbf{p} - \mathbf{R} \mathbf{q}]. \quad (10)$$

A próxima seção descreve a filtragem FIR interpolada e sua utilização no esquema de filtragem de Wiener.

### III. FILTRAGEM IFIR

A técnica de filtragem FIR interpolada (IFIR *interpolated finite impulse response*) foi introduzida por Neuvo et al. [1]. Seu objetivo é explorar as redundâncias nos coeficientes do filtro, através da remoção de algumas amostras da resposta ao impulso que são, posteriormente, recuperadas por interpolação. Obtém-se, assim, uma redução do número de operações aritméticas (multiplicação e soma) realizadas nos procedimentos de filtragem e atualização dos coeficientes de um filtro adaptativo.

Na forma de diagrama de blocos, o filtro IFIR pode ser visto como a cascata de dois sistemas (Figura 3). O primeiro representa um filtro FIR cuja resposta ao impulso é esparsa. Isto vale dizer que somente uma amostra, de cada conjunto de  $L$  amostras consecutivas de sua resposta ao impulso, é diferente de zero. Dito de uma outra forma, entre duas amostras diferentes de zero de sua resposta ao impulso, há  $L-1$  amostras iguais a zero. Portanto, se o filtro esparsa tem  $N$  coeficientes,  $\lceil N/L \rceil$  amostras de sua resposta ao impulso são diferentes de zero e  $N - \lceil N/L \rceil$  amostras são iguais a zeros, onde  $\lceil \bullet \rceil$  representa a operação de arredondamento de  $\bullet$  para o próximo inteiro.

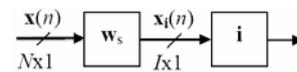


Fig. 3: Filtragem IFIR.

O segundo sistema é um filtro FIR interpolador que tem como função estimar as amostras iguais a zero do filtro esparsa. Este pode ser implementado com poucas operações aritméticas, sendo que seu número de coeficientes depende de  $L$  ( $L$  é conhecido como grau de esparsidade ou fator de interpolação). A estrutura completa requer aproximadamente  $1/L$  da quantidade de operações aritméticas de um filtro FIR convencional equivalente.

#### O Filtro de Wiener Interpolado

A Figura 4 ilustra o esquema clássico de filtragem de Wiener, onde o filtro transversal foi substituído por um filtro IFIR. O vetor de coeficientes do filtro esparsa,  $N \times 1$ , é denotado por

$$\mathbf{w}_s = [w_{s_0}, w_{s_1}, \dots, w_{s_{N-1}}]^t \quad (11)$$

e o vetor de coeficientes do interpolador,  $I \times 1$ , por

$$\mathbf{i} = [i_0, i_1, \dots, i_{I-1}]^t. \quad (12)$$

Logo, o sinal de erro é expresso por

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}_s^t \mathbf{X}(n) \mathbf{i}, \quad (13)$$

onde

$$\mathbf{X}(n) = [\mathbf{x}(n), \mathbf{x}(n-1), \dots, \mathbf{x}(n-I+1)]_{N \times I}. \quad (14)$$

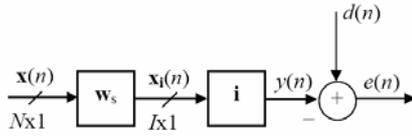


Fig. 4: Filtragem de Wiener interpolada.

A condição de esparsidade de  $\mathbf{w}_s$  pode ser facilmente obtida por um conjunto de restrições lineares fazendo (por exemplo, para  $L=2$  e  $N$  ímpar):

$$\mathbf{C}^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{K \times N} \quad (15)$$

e

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{K \times 1} = \mathbf{0}_{K \times 1}, \quad (16)$$

onde  $K=N \lceil N/L \rceil$ . Claramente, impondo  $\mathbf{C}^t \mathbf{w}_s = \mathbf{f}$  faz com que os elementos nas linhas pares de  $\mathbf{w}_s$  sejam iguais a zero no processo de otimização restrita.

