

Modelo Analítico do Algoritmo ϵ LMS no Domínio Transformado para Sinais de Entrada Gaussianos

Elen M. Lobato, Orlando J. Tobias e Rui Seara

Resumo—Este artigo apresenta uma análise estatística para o algoritmo ϵ LMS no domínio transformado (TD- ϵ LMS). Em geral, o algoritmo LMS no domínio transformado (TD-LMS) é utilizado como uma alternativa ao algoritmo LMS convencional, visando suplantiar os problemas de convergência desse último para o caso de sinais de entrada correlacionados. O algoritmo TD- ϵ LMS é uma versão melhorada do TD-LMS muito utilizada na prática, para o caso de sinais de entrada pouco persistentes. Tal melhoramento é conseguido adicionando-se um parâmetro constante de pequeno valor ϵ à estimativa de potência média do sinal de entrada transformado, objetivando evitar problemas de instabilidade no algoritmo. O modelo proposto é derivado para condições de ordem elevada e sinais de entrada com distribuição Gaussiana. Através de simulações numéricas, constata-se o bom casamento existente entre os resultados determinados via simulação Monte Carlo e aqueles obtidos com o modelo analítico proposto.

Palavras-Chave—Filtragem adaptativa, modelagem estatística, transformadas ortogonais.

Abstract—This paper presents a stochastic analysis for the transform-domain ϵ LMS algorithm (TD- ϵ LMS). In general, the transform-domain LMS (TD-LMS) algorithm is used as an alternative to the conventional LMS algorithm, aiming to overcome the convergence problems of the latter, for the case of correlated input signals. The TD- ϵ LMS algorithm is an improved version of the TD-LMS one, which is currently used in practical applications with low persistent input signals. Such an improvement is carried out by adding a small size constant parameter ϵ to the power estimate of the transformed input signal, in order to prevent instability problems in the algorithm. The proposed model is derived for a high order adaptive filter and Gaussian input signals. Through numerical simulations, we can verify a good agreement between the Monte Carlo method and the predictions from the proposed analytical model.

Index Terms—Adaptive filtering, statistical modeling, orthogonal transforms.

Elen M. Lobato, Orlando J. Tobias e Rui Seara, LINSE – Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, E-mails: {elen, orlando, seara}@linse.ufsc.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES e pelo CNPq.

I. INTRODUÇÃO

O algoritmo LMS é um dos mais usados em filtragem adaptativa devido à sua simplicidade de implementação e robustez [1]–[3]. Entretanto, seu maior inconveniente é a sua baixa velocidade de convergência para sinais de entrada correlacionados. Para superar tal limitação, vários algoritmos alternativos têm sido propostos na literatura [1]–[4]. No entanto, muitas dessas opções, como é o caso do algoritmo RLS (*recursive least-squares*), apresentam um esforço computacional de implementação considerável, o que motiva a busca por outras abordagens que acelerem a taxa de convergência do algoritmo LMS sem um aumento significativo de sua complexidade computacional. Uma classe desses algoritmos é o algoritmo LMS no domínio transformado (TD-LMS).

O algoritmo TD-LMS foi primeiramente introduzido por Narayan *et al.* [4], no qual a transformada de Fourier discreta é usada para descorrelacionar o sinal de entrada. Outras transformadas também podem ser usadas, tais como a DCT (*discrete cosine transform*), DST (*discrete sine transform*), [5], [6]. Com respeito à análise estatística do algoritmo TD-LMS, o principal obstáculo na obtenção das expressões analíticas reside na determinação do valor esperado dos termos que contém o passo de adaptação variante no tempo. Na literatura, um procedimento comum usado para resolver tal problema é considerar que a matriz de autocorrelação do sinal de entrada transformado seja invariante no tempo [7], [8]. Essa hipótese simplifica significativamente a análise estatística do algoritmo. No entanto, o modelo estatístico resultante não representa mais o processo real de forma adequada.

Recentemente [9] apresentou um modelo estatístico para o algoritmo TD-LMS, incluindo a característica variante no tempo do fator de normalização do passo de adaptação. Entretanto, as predições obtidas são somente precisas para a condição de adaptação muito lenta. Além disso, o modelo estatístico requer expressões recursivas para a determinação dos momentos de primeira e segunda ordens do passo de adaptação, resultando em um modelo bastante complexo e de difícil interpretação.

