

# Probabilidade de Erro Símbolo com Esquema $\theta$ -QAM sob Desvanecimento Nakagami- $m$ Correlacionado

Wamberto J. L. Queiroz-UFCEG, Francisco Madeiro-UPE,  
Waslon T. A. Lopes-UFCEG e Marcelo S. Alencar-UFCEG

**Resumo**—Este artigo apresenta uma avaliação da probabilidade de erro de símbolo (PES) do esquema  $\theta$ -QAM sob desvanecimento Nakagami- $m$  correlacionado usando receptor MRC (*Maximal-Ratio Combining*) e distribuições Gaussiana e de Von Mises para o ângulo de chegada. São apresentadas novas expressões matemáticas para a PES e é mostrado como o acoplamento magnético entre os elementos do arranjo de antenas associado ao receptor pode influenciar a PES.

**Palavras-Chave**—Probabilidade de erro de símbolos, desvanecimento Nakagami, QAM generalizado.

**Abstract**—This paper presents an evaluation of the symbol error probability-SEP of  $\theta$ -QAM scheme under correlated Nakagami- $m$  fading with MRC receiver using Gaussian and Von Mises distributions for modeling the direction of arrival. New mathematical expressions for the SEP are presented and is shown as the magnetic coupling between the elements of the antenna array associated with the receiver can influence SEP.

**Keywords**—Symbol error probability, Nakagami fading, generalized QAM.

## I. INTRODUÇÃO

A avaliação de receptores compactos, com diversidade espacial, pode ser eficientemente realizada por meio da distribuição de Nakagami que tem sido bastante utilizada para modelar as variações de intensidade de sinais transmitidos em ambientes urbanos [1]. Tem sido verificado nesses ambientes que os sinais transmitidos que alcançam os elementos do arranjo do receptor são compostos pela soma dos sinais provenientes de diferentes direções e os agrupamentos desses sinais são geralmente denominados de sub-percursos. A correlação entre os sinais recebidos, proporcionada pela diminuição de espaçamento entre os elementos do arranjo, direciona a análise matemática da determinação da probabilidade de erro de bit - PEB do receptor para alguns resultados em análise multivariada disponíveis na literatura [2], [3].

Neste artigo é proposta uma análise unificada da recepção com diversidade espacial utilizando um receptor compacto de razão máxima de combinação para arranjos de antenas lineares e o esquema de modulação  $\theta$ -QAM, proposto em 2010 em [4]. A motivação para estudar esse receptor com os esquemas  $\theta$ -QAM é que essa família de modulação inclui esquemas como SQAM (*Square Quadrature Amplitude Modulation*) e TQAM (*Triangular Quadrature Amplitude Modulation*) e pela importância que esses esquemas têm em aplicações que variam desde alguns modems com transmissão síncrona, que usam

constelações 16-QAM, 64-QAM e 256-QAM, aos padrões de televisão digital DVB-T (*Digital Video Broadcasting Terrestrial*) e ISDB-T (*International Standard for Digital Television*).

A abordagem matemática também permite levar em consideração parâmetros relacionados à estrutura física do arranjo e até mesmo à distribuição de probabilidade utilizada para modelar a direção de chegada - (*Direction of Arrival* - DOA) dos sinais ao arranjo. Neste artigo a DOA é caracterizada pelas distribuições de Von Mises e Gaussiana. A unificação de todos esses resultados matemáticos em expressões exatas, que permitam avaliar a PES na saída do receptor MRC é a principal contribuição do artigo.

A Seção II apresenta a caracterização do problema, na Seção II-A são calculadas as expressões da PES, nas Seções III e IV são apresentados os cálculos da matriz de correlação espacial e a influência acoplamento magnético. A Seção V apresenta os resultados numéricos e a Seção VI as conclusões do trabalho.

## II. CARACTERIZAÇÃO

O uso de receptores compactos é comum nos sistemas de comunicações modernos e com a consolidação dos sistemas de múltiplo acesso em banda larga uma gama cada vez maior de serviços é disponibilizada aos usuários desses sistemas [5]. Contrário às facilidades desses sistemas está o desvanecimento decorrente da propagação por múltiplos percursos, que pode ser modelado pela distribuição de Nakagami.