Logo, o vetor  $\mathbf{w}_s$  ótimo do filtro de Wiener interpolado pode ser diretamente obtido a partir de (5):

$$\mathbf{w}_{so} = \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{p}_i - \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{p}_i, \quad (17)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ii} &= E\{\mathbf{X}(n) \mathbf{i} \mathbf{i}^t \mathbf{X}^t(n)\} \\ &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{I-1} i_i i_j E\{\mathbf{x}(n-i) \mathbf{x}^t(n-j)\} \\ &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{I-1} i_i i_j \mathbf{R}(j-i). \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= E\{\mathbf{X}(n) \mathbf{i} d(n)\} \\ &= \sum_{i=0}^{I-1} i_i E\{\mathbf{x}(n-i) d(n)\} \\ &= \sum_{i=0}^{I-1} i_i \mathbf{p}(-i). \end{aligned} \quad (19)$$

e considerando que  $\mathbf{f}=\mathbf{0}$ .

Tirando proveito da estrutura GSC e das restrições de esparsidade, o esquema de filtragem de Wiener interpolada na Figura 4 transforma-se na forma representada pela Figura 5, já que  $\mathbf{f}=\mathbf{0}$  e, conseqüentemente,  $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ .

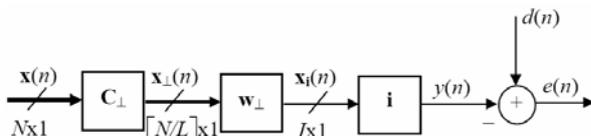


Fig. 5: Implementação GSC da filtragem de Wiener interpolada.

Continuando, é fácil concluir, a partir de (15), que:

$$\mathbf{C}_{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\lceil N/L \rceil \times N} \quad (20)$$

para o exemplo dado ( $L=2$  e  $N$  ímpar).

É interessante observar que o vetor  $\mathbf{w}_{\perp}$  apresenta somente coeficientes com elementos não nulos. Isto vale dizer que  $\mathbf{w}_{\perp}$  não é um filtro esparso. É a pré-multiplicação de  $\mathbf{w}_{\perp}$  por  $\mathbf{C}_{\perp}^t$  que insere zeros entre seus elementos, tornando-o esparso. Ou seja,  $\mathbf{w}_{\perp}$  é o filtro de Wiener dizimado,  $\mathbf{C}_{\perp}$  e  $\mathbf{i}$  respondem pelo processo de interpolação.

O sinal de erro é descrito como

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}_{\perp}^t \mathbf{C}_{\perp}^t \mathbf{X}(n) \mathbf{i} \quad (21)$$

e o erro quadrático médio por

$$J(\mathbf{w}_{\perp}) = \sigma_d^2 - 2 \mathbf{w}_{\perp}^t \mathbf{C}_{\perp}^t \mathbf{p}_i + \mathbf{w}_{\perp}^t \mathbf{C}_{\perp}^t \mathbf{R}_{ii} \mathbf{C}_{\perp} \mathbf{w}_{\perp}. \quad (22)$$

Já o vetor  $\mathbf{w}_{\perp}$  ótimo no esquema de filtragem de Wiener interpolada da Figura 5 é dado por:

$$\mathbf{w}_{\perp o} = [\mathbf{C}_{\perp}^t \mathbf{R}_{ii} \mathbf{C}_{\perp}]^{-1} \mathbf{C}_{\perp}^t \mathbf{p}_i. \quad (23)$$

Conseqüentemente, substituindo (23) em (22), o erro quadrático médio mínimo é expresso por:

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \sigma_d^2 - \mathbf{p}_i^t \mathbf{C}_{\perp} [\mathbf{C}_{\perp}^t \mathbf{R}_{ii} \mathbf{C}_{\perp}]^{-1} \mathbf{C}_{\perp}^t \mathbf{p}_i \\ &= \sigma_d^2 - \mathbf{p}_i^t \mathbf{C}_{\perp} \mathbf{w}_{\perp o}. \end{aligned} \quad (24)$$