Buscando aprimorar o resultado de [9], é apresentado em [10] um modelo estatístico de menor complexidade e melhor

precisão. No entanto, tal modelo considera $\varepsilon = 0$. Por razões práticas, uma constante $\varepsilon \neq 0$ deve ser adicionada à estimativa de potência média. Tal procedimento tem por objetivo evitar divisão por zero, caso o sinal de entrada assumia valores muito pequenos. Assim, este trabalho tem por objetivo incluir tal constante na modelagem estatística do algoritmo TD-LMS. Essa classe de algoritmos é denominada TD- ε LMS. O modelo estatístico aqui desenvolvido apresenta resultados muito concordantes quando confrontados com aqueles obtidos via simulação Monte Carlo.

II. ALGORITMO ε LMS NO DOMÍNIO TRANSFORMADO

A equação de atualização dos coeficientes para o algoritmo TD-LMS é dada por [2]

$$\mathbf{w}_T(n+1) = \mathbf{w}_T(n) + 2\mu\mathbf{D}^{-1}e(n)\mathbf{x}_T(n), \quad (1)$$

onde $e(n)$ é o sinal de erro obtido como

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}_T^T(n)\mathbf{x}_T(n) + z(n), \quad (2)$$

onde $\mathbf{x}_T(n) = \mathbf{T}\mathbf{x}(n) = [x_0(n) \ x_1(n) \ \dots \ x_{N-1}(n)]^T$ é o vetor do sinal de entrada transformado; \mathbf{T} é a matriz de transformação ortogonal $N \times N$ (como por exemplo DCT, DST); e $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-N+1)]^T$ é o vetor do sinal de entrada. $z(n)$ é um ruído de medição, com média nula e variância σ_z^2 e descorrelacionado de qualquer outro sinal do sistema. O passo de adaptação é representado por μ . A operação de normalização de potência é realizada dividindo μ pela matriz diagonal \mathbf{D} , onde seus elementos são a variância da i -ésima saída do bloco transformado, denotado por σ_i^2 [2]. Como em princípio não se tem o conhecimento da potência média, a matriz \mathbf{D} é substituída por sua versão variante no tempo $\mathbf{D}(n)$. Os elementos da diagonal dessa matriz são dados por $\sigma_i^2(n) + \varepsilon$. Como anteriormente mencionado, a constante ε é adicionada para evitar divisão por zero. Uma forma de se estimar $\sigma_i^2(n)$ é dada por

$$\sigma_i^2(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x_i^2(n-k) \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

onde M é o tamanho da janela de observação usada para o cálculo de $\sigma_i^2(n)$.

III. ANÁLISE

A. Momento de Primeira Ordem

Tomando o valor esperado de ambos os lados de (1), tem-se

$$E[\mathbf{w}_T(n+1)] = E[\mathbf{w}_T(n)] + 2\mu E[\mathbf{D}^{-1}(n)\mathbf{x}_T(n)d(n)] - 2\mu E[\mathbf{D}^{-1}(n)\mathbf{x}_T(n)\mathbf{x}_T^T(n)\mathbf{w}_T(n)]. \quad (4)$$

Para se obter um modelo estatístico para o momento de primeira ordem, os valores esperados $E[\mathbf{D}^{-1}(n)\mathbf{x}_T(n)\mathbf{x}_T^T(n)]$ e $E[\mathbf{D}^{-1}(n)\mathbf{x}_T(n)d(n)]$ devem ser determinados. Assim, algumas hipóteses devem ser consideradas:

i) $\mathbf{w}_T(n)$ e $\mathbf{x}_T(n)$ são estatisticamente independentes;

ii) $\mathbf{D}^{-1}(n)$ e $\mathbf{x}_T(n)\mathbf{x}_T^T(n)$ são processos conjuntamente estacionários, tal que $\mathbf{D}^{-1}(n)$ varie lentamente com relação a $\mathbf{x}_T(n)\mathbf{x}_T^T(n)$, concordando com o estabelecido em [11], $E\{f[a(n)]f[b(n)]\} \approx E\{f[a(n)]\}E\{f[b(n)]\}$.