Em um artigo publicado em 2001 [2], foi mostrado que em um canal com desvanecimento Nakagami correlacionado o sinal recebido no  $k$ -ésimo ramo de um receptor de  $L$  ramos pode ser modelado como

$$r_k(t) = s(t)A_k e^{j\phi_k} + n_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, L, \quad (1)$$

em que  $s(t)$  representa o sinal transmitido e  $n_k(t)$  representa a  $k$ -ésima amostra de ruído gaussiano independente e identicamente distribuído com média nula e variância  $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}$ . A fase  $\phi_k$  é uniformemente distribuída em  $[0, 2\pi)$  e  $A_k$  representa a envoltória do sinal  $r_k(t)$  e possui distribuição de Nakagami com função densidade de probabilidade  $p_{A_k}(A_k)$  dada por

$$p_{A_k}(A_k) = \frac{2}{\Gamma(m_k)} \left( \frac{m_k}{\Omega_k} \right)^{m_k} A_k^{2m_k-1} e^{-\left( \frac{m_k}{\Omega_k} \right) A_k^2}, \quad (2)$$

em que  $m_k$  é o parâmetro que controla a intensidade do desvanecimento do sinal captado no  $k$ -ésimo ramo do receptor e  $\Omega_k = \overline{A_k^2}$  é a potência média do sinal no  $k$ -ésimo ramo.

Considerando que esse receptor de múltiplos ramos tenha combinador MRC, se o desvanecimento for plano e as

variações de fase impostas pelo canal forem perfeitamente conhecidas, a relação sinal-ruído (SNR, *Signal to Noise Ratio*) na saída do receptor, denotada por  $\gamma$ , pode ser escrita como

$$\gamma = \frac{E_s}{N_0} \sum_{k=1}^L A_k^2 = \sum_{k=1}^L \gamma_k, \quad (3)$$

em que  $\gamma_k = \left(\frac{E_s}{N_0}\right) A_k^2$  e  $\frac{E_s}{N_0}$  é a relação entre a energia de símbolo  $E_s$  e a densidade espectral do ruído gaussiano  $N_0$ .

Outro resultado importante apresentado em [2] mostra que a função característica  $\phi_\gamma(\omega)$  da variável aleatória  $\gamma$  que representa a SNR na saída do receptor MRC de  $L$  ramos, sob consideração de desvanecimento Nakagami correlacionado de parâmetro  $m$ , pode ser escrita como [2], [3]

$$\phi_\gamma(\omega) = \left| \mathbf{I}_L - i\omega \frac{\bar{\gamma}}{m} \mathbf{\Delta} \right|^{-m}, \quad (4)$$

em que  $|\mathbf{A}|$  representa o determinante de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{I}_L$  representa uma matriz identidade de ordem  $L$  e  $\mathbf{\Delta}$  é a matriz de covariância de elementos complexos obtida a partir da matriz de covariância  $\mathbf{\Sigma}$ ,

$$\mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1L} & \beta_{1L} \\ 0 & a_1 & \beta_{21} & \cdots & \beta_{L1} & b_{L1} \\ b_{21} & \beta_{21} & a_2 & \cdots & b_{2L} & \beta_{2L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{L1} & \beta_{L1} & b_{L2} & \cdots & a_L & 0 \\ \beta_{1L} & b_{1L} & \beta_{L2} & \cdots & 0 & a_L \end{bmatrix}, \quad (5)$$

em que  $\sigma^2 = E[x_k x_k] = E[y_k y_k]$ ,  $a_k = E[x_k^2]/\sigma^2 = 1$ ,  $b_{kp} = E[x_k x_p]/\sigma^2 = b_{pk}$ ,  $\beta_{kp} = E[x_k y_p]/\sigma^2 = -\beta_{pk}$ . Os termos  $x_k$  e  $y_k$  formam, nessa ordem, o  $k$ -ésimo componente em quadratura do vetor  $(2L)$ -dimensional amostrado no receptor de  $L$  ramos dado por

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \cdots \ x_L \ y_L]^T. \quad (6)$$

Em um ambiente de comunicações móveis, as amostras de sinais  $(x_i, y_i)$ , captadas no  $i$ -ésimo elemento do arranjo linear, são variáveis aleatórias gaussianas resultantes da soma de um número considerável de componentes de sinais provenientes da propagação por múltiplos percursos entre a antena transmissora e o  $i$ -ésimo ramo do receptor MRC.

A matriz  $\mathbf{\Delta}$ , por sua vez, é obtida a partir da matriz  $\mathbf{\Sigma}$  e pode ser escrita como

$$\mathbf{\Delta} = \sigma^2 \begin{bmatrix} a_1 & B_{12}^* & B_{13}^* & \cdots & B_{1L}^* \\ B_{12} & a_2 & B_{23}^* & \cdots & B_{2L}^* \\ B_{13} & B_{23} & a_3 & \cdots & B_{3L}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1L} & B_{2L} & B_{3L} & \cdots & a_L \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{\Lambda}, \quad (7)$$

em que  $B_{kl} = b_{kl} + j\beta_{kl}$ .