Por fim, vale ressaltar que as expressões do filtro ótimo de Wiener interpolado, apresentadas em (17) e (23), relacionam-se da seguinte forma:

$$\mathbf{w}_{so} = \mathbf{C}_{\perp} \mathbf{w}_{\perp o}. \quad (25)$$

#### IV. CANCELADOR DE ECO HÍBRIDO FIR-IFIR

Como mostrado na Figura 6, o cancelamento de eco em linhas telefônicas é realizado através de um filtro digital FIR, colocado em paralelo com a híbrida. Busca-se o filtro que melhor represente o sistema composto pelo circuito de extensão, híbrida e cargas associadas. Na verdade, o cancelamento de eco em linhas telefônicas resume-se a um problema típico de identificação de sistemas. Uma vez que o sistema é identificado, uma réplica do eco,  $\hat{r}(n)$ , pode ser gerada e subtraída do sinal a ser transmitido para o usuário remoto [10].

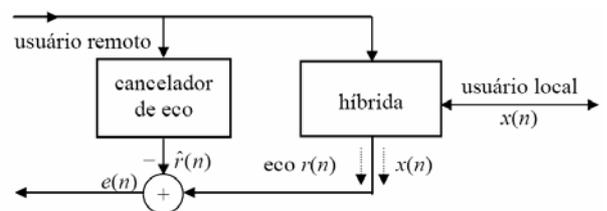


Fig. 6: Esquema de cancelamento de eco em linhas telefônicas.

O cancelador de eco híbrido FIR-IFIR, proposto por Abousaada em [7], baseia-se na constatação de que a resposta

ao impulso do sistema gerador de eco pode ser dividida em duas partes com comportamentos distintos. A primeira parte (parte inicial ou principal), de curta duração, é caracterizada por grandes variações de amplitude entre amostras adjacentes (pouca correlação). Já a segunda parte (parte final ou cauda), de maior duração, é bem comportada, o que caracteriza a existência de uma forte correlação entre suas amostras.

Assim, como mostrado na Figura 7 (ver após a Seção de Referências, no final do artigo), o cancelador híbrido utiliza um filtro FIR convencional para modelar a parte principal do sistema gerador de eco e um filtro IFIR para modelar a cauda.

### A. O Cancelador Híbrido Ótimo

Como mostrado na Figura 8, o esquema do cancelador híbrido proposto em [7] pode ser abordado via GSC. A parte superior corresponde às amostras iniciais (parte principal) da resposta ao impulso do cancelador e a parte inferior responde pelas amostras finais (cauda). Para ilustrar como as matrizes  $\mathbf{C}_{\perp m}$  e  $\mathbf{C}_{\perp t}$  são formadas, considere que o cancelador tem  $N=5$  coeficientes, com  $M=2$  coeficientes na parte principal e  $T=3$  na cauda. Considere, também, que a cauda tem um grau de esparsidade  $L=2$ . Logo:

$$\mathbf{C}_{\perp m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{N \times M} \quad (26a)$$

e

$$\mathbf{C}_{\perp t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{N \times [T/L]} \quad (26b)$$

Observe que  $\mathbf{q}_m = \mathbf{q}_t = \mathbf{0}_N$ , uma vez que  $\mathbf{f}_m = \mathbf{0}_{N-M}$  e  $\mathbf{f}_t = \mathbf{0}_{N[T/L]}$ .

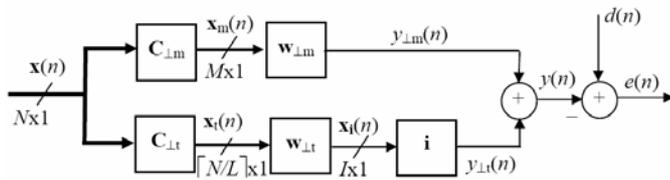


Fig. 8: Implementação GSC do cancelador híbrido.