Desta forma, a determinação dos valores esperados é dada como em [10], obtendo-se as seguintes aproximações:

$$E[\mathbf{D}^{-1}(n)\mathbf{x}_T(n)\mathbf{x}_T^T(n)] \approx E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_T \quad (5)$$

e

$$E[\mathbf{D}^{-1}(n)\mathbf{x}_T(n)d(n)] \approx E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{p}_T. \quad (6)$$

Agora, substituindo (5) e (6) em (4), obtém-se

$$E[\mathbf{w}_T(n+1)] = \{\mathbf{I} - 2\mu E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_T\}E[\mathbf{w}_T(n)] + 2\mu E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{p}_T. \quad (7)$$

Para concluir a derivação do primeiro momento, deve-se determinar o valor esperado $E[\mathbf{D}^{-1}(n)]$. Assim, assumindo que $\{x_i^2(n)\}$ tenha uma distribuição de *qui*-quadrado com M graus de liberdade [12], obtém-se (ver Apêndice):

$$E[\mathbf{D}^{-1}(n)] = \frac{M}{(M-2)}[\text{diag}(\mathbf{R}_T)]^{-1} - \varepsilon \frac{M^2}{(M-2)(M-4)}[\text{diag}(\mathbf{R}_T^2)]^{-1}. \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7), obtém-se a expressão para o momento de primeira ordem do vetor de coeficientes para o algoritmo TD- ε LMS como segue:

$$E[\mathbf{w}_T(n+1)] = E[\mathbf{w}_T(n)] - 2\mu \frac{M}{M-2}[\text{diag}(\mathbf{R}_T)]^{-1}\mathbf{R}_T E[\mathbf{w}_T(n)] + 2\mu \frac{M}{M-2}[\text{diag}(\mathbf{R}_T)]^{-1}\mathbf{p}_T + \varepsilon \frac{2\mu M^2}{(M-2)(M-4)}[\text{diag}(\mathbf{R}_T^2)]^{-1}\mathbf{R}_T E[\mathbf{w}_T(n)] - \varepsilon \frac{2\mu M^2}{(M-2)(M-4)}[\text{diag}(\mathbf{R}_T^2)]^{-1}\mathbf{p}_T. \quad (9)$$

B. Regime Permanente

O valor em regime permanente do vetor de coeficientes do filtro adaptativo é determinado de $\mathbf{w}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}_T(n)]$.

Assim, assumindo a convergência de (9), verifica-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}_T(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}_T(n)] = \mathbf{w}_\infty$. Então de (9), após algumas manipulações matemáticas, obtém-se

$$\mathbf{w}_\infty = \mathbf{R}_T^{-1}\mathbf{p}_T. \quad (10)$$

Comparando (10) com a expressão equivalente apresentada em [2], pode-se ver que a constante ε não provoca qualquer alteração no valor em regime permanente do vetor de coeficientes. Assim, na média, os coeficientes do algoritmo TD- ε LMS convergem para a solução de Wiener.

C. Curva de Aprendizagem e Momento de Segunda Ordem

Usando-se a definição de vetor de erro nos coeficientes $\mathbf{v}_T(n) = \mathbf{w}_T(n) - \mathbf{w}_{T_{opt}}$, pode-se expressar o sinal de erro como:

$$e(n) = e_o(n) - \mathbf{x}_T^T(n) \mathbf{v}_T(n), \quad (11)$$

onde $e_o(n) = d(n) - \mathbf{x}_T^T(n) \mathbf{w}_{T_{opt}} + z(n)$ representa o erro de estimação. Elevando-se ao quadrado ambos os lados de (11), calculando-se o valor esperado da expressão resultante e considerando que: $\mathbf{v}_T(n)$ e $\mathbf{x}_T(n)$ sejam estatisticamente independentes, $z(n)$ seja descorrelacionado de qualquer outro sinal envolvido no processo, e através do princípio da ortogonalidade $E[e_o(n) \mathbf{x}_T(n)] = 0$, obtém-se uma expressão para o erro quadrático médio (EQM) dada por

$$E[e^2(n)] = e_{\min} + \text{tr}\{\mathbf{R}_T E[\mathbf{v}_T(n) \mathbf{v}_T^T(n)]\}, \quad (12)$$

onde $e_{\min} = E[e_o^2(n)]$ é o erro mínimo em regime permanente.