Em Proakis [6] é mostrado que a PEB de um sistema de recepção sob desvanecimento pode ser calculada tomando a média da probabilidade de erro condicionado à SNR  $\gamma$  na saída do receptor,  $P(e|\gamma)$ , por meio da função densidade de probabilidade (fdp) da SNR  $\gamma$ ,  $p_\gamma(\gamma)$ ,

$$P_e = \int_0^\infty P(e|\gamma) p_\gamma(\gamma) d\gamma. \quad (8)$$

Desse modo, se  $p_\gamma(\gamma)$  for a fdp da SNR na saída do receptor MRC e  $P(e|\gamma)$  for a PES condicionada à SNR, então a expressão  $P_e$  na Equação 8 fornece a PES do receptor MRC. O cálculo dessa probabilidade para um esquema  $\theta$ -QAM é apresentado na Seção II-A.

#### A. PES do esquema $\theta$ -QAM sob desvanecimento Nakagami- $m$ correlacionado

Dado que a probabilidade de erro condicionada à SNR,  $P(e|\gamma)$ , seja conhecida, a média dessa probabilidade, sob o efeito do desvanecimento Nakagami- $m$  para o qual a fdp da SNR  $\gamma$  é  $p_\gamma(\gamma)$ , é dada pela Equação 8. Para avaliar esse receptor com o esquema  $\theta$ -QAM, por meio da PES, é necessário utilizar a expressão  $P(e|\gamma)$  do  $\theta$ -QAM sob ruído gaussiano, dada pela Equação 9 [4]. Na Equação 9 os parâmetros  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  e  $c_6$  são relacionados à geometria da constelação  $\theta$ -QAM e são dados por  $c_1 = \frac{1}{2\pi M}$ ,  $c_2 = 4(\sqrt{M}-2)(\sqrt{M}-1)$ ,  $c_3 = \sqrt{2}(\sqrt{M}-1)$ ,  $c_4 = 5(\sqrt{M}-2)+6$ ,  $c_5 = 3(\sqrt{M}-2)+2$  and  $c_6 = \sqrt{M}$  [4]. Nessas expressões  $M$  representa o número de símbolos  $s_{m,n}$  da constelação  $\theta$ -QAM, cujas coordenadas  $(x_i, y_j)$  são dadas por

$$\begin{aligned} x_i &= \left[2(j-1) + 1 - \sqrt{M}\right] d + [2\text{mod}(i, 2) - 1] \frac{a}{2} \\ y_j &= -\left[2(i-1) + 1 - \sqrt{M}\right] \frac{b}{2}, \end{aligned} \quad (10)$$

com  $i = 1, \dots, \sqrt{M}$ ,  $j = 1, \dots, \sqrt{M}$ ,  $a = 2d \cos \theta$  e  $b = 2d \sin \theta$  e  $\text{mod}(x, y)$  denota a operação módulo após a divisão de  $x$  por  $y$ .

A metade da distância euclidiana entre os símbolos adjacentes da constelação,  $d$ , está relacionada ao parâmetro  $\delta$  e à energia média por símbolo,  $E_{av}$ , por meio da expressão

$$\delta = \frac{d}{\sqrt{E_{av}}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3M + (4-M) \cos(2\theta)}}. \quad (11)$$

A PES do esquema  $\theta$ -QAM, ponderada pela fdp da SNR  $p_\gamma(\gamma)$  na entrada do receptor MRC, para um determinado tipo de desvanecimento, pode ser calculada a partir da Equação 8. Usando o fato que a função característica de uma variável aleatória positiva  $X$  com fdp  $f_X(x)$  é dada por

$$\phi_X(\omega) = \int_0^\infty e^{-j\omega x} f_X(x) dx, \quad (12)$$

pode-se reescrever a Equação 8 em termos da função característica da SNR  $\gamma$  apresentada na Equação 4. Desse modo a PES pode ser escrita como na Equação 13.