O sinal de erro é descrito como

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}_{\perp m}^t \mathbf{C}_{\perp m}^t \mathbf{x}(n) - \mathbf{w}_{\perp t}^t \mathbf{C}_{\perp t}^t \mathbf{X}(n) \mathbf{i} \quad (27)$$

e o erro quadrático médio por

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}_{\perp m}, \mathbf{w}_{\perp t}) = & \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}_{\perp m}^t \mathbf{C}_{\perp m}^t \mathbf{p} + \mathbf{w}_{\perp m}^t \mathbf{C}_{\perp m}^t \mathbf{R} \mathbf{C}_{\perp m} \mathbf{w}_{\perp m} + \\ & - 2\mathbf{w}_{\perp t}^t \mathbf{C}_{\perp t}^t \mathbf{p}_i + \mathbf{w}_{\perp t}^t \mathbf{C}_{\perp t}^t \mathbf{R}_{ii} \mathbf{C}_{\perp t} \mathbf{w}_{\perp t} + \\ & + 2\mathbf{w}_{\perp t}^t \mathbf{C}_{\perp t}^t \mathbf{R}_i \mathbf{C}_{\perp m} \mathbf{w}_{\perp m}, \end{aligned} \quad (28)$$

onde

$$\mathbf{R}_i = E\{\mathbf{X}(n) \mathbf{i} \mathbf{x}^t(n)\}$$

$$\begin{aligned} & = \sum_{i=0}^{L-1} i_i E\{\mathbf{x}(n-i) \mathbf{x}^t(n)\} \\ & = \sum_{i=0}^{L-1} i_i \mathbf{R}(-i), \end{aligned} \quad (29)$$

sendo que  $\mathbf{R}_{ii}$  e  $\mathbf{p}_i$  são definidos em (18) e (19), respectivamente.

Observe que o último termo em (28) corresponde ao valor esperado do produto cruzado dos sinais de saída das partes principal e cauda. Se considerarmos que o sinal  $x(n)$ , presente na entrada do cancelador, é modelado como ruído branco gaussiano, estacionário e de média zero, este termo se anula, uma vez que  $\mathbf{C}_{\perp t}^t \mathbf{R}_i \mathbf{C}_{\perp m} = \mathbf{0}$ . Ou seja,  $y_{\perp m}(n)$  e  $y_{\perp t}(n)$  são estatisticamente descorrelacionados ( $E\{y_{\perp m}(n)y_{\perp t}(n)\}=0$ ) e, conseqüentemente,  $\mathbf{w}_{\perp m}$  e  $\mathbf{w}_{\perp t}$  podem ser otimizados separadamente. As soluções ótimas são dadas por:

$$\mathbf{w}_{\perp m o} = [\mathbf{C}_{\perp m}^t \mathbf{R} \mathbf{C}_{\perp m}]^{-1} \mathbf{C}_{\perp m}^t \mathbf{p} \quad (30)$$

e

$$\mathbf{w}_{\perp t o} = [\mathbf{C}_{\perp t}^t \mathbf{R}_{ii} \mathbf{C}_{\perp t}]^{-1} \mathbf{C}_{\perp t}^t \mathbf{p}_i. \quad (31)$$

Já o erro quadrático médio mínimo é obtido substituindo (30) e (31) em (28), tendo como resultado:

$$\begin{aligned} J_{\min} = & \sigma_d^2 - \mathbf{p}^t \mathbf{C}_{\perp m} [\mathbf{C}_{\perp m}^t \mathbf{R} \mathbf{C}_{\perp m}]^{-1} \mathbf{C}_{\perp m}^t \mathbf{p} + \\ & - \mathbf{p}_i^t \mathbf{C}_{\perp t} [\mathbf{C}_{\perp t}^t \mathbf{R}_{ii} \mathbf{C}_{\perp t}]^{-1} \mathbf{C}_{\perp t}^t \mathbf{p}_i \\ = & \sigma_d^2 - \mathbf{p}^t \mathbf{C}_{\perp m} \mathbf{w}_{\perp m o} - \mathbf{p}_i^t \mathbf{C}_{\perp t} \mathbf{w}_{\perp t o}. \end{aligned} \quad (32)$$

A consideração acima é válida para transmissão de dados em linhas telefônicas, a qual pode ser modelada como ruído branco. Entretanto, quando as amostras do sinal de entrada são correlacionadas, como no caso do sinal de voz, o último termo em (28) é diferente de zero. Portanto,  $\mathbf{w}_{\perp m}$  e  $\mathbf{w}_{\perp t}$  não podem ser otimizados independentemente.