Para determinar (12) a matriz de covariância do vetor de erro nos coeficientes $\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{v}_T(n) \mathbf{v}_T^T(n)]$ deve ser obtida. Assim, subtrai-se $\mathbf{w}_{T_{opt}}$ de ambos os lados de (1) para obter $\mathbf{v}_T(n)$. Então, tomando-se o valor esperado $E[\mathbf{v}_T(n) \mathbf{v}_T^T(n)]$ e adotando-se as mesmas hipóteses usadas para obtenção do momento de primeira ordem, uma expressão recursiva para a determinação da matriz de covariância $\mathbf{K}(n)$ é obtida. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) &= \mathbf{K}(n) - 2\mu \mathbf{K}(n) \mathbf{R}_T E[\mathbf{D}^{-1}(n)] - 2\mu E[\mathbf{D}^{-1}(n)] \mathbf{R}_T \mathbf{K}(n) \\ &\quad + 4\mu^2 E[\mathbf{D}^{-1}(n)] \{2\mathbf{R}_T \mathbf{K}(n) \mathbf{R}_T + \mathbf{R}_T \text{tr}[\mathbf{R}_T \mathbf{K}(n)]\} E[\mathbf{D}^{-1}(n)] \\ &\quad + 4\mu^2 E[\mathbf{D}^{-1}(n)] \mathbf{R}_T E[\mathbf{D}^{-1}(n)] e_{\min}. \end{aligned} \quad (13)$$

D. Limite Superior para o Passo de Adaptação

Para se determinar um limite superior para o passo de adaptação que assegure a estabilidade do algoritmo adaptativo, definem-se as seguintes matrizes: $\mathbf{C}(n) = \mathbf{Q}^T \mathbf{K}(n) \mathbf{Q}$ e $\mathbf{\Lambda}_T = \mathbf{Q}^T \mathbf{R}_T \mathbf{Q}$, onde $\mathbf{\Lambda}_T$ é a matriz diagonal que contém os autovalores de \mathbf{R}_T , denotados por λ_i ; e \mathbf{Q} é uma matriz ortogonal com os autovetores de \mathbf{R}_T . Assim, pode-se reescrever (13) como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(n+1) &= \mathbf{C}(n) - 2\mu \{\mathbf{C}(n) \mathbf{\Lambda}_T \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{\Lambda}_T \mathbf{C}(n)\} \\ &\quad + 4\mu^2 \mathbf{B} \{2\mathbf{\Lambda}_T \mathbf{C}(n) \mathbf{\Lambda}_T + \mathbf{\Lambda}_T \text{tr}[\mathbf{\Lambda}_T \mathbf{C}(n)]\} \mathbf{B} \\ &\quad + 4\mu^2 \mathbf{B} \mathbf{\Lambda}_T \mathbf{B} e_{\min}, \end{aligned} \quad (14)$$

onde $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^T E[\mathbf{D}^{-1}(n)] \mathbf{Q}$. De [13], tem-se que $c_{ij}^2(n) \leq c_{ii}(n) c_{jj}(n)$, com $c_{ij}(n)$ denotando os elementos da matriz $\mathbf{C}(n)$. Assim, pode-se estudar a convergência de (14), observando o comportamento dos elementos da diagonal de $\mathbf{C}(n)$. Para tal, definem-se os vetores $\mathbf{c}(n) = [c_{11}(n) \ c_{22}(n) \ c_{33}(n) \ \dots \ c_{NN}(n)]^T$ e $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}]^T$, permitindo obter a seguinte expressão:

$$\text{diag}\{\mathbf{B} \mathbf{\Lambda}_T \text{tr}[\mathbf{\Lambda}_T \mathbf{C}(n)] \mathbf{B}\} = \mathbf{B}^2 \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}(n). \quad (15)$$

Agora, pode-se escrever

$$\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{F} \mathbf{c}(n) + 4\mu^2 e_{\min} \mathbf{B}^2 \boldsymbol{\lambda}, \quad (16)$$

onde

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} - 4\mu \mathbf{B} \mathbf{\Lambda}_T + 8\mu^2 \mathbf{B}^2 \mathbf{\Lambda}_T^2 + 4\mu^2 \mathbf{B}^2 \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^T. \quad (17)$$

A condição necessária e suficiente para convergência de (16) depende da magnitude dos autovalores da matriz \mathbf{F} , que devem ser menor do que a unidade. Assim, pode-se forçar essa situação através de uma adequada seleção do parâmetro μ . Usando-se $\lambda'_j = b_j \lambda_j$ e seguindo o mesmo procedimento usado em [13], a magnitude dos autovalores de (17) pode ser limitada se o passo de adaptação μ satisfizer a seguinte condição:

$$0 < \mu \leq \frac{1}{3 \text{tr} \left\{ \frac{M}{(M-2)} [\text{diag}(\mathbf{R}_T)] - \epsilon \frac{M^2}{(M-2)(M-4)} [\text{diag}(\mathbf{R}_T)]^{-2} \right\} \mathbf{R}_T} \quad (18)$$