$$\begin{aligned} P_e &= c_1 c_2 \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+\theta}{2}} \left| \mathbf{I}_L + \frac{\delta^2 \bar{\gamma}}{m} \mathbf{\Lambda} \csc^2(\phi) \right|^{-m} d\phi \\ &+ c_1 c_3^2 \int_{\theta}^{\pi-\theta} \left| \mathbf{I}_L + \frac{\delta^2 \bar{\gamma}}{m} \mathbf{\Lambda} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{sen}^2(\theta) \csc^2(\phi) \right|^{-m} d\phi \\ &+ c_1 c_4 \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\pi} \left| \mathbf{I}_L + \frac{\delta^2 \bar{\gamma}}{m} \mathbf{\Lambda} \csc^2(\phi) \right|^{-m} d\phi \\ &+ c_1 c_5 \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+\theta}{2}} \left| \mathbf{I}_L + \frac{\delta^2 \bar{\gamma}}{m} \mathbf{\Lambda} \csc^2(\phi) \right|^{-m} d\phi \\ &+ c_1 c_6 \int_{2\theta}^{\pi} \left| \mathbf{I}_L + 4 \frac{\delta^2 \bar{\gamma}}{m} \mathbf{\Lambda} \csc^2(\phi) \text{sen}^2(\theta) \right|^{-m} d\phi. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 P(e|\gamma) = & c_1 c_2 \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+\theta}{2}} \exp(-\gamma \delta^2 \csc^2(\phi)) d\phi + c_1 c_3^2 \int_{\theta}^{\pi-\theta} \exp(-\gamma \delta^2 \csc^2(\phi) \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2(\theta)) d\phi \\
 & + c_1 c_4 \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\pi} \exp(-\gamma \delta^2 \csc^2(\phi)) d\phi + c_1 c_5 \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+\theta}{2}} \exp(-\gamma \delta^2 \csc^2(\phi)) d\phi + c_1 c_6 \int_{2\theta}^{\pi} \exp(-4\gamma \delta^2 \csc^2(\phi) \sin^2(\theta)) d\phi.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Para avaliar a PES é necessário calcular os coeficientes de correlação espacial da matriz  $\Lambda$  da Expressão 7. É por meio desses coeficientes que a DOA dos sinais que alcançam o arranjo é levada em consideração. Neste trabalho apenas o arranjo linear igualmente espaçado é avaliado para as distribuições de Von Mises e Gaussiana.

### III. CÁLCULO DOS COEFICIENTES DA MATRIZ DE CORRELAÇÃO ESPACIAL

O uso da distribuição de Von Mises para modelar a DOA no cálculo dos coeficientes de correlação espacial tem a vantagem de englobar outras distribuições como a gaussiana, a uniforme e a cossenoidal e fornece expressões matemáticas mais simples que as distribuições gaussiana e cossenoidal. A distribuição de Von Mises foi proposta em 1918 e tem sido citada como uma boa alternativa para modelar DOA de sinais eletromagnéticos em meios urbanos [7] nos quais o espalhamento das ondas é não uniforme [8]–[12]. A expressão da fdp de Von Mises é dada por

$$p_{\varphi}(\varphi) = \begin{cases} \frac{\exp[\kappa \cos(\varphi - \varphi_o)]}{2\pi I_0(\kappa)}, & -\pi + \varphi_o \leq \varphi \leq \pi + \varphi_o \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \tag{14}$$

em que  $\varphi_o$  representa a direção média de um conjunto de componentes direcionais e varia no intervalo  $[0, \pi)$ . A fdp de Von Mises se relaciona à fdp gaussiana quando  $\kappa$  toma valores elevados e à uniforme quando  $\kappa$  tende a zero.

Os coeficientes de correlação espacial entre amostras captadas em dois elementos de um arranjo linear de  $L$  elementos e espaçamento constante  $d$  entre os elementos são denotados por  $\rho(m, n)$  e são dados por

$$\rho(m, n) = E[z_m z_n^*]. \tag{15}$$

Sabe-se que as amostras  $z_n$  captadas nos elementos do arranjo de antenas dependem da DOA. Aplicando a fdp de Von Mises da Expressão 14 à Equação 15 e usando a identidade de Euler e as expansões em séries de Bessel dos termos  $\cos((m-n)\beta d \sin \varphi)$  e  $\sin((m-n)\beta d \sin \varphi)$  [13], pode-se escrever as partes real e imaginária de  $\rho(m, n)$  como [14]

$$\begin{aligned}
 \rho_R = & 2 \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{I_{2l}(\kappa)}{I_0(\kappa)} \right) J_{2l}((m-n)\beta d) \cos(2l\varphi_o) \\
 & + J_0((m-n)\beta d) \\
 \rho_I = & 2 \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{I_{2l+1}(\kappa)}{I_0(\kappa)} \right) J_{2l+1}((m-n)\beta d) \sin((2l+1)\varphi_o).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Esses coeficientes correspondem, respectivamente, às partes real e imaginária dos elementos da matriz apresentada na Equação 7, ou seja  $\rho_R(k, l) = b_{k,l}$  e  $\rho_I(k, l) = \beta_{k,l}$ .