Podemos adotar como solução sub ótima para  $\mathbf{w}_{\perp m}$  a própria expressão em (30). Seja o vetor  $\mathbf{w}_{\perp m s o}$  denotar esta solução sub ótima. Neste caso, a solução sub ótima para  $\mathbf{w}_{\perp t}$ , em função de  $\mathbf{w}_{\perp m s o}$ , é dada por:

$$\mathbf{w}_{\perp t s o} = [\mathbf{C}_{\perp t}^t \mathbf{R}_{ii} \mathbf{C}_{\perp t}]^{-1} \mathbf{C}_{\perp t}^t [\mathbf{p}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{C}_{\perp m} \mathbf{w}_{\perp m s o}]. \quad (33)$$

Substituindo, agora, (30) e (33) em (28), obtemos a seguinte expressão para o erro quadrático médio mínimo:

$$\begin{aligned} J_{\min} = & \sigma_d^2 - \mathbf{p}^t \mathbf{C}_{\perp m} [\mathbf{C}_{\perp m}^t \mathbf{R} \mathbf{C}_{\perp m}]^{-1} \mathbf{C}_{\perp m}^t \mathbf{p} + \\ & - [\mathbf{p}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{C}_{\perp m} \mathbf{w}_{\perp m s o}]^t \mathbf{C}_{\perp t} [\mathbf{C}_{\perp t}^t \mathbf{R}_{ii} \mathbf{C}_{\perp t}]^{-1} \mathbf{C}_{\perp t}^t \\ & \quad [\mathbf{p}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{C}_{\perp m} \mathbf{w}_{\perp m s o}] \\ = & \sigma_d^2 - \mathbf{p}^t \mathbf{C}_{\perp m} \mathbf{w}_{\perp m s o} - [\mathbf{p}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{C}_{\perp m} \mathbf{w}_{\perp m s o}]^t \mathbf{C}_{\perp t} \mathbf{w}_{\perp t s o}. \end{aligned} \quad (34)$$

### B. Análise de Degradação

A métrica utilizada para avaliar o desempenho do cancelador, no que diz respeito à atenuação do eco, é definida como [8]:

$$\zeta \equiv \frac{\sigma_r^2}{\sigma_e^2}, \quad (35)$$

onde

$$\sigma_r^2 = E\{r^2(n)\} \quad (36)$$

e

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= E\{e^2(n)\} \\ &= E\{[r(n) - \hat{r}(n)]^2\}\end{aligned}\quad (37)$$

denotam, para  $x(n)=0$ , as variâncias dos ecos total e residual, respectivamente.

Assim, de posse da expressão do erro quadrático médio mínimo, podemos avaliar o desempenho do cancelador em função da correlação do sinal de entrada, do grau de esparsidade  $L$  e do interpolador.

A fim de mensurarmos a degradação introduzida pelo filtro IFIR no cancelador híbrido, considere que a híbrida a ser identificada é modelada por um processo MA (*moving average*) de ordem 255, com resposta impulsiva mostrada na Figura 9.