Uma aproximação de (18) pode ser obtida considerando $\epsilon \ll 1$. Assim,

$$0 < \mu \leq \frac{M-2}{3MN}. \quad (19)$$

A Figura 1 mostra a curva teórica obtida de (18) e os valores determinados experimentalmente. A Figura 1(a) apresenta os resultados para um sinal de entrada branco, transformação DCT, $\epsilon = 0,001$, $M = 12$, e $\sigma_x^2 = 1$. A Figura 1(b) mostra o caso para um sinal de entrada colorido, obtido passando o sinal de entrada branco ($\sigma_x^2 = 1$) por um processo de filtragem auto-regressivo (AR) de segunda ordem com coeficientes $a_1 = -0,1833$ e $a_2 = 0,85$. A transformação usada é a DCT, $\epsilon = 0,001$, $M = 36$. Através desta figura, verifica-se uma concordância muito boa entre os resultados obtidos via simulação numérica e os obtidos através da predição teórica.

E. Desajuste

Uma vez que $\text{tr}\{\mathbf{R}_T E[\mathbf{v}_T(n) \mathbf{v}_T^T(n)]\}$ envolve somente os termos da diagonal de (16), pode-se reescrever (12) como:

$$E[e^2(n)] = e_{\min} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}(n). \quad (20)$$

Assumindo-se a convergência do algoritmo, o EQM para o regime permanente é dado por:

$$E[e^2(\infty)] = e_{\min} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}(\infty), \quad (21)$$

e de (16), obtém-se

$$\mathbf{c}(\infty) = 4\mu^2 e_{\min} (\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{B}^2 \boldsymbol{\lambda}. \quad (22)$$

Em (21), o termo e_{\min} representa o erro mínimo e $\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}(\infty)$ denota o erro em excesso do algoritmo. Uma figura de mérito usual para se avaliar o desempenho de algoritmos adaptativos é o desajuste, que é definido por

$$\mathcal{M} = \frac{E[e^2(\infty)] - e_{\min}}{e_{\min}}. \quad (23)$$

Agora, substituindo-se (21) e (22) em (23), obtém-se

$$\mathcal{M} = 4\mu^2 \lambda^T (\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{B}^2 \lambda. \quad (24)$$

Novamente, de acordo com [13] e considerando $\lambda'_j = b_j \lambda_j$, pode-se escrever

$$\mathcal{M} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\mu b_i \lambda_i}{(1 - 2\mu b_i \lambda_i)}}{1 - \sum_{i=1}^N \frac{\mu b_i \lambda_i}{(1 - 2\mu b_i \lambda_i)}}. \quad (25)$$

A precisão de (25) é mostrada na Tabela 1 (Seção IV).

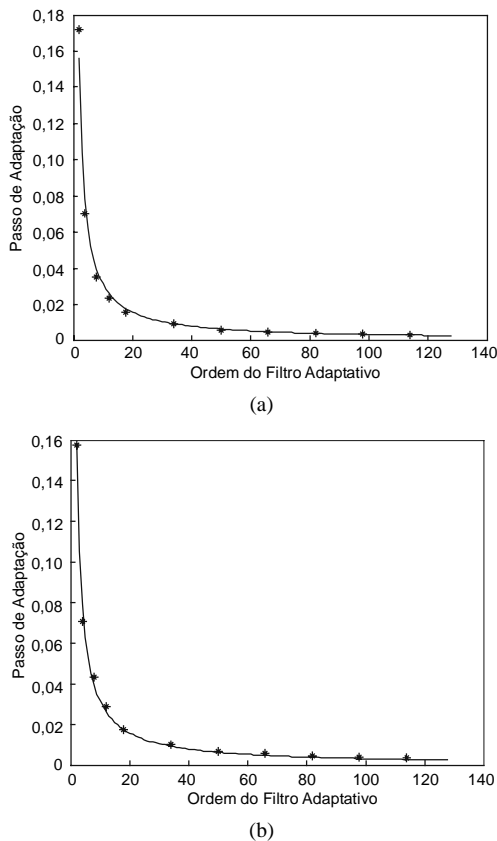


Fig. 1. Limite superior para o valor do passo de adaptação. (*) Resultados obtidos experimentalmente. (—) Resultados obtidos por (18). (a) Sinal de entrada branco (não-correlacionado). (b) Sinal de entrada colorido (correlacionado).

IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Para se avaliar a precisão do modelo proposto, alguns exemplos são apresentados, considerando um problema de identificação de sistema. Para tal, é utilizado um sinal de entrada correlacionado, obtido a partir de um processo auto-regressivo de segunda ordem AR(2), dado por:

$$x(n) = \alpha_1 x(n-1) + \alpha_2 x(n-2) + v(n), \quad (26)$$

onde $v(n)$ é um ruído branco com variância unitária, α_1 e α_2 são os coeficientes AR, com $\alpha_1 = -0,1833$ e $\alpha_2 = 0,85$. O ruído de medição $z(n)$ de média nula possui variância

$\sigma_z^2 = 10^{-4}$ (SNR = 40dB). A constante ϵ em (2) é igual a 0,001. As simulações Monte Carlo são obtidas considerando-se 500 realizações independentes.

Exemplo 1: As condições para este exemplo são: dispersão dos autovalores da matriz de autocorrelação igual a 81; $N = 8$ e $M = 32$; matriz de transformação DCT; coeficientes da planta obtidos de $\text{sinc}(i/8)$ com $i = 1, 2, \dots, 8$. O passo de adaptação máximo, obtido de (18), é $\mu_{\max} = 0,039$. A Figura 2 mostra as simulações Monte Carlo (MC) e as previsões teóricas obtidas por (9) e (12), fazendo-se uma comparação com as expressões do modelo apresentado em [9], para o passo de adaptação $0,1\mu_{\max}$. Nesta figura, pode-se verificar que os resultados obtidos via simulação MC e pelo modelo proposto neste trabalho apresentam uma melhor concordância, quando comparados aos resultados obtidos pelo modelo proposto em [9]. A Figura 3 agora compara o desempenho do modelo proposto, considerando-se dois valores para o passo de adaptação: $0,1\mu_{\max}$ e $0,5\mu_{\max}$.

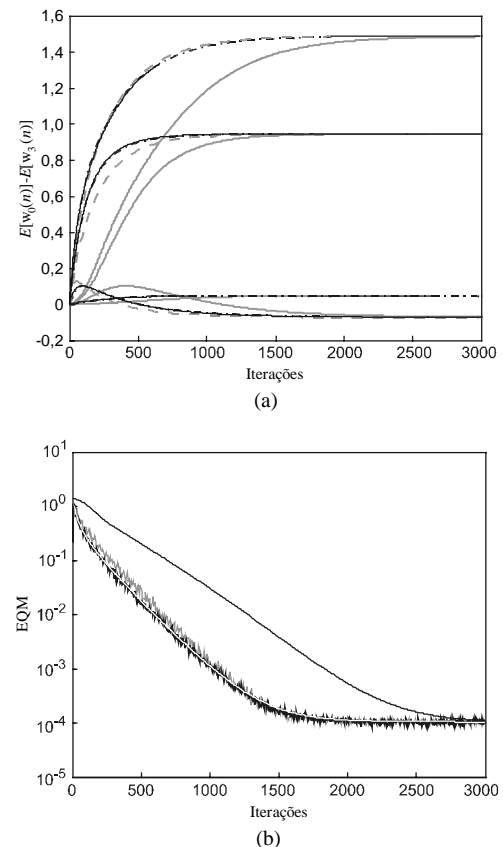
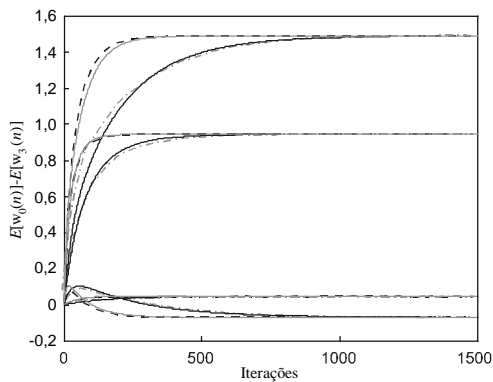
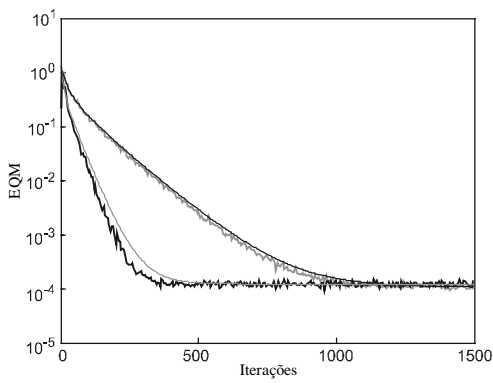


Fig. 2. Exemplo 1. (a) Evolução dos pesos $E[w_0(n)] - E[w_3(n)]$. (