De modo similar, aplicando a fdp gaussiana dada por

$$p_{\varphi}(\phi) = \frac{k_g}{\sqrt{2\pi\sigma_{\varphi}^2}} e^{-\frac{(\varphi - \varphi_o)^2}{2\sigma_{\varphi}^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} + \varphi_o \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} + \varphi_o, \tag{17}$$

à Equação 15, pode-se escrever as partes real e imaginária de  $\rho(m, n)$  na forma [14]

$$\begin{aligned}
 \rho_R = & \frac{2k_g}{\sqrt{\pi}} \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l}((m-n)\beta d) \mathcal{R}_g(2l, \phi_o, \sigma_{\phi}) \\
 & + J_0((m-n)\beta d) \\
 \rho_I = & \frac{2k_g}{\sqrt{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} J_{2l+1}((m-n)\beta d) \mathcal{I}_g(2l+1, \phi_o, \sigma_{\phi}),
 \end{aligned} \tag{18}$$

em que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_g(a, b, c) = & \frac{\sqrt{\pi}}{2} [\cos(ab)\mathcal{A}(a, c) - \sin(ab)\mathcal{B}(a, c)] e^{-\frac{(ac)^2}{2}} \\
 \mathcal{I}_g(a, b, c) = & \frac{\sqrt{\pi}}{2} [\sin(ab)\mathcal{A}(a, c) - \cos(ab)\mathcal{B}(a, c)] e^{-\frac{(ac)^2}{2}},
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(a, b) = & \text{Re} \left\{ \text{erf} \left( \frac{\pi}{\sqrt{8b}} - j \frac{ab}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\
 & - \text{Re} \left\{ \text{erf} \left( -\frac{\pi}{\sqrt{8b}} - j \frac{ab}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\
 \mathcal{B}(a, b) = & \text{Im} \left\{ \text{erf} \left( \frac{\pi}{\sqrt{8b}} - j \frac{ab}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\
 & - \text{Im} \left\{ \text{erf} \left( -\frac{\pi}{\sqrt{8b}} - j \frac{ab}{\sqrt{2}} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{20}$$

e  $k_g$  é um coeficiente de ajuste da área da fdp gaussiana.

### IV. AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO ACOPLAMENTO ELETROMAGNÉTICO

Um dos principais problemas decorrentes do uso de arranjos de antenas compactos é o surgimento do acoplamento eletromagnético entre os elementos. Quando o efeito do acoplamento é considerado, o comprimento dos dipolos lineares que formam o arranjo precisa ser levado em consideração. Para que se possa calcular os coeficientes de correlação espacial do arranjo linear, sob o efeito do acoplamento, é necessário escrever a relação entre o vetor de tensões  $\mathbf{V}$ , amostradas nos dipolos do arranjo, e o vetor de amostras de sinais  $\mathbf{S}$  obtidas sem acoplamento. Essa relação é dada por [2]

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{S}, \tag{21}$$

em que

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_{11}}{Z_d} & \frac{Z_{12}}{Z_d} & \frac{Z_{13}}{Z_d} & \dots & \frac{Z_{1L}}{Z_d} \\ \frac{Z_{21}}{Z_d} & 1 + \frac{Z_{22}}{Z_d} & \frac{Z_{23}}{Z_d} & \dots & \frac{Z_{2L}}{Z_d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{Z_{L1}}{Z_d} & \frac{Z_{L2}}{Z_d} & \frac{Z_{L3}}{Z_d} & \dots & 1 + \frac{Z_{LL}}{Z_d} \end{bmatrix} \quad (22)$$

e

$$\mathbf{S}^T = [ e^{j0\beta d \text{sen}\varphi} \quad e^{j1\beta d \text{sen}\varphi} \quad \dots \quad e^{j(L-1)\beta d \text{sen}\varphi} ]. \quad (23)$$

Na matriz  $L \times L$  na Equação 22, os elementos  $Z_{mn}$  são as impedâncias mútuas entre os dipolos e  $Z_d$  a auto-impedância de cada dipolo. O vetor de tensões captadas nos elementos do arranjo pode ser escrito como

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^L a_{1i} e^{j(i-1)\beta d \text{sen}\varphi} \\ \sum_{i=1}^L a_{2i} e^{j(i-1)\beta d \text{sen}\varphi} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^L a_{Li} e^{j(i-1)\beta d \text{sen}\varphi} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

em que  $a_{ij}$  é um elemento da matriz de impedância inversa.