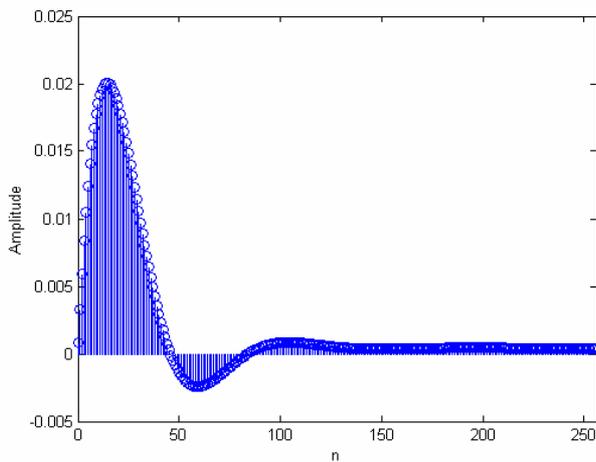


Fig. 9: Resposta ao impulso da híbrida.

No que se refere à modelagem do sinal proveniente do assinante remoto, considera-se: *i*) ruído branco gaussiano de média zero e variância unitária e *ii*) ruído colorido gerado por um processo AR (*autoregressive*), assintoticamente estacionário, de ordem 2, e governado pela seguinte equação de diferença [8]:

$$u(n) - 0,1u(n-1) - 0,8u(n-2) = v(n), \quad (38)$$

onde  $v(n)$  é um ruído branco gaussiano, de média zero, com variância  $\sigma_v^2 = 0,27$ , escolhida de forma que a variância de  $u(n)$  seja unitária. O espalhamento dos autovalores da matriz de correlação de  $u(n)$  é  $\chi(n) = 313,3256$ , o que caracteriza um sinal bem correlacionado.

As curvas de degradação de desempenho para os canceladores híbridos ótimos são mostradas na Figura 10, tendo como sinal remoto tanto o ruído branco como o colorido. O número de coeficientes da parte principal foi fixado em  $M=150$  e os 106 coeficientes restantes foram atribuídos à cauda ( $T=106$ ).

Como era de se esperar, em ambos os casos, o melhor desempenho do cancelador ocorre para  $L=2$ . Observamos também que, independente de  $L$ , o desempenho do cancelador híbrido é sempre superior para sinais descorrelacionados. Por outro lado, a taxa de decaimento do desempenho para ruído branco em função de  $L$  é maior do que para ruído colorido.

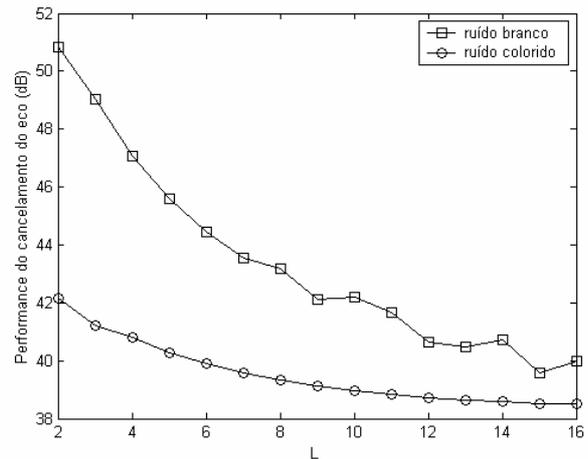


Fig. 10: Desempenho do cancelador híbrido.

## V. CONCLUSÕES

Neste trabalho, verificamos que a degradação introduzida pelo filtro IFIR no cancelador híbrido pode ser estimada e que tal degradação depende da correlação do sinal de entrada, do grau de esparsidade do filtro IFIR e dos parâmetros do interpolador. Isto foi possível graças a uma abordagem de otimização restrição aplicada ao problema de filtragem transversal interpolada. Tal abordagem é geral, visto que pode ser estendida a filtros com diferentes formas de esparsidade.