Nos vetores das Expressões 23 e 24,  $\beta$ , sem subíndice, representa o número de onda  $2\pi/\lambda$  e  $d$  representa espaçamento, em comprimentos de comprimentos de onda, entre os elementos do arranjo linear.

Tomando duas amostras  $r_m$  e  $r_n$  do vetor de tensões  $\mathbf{V}$ , o valor do quadrado do módulo do coeficiente de correlação pode ser reescrito como [14]

$$|\rho_{mn}|^2 = \frac{1}{P_m P_n} \int_{\varphi} r_m r_n^* p_{\varphi}(\varphi) d\varphi, \quad (25)$$

em que  $P_m$  é a potência média de um componente de sinal recebido no  $m$ -ésimo elemento do arranjo de antenas de  $L$  elementos e pode ser escrita como

$$P_m = \int_{\varphi} \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L a_{mk} a_{ml}^* e^{j(k-l)\beta d \text{sen}\varphi} p_{\varphi}(\varphi) d\varphi. \quad (26)$$

Aplicando a fdp gaussiana ou de Von Mises à Equação 26, para caracterizar a distribuição de probabilidades da DOA, pode-se escrever, após algumas simplificações, os coeficientes de correlação espacial na forma

$$|\rho_{nm}|^2 = \frac{1}{P_n P_m} \left| \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L a_{nk} a_{ml}^* (b_{kl} + j\beta_{kl}) \right|^2, \quad (27)$$

em que  $b_{nm} + j\beta_{nm}$  é o coeficiente de correlação espacial complexo calculado sem acoplamento.

No caso de se usar elementos de dipolo linear de comprimento  $l$ , com  $l = n\lambda/2$ ,  $n = 1, 3, 5, \dots$ , alinhados lado a lado e com alimentação central, as partes real e imaginária da impedância mútua entre dois dipolos 1 e 2 podem ser escritas como [15]

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{\eta_0}{4\pi} [2\text{Ci}(u_0) - \text{Ci}(u_1) - \text{Ci}(u_2)] \\ X_{12} &= -\frac{\eta_0}{4\pi} [2\text{Si}(u_0) - \text{Si}(u_1) - \text{Si}(u_2)], \end{aligned} \quad (28)$$

em que  $u_0 = \beta d$ ,  $u_1 = \beta(\sqrt{d^2 + l^2} + l)$  e  $u_2 = \beta(\sqrt{d^2 + l^2} - l)$ .

Nessas expressões  $\eta_0$  representa a impedância do meio, que vale aproximadamente  $120\pi$  ohms, e  $\text{Ci}(x)$  e  $\text{Si}(x)$  são respectivamente as funções cosseno e seno integral. Desse modo, os elementos  $Z_{mn}$  da matriz  $\mathbf{Z}$  dada na Equação 22 são dados por  $Z_{mn} = R_{mn} + jX_{mn}$ , em que a distância  $d_{mn}$  entre os elementos  $m$  e  $n$  é dada por

$$d_{mn} = d \cdot |m - n| \quad \text{para o arranjo linear.} \quad (29)$$

## V. RESULTADOS

Nesta seção são analisados alguns resultados da avaliação das expressões obtidas nas seções anteriores. Em todas as curvas é considerado o acoplamento magnético entre os elementos do arranjo linear. A Figura 1 mostra uma comparação entre curvas de probabilidade de erro de símbolos, sob efeito do acoplamento magnético, considerando as distribuições gaussiana, com  $\sigma_{\varphi} = 27^\circ$  e  $\varphi_o = 48,5^\circ$ , e Von Mises, com  $\kappa = 4, 7$  e  $\varphi_o = 48,5^\circ$ . Os demais parâmetros são  $m = 0, 8$ ,  $d = 0, 25\lambda$ ,  $l = 0, 6\lambda$ ,  $M = 64$  e  $\theta = 60^\circ$ . É interessante notar, para

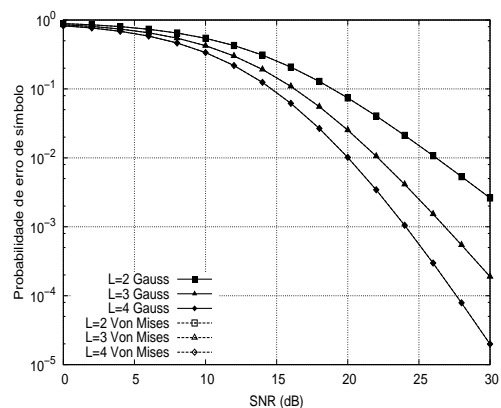


Fig. 1. PES do esquema  $\theta$ -QAM sob desvanecimento Nakagami- $m$  correlacionado e receptor MRC de  $L$  ramos com  $\theta = 60^\circ$ ,  $M = 64$ ,  $l = 0, 6\lambda$ ,  $d = 0, 25\lambda$  e diferentes valores de  $L$ .

esses parâmetros das distribuições gaussiana e Von Mises, que as curvas da PES foram exatamente iguais, corroborando a similaridade entre as fdps. A Figura 2 apresenta as curvas da PES em função da direção de chegada para a distribuição de Von Mises e dois valores de  $m$ .

A Figura 3 mostra as curvas da PES em função da distância de separação entre os elementos do arranjo considerando distribuição gaussiana para o ângulo de chegada. Nota-se pelas Figuras 3 e 4 que a direção de chegada  $\varphi_o$  tem mais influência na probabilidade de erro do que a distância de separação entre os elementos do arranjo, principalmente para valores de  $d$  maiores que  $0, 5\lambda$ . A Figura 4 apresenta as curvas da PES em função do ângulo  $\theta$  da constelação  $\theta$ -QAM com distribuição gaussiana para o ângulo de chegada e dois valores de  $d$  (em função de  $\lambda$ ) para o arranjo linear. Percebe-se pela Figura 4 que a influência da ordem da diversidade do receptor MRC na PES é maior que a influência do ângulo  $\theta$  da constelação  $\theta$ -QAM e que o ângulo  $\theta$  que leva a menores valores de PES é  $60^\circ$ .

## VI. CONCLUSÕES

Neste artigo, a avaliação da PES do esquema  $\theta$ -QAM sob desvanecimento Nakagami correlacionado, com distribuições

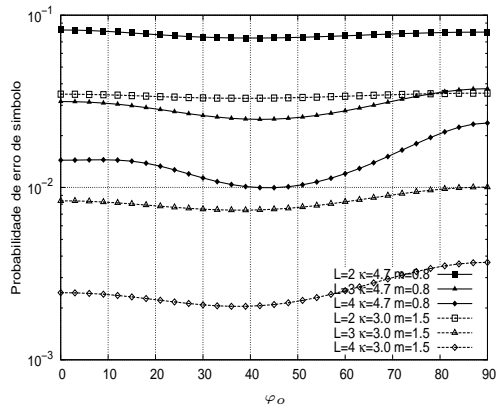


Fig. 2. PES do esquema  $\theta$ -QAM em função da direção de chegada  $\varphi_o$ , sob desvanecimento Nakagami- $m$  correlacionado e receptor MRC de  $L$  ramos com  $\theta = 60^\circ$ ,  $M = 64$ ,  $l = 0, 6\lambda$ ,  $d = 0, 25\lambda$ ,  $SNR = 20$  dB e diferentes valores de  $L$ .

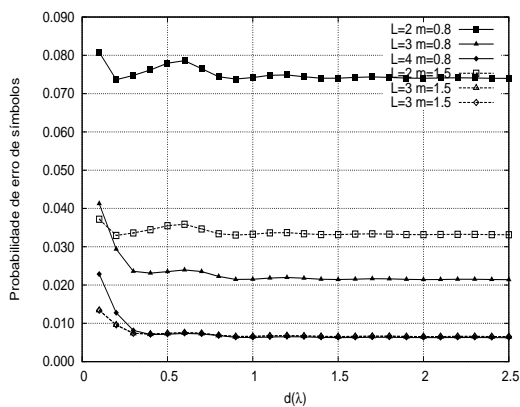


Fig. 3. PES do esquema  $\theta$ -QAM em função da distância de separação entre os elementos do arranjo de antenas, sob desvanecimento Nakagami- $m$  correlacionado e receptor MRC de  $L$  ramos com  $\varphi_o = 48^\circ$ ,  $\sigma_\varphi = 27^\circ$ ,  $\theta = 60^\circ$ ,  $M = 64$ ,  $l = 0, 6\lambda$ ,  $SNR = 20$  dB e diferentes valores de  $L$ .