## REFERÊNCIAS

- [1] Y. Neuvo, C.Y. Dong, and S.K. Mitra; "Interpolated Finite Impulse Response Digital Filters". IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Processing; vol. ASSP-32; pp. 563-570; June 1984.
- [2] T. Saramaki, Y. Neuvo, and S.K. Mitra; "Design of Computationally Efficient Interpolated FIR Filters". IEEE Trans. on Circuits and Systems; vol. 35; pp. 70-88; January 1988.
- [3] R. Lyons; "Interpolated Narrowband Lowpass FIR Filters". IEEE Signal Processing Magazine; vol. 20; nro. 1; pp. 50-57; January 2003.
- [4] L. S. Resende, C. A. F. da Rocha and M. G. Bellanger; "A Linearly-Constrained Approach to the Interpolated FIR Filtering Problem". Proceedings of the IEEE-ICASSP'2000, Istanbul, TURKEY; May 2000.
- [5] L. S. Resende, C. A. F. da Rocha and M. G. Bellanger; "A New Structure for Adaptive IFIR Filtering". Proceedings of the IEEE-ICASSP'2000, Istanbul, TURKEY; May 2000.
- [6] L. S. Resende, C. A. F. da Rocha and M. G. Bellanger; "Degradation Analysis for Interpolated Wiener Filtering". Proceedings of the European Signal Processing Conference (EUSIPCO'2002); Toulouse, FRANCE; September 2002.
- [7] A Abousaada, T. Aboulnasr, and et al; "An Echo Tail Canceller Based on Adaptive Interpolated FIR Filtering". IEEE Trans. on Circuits and Systems – II: Analog and Digital Signal Processing; vol. 39; nro.7; pp. 409-416; July 1992.
- [8] S. Haykin; Adaptive Filter Theory. 4th edition; Prentice-Hall; New Jersey; 2002.
- [9] L. S. Resende; "Algoritmos Recursivos de Mínimos Quadrados para Processamento Espacial/Temporal com Restrições Lineares: Aplicação em Antenas Adaptativas". Tese de Doutorado; FECC/UNICAMP; Campinas-SP; 1996.
- [10] B. Widrow and S. D. Stearns; "Adaptive Signal Processing". Prentice Hall; 1985.

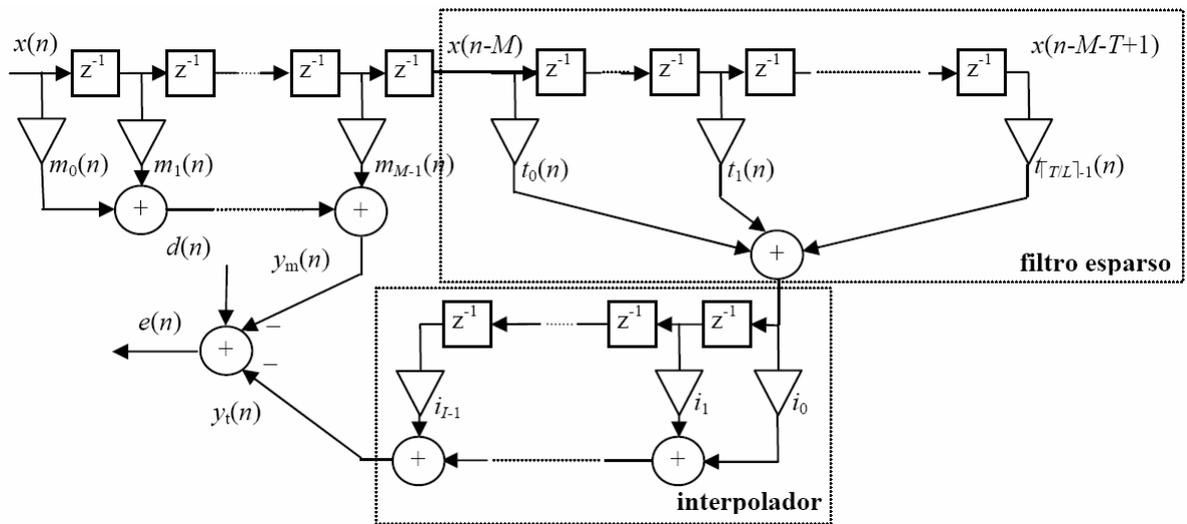


Fig. 7: Estrutura híbrida FIR e IFIR do cancelador de eco Abousaada.