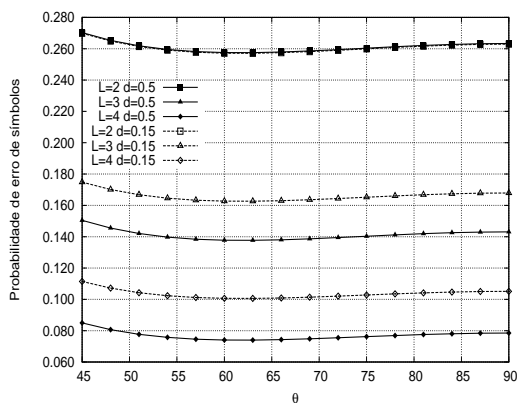


Fig. 4. PES do esquema  $\theta$ -QAM em função do ângulo  $\theta$  da constelação  $\theta$ -QAM, sob desvanecimento Nakagami- $m$  correlacionado e receptor MRC de  $L$  ramos com  $\varphi_o = 45^\circ$ ,  $\sigma_\varphi = 40^\circ$ ,  $M = 64$ ,  $l = 0, 6\lambda$ ,  $SNR = 15$  dB e diferentes valores de  $L$ .

Von Mises e Gaussiana para modelar a direção de chegada, mostrou que a distribuição de Von Mises pode ser uma solução matemática viável. Além disso, pôde-se verificar que a direção de chegada tem mais influência na PES que a distância entre os elementos do arranjo. Isso ocorre porque os elementos do arranjo tornam-se mais correlacionados e magneticamente acoplados em função do ângulo de chegada. Adicionalmente, o número de ramos  $L$  no receptor MRC tem mais influência no combate aos efeitos do acoplamento que o ângulo  $\theta$  da constelação  $\theta$ -QAM. Isso ocorre porque em uma faixa de SNR de 0 a 30 dB, a variação do ângulo  $\theta$  ótimo (o ângulo que fornece os menores valores de PES sob ruído gaussiano) diminui com o aumento da ordem da constelação. Assim, dado um valor ótimo de  $\theta$ , pode-se diminuir a PES apenas pelo controle de  $L$ . Como perspectiva de trabalhos futuros, pode-se obter a função característica de modelos de desvanecimento correlacionado mais generalizados que o modelo de Nakagami e a partir desses novos modelos avaliar a influência do acoplamento magnético em receptores compactos.

#### REFERÊNCIAS

- [1] M. Nakagami. The m-distribution - a general formula of intensity distribution of rapid fading. *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, 40:757-768, November 1962.
- [2] J. Luo, J. R. Zeidler, and S. McLaughlin. Performance analysis of compact antenna arrays with MRC in correlated Nakagami fading channels. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 50(1), January 2001.
- [3] V. A. Aalo. Performance of maximal-ratio diversity systems in a correlated Nakagami fading environment. *IEEE Transactions on Communications*, 43(8), August 1995.
- [4] K. N. Pappi, A. Lioumpas, and G. K. Karagiannidis.  $\theta$ -QAM: A parametric quadrature amplitude modulation family and its performance in awgn and fading channels. *IEEE Transactions on Communications*, 58(4):1014-1019, April 2010.
- [5] Y. Cho and J. Hong Lee. Effect of fading correlation on the SER performance of M-Ary PSK with maximal ratio combining. *IEEE Communications Letters*, 3(7), July 1999.
- [6] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, New York, 3 edition, 1995.
- [7] A. Abdi, J. A. Barger, and M. Kaveh. A parametrical model for the distribution of the angle of arrival and the associated correlation function and power spectrum at the mobile station. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 51(3):425-433, 2002.
- [8] J. S. Sadowsky and V. Kafedziski. On the correlation and scattering functions of the WSSUS channel for mobile communication. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 47(1):270-282, February 1998.
- [9] M. Patzold, Y. Li, and F. Laue. A study of a land mobile satellite channel model with asymmetrical doppler power spectrum and lognormal distributed line-of-sight component. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 47(1):297-310, February 1998.
- [10] M. Patzold, U. Killat, Y. Li, and F. Laue. Modeling, analysis and simulation of nonfrequency-selective mobile radio channels with asymmetrical doppler power spectral density shapes. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 46(2):497-507, May 1997.
- [11] F. P. Fontan et. all. A versatile framework for narrow and wide-band statistical propagation model for the lms channel. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 43(4):431-458, December 1997.
- [12] W. R. Braun and U. Dersch. A physical mobile radio channel model. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 40(2):472-482, May 1991.
- [13] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover publications, Inc., New York, 1970.
- [14] W. J. L. de Queiroz, M. S. de Alencar, W. T. A. Lopes, and F. Madeiro. Spatial correlation for doa characterization using von mises, cosine and gaussian distributions. *International Journal of Antennas and Propagation*, pages 1-12, July 2011.
- [15] Constatine A. Balanis. *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley & Sons, Inc., 1997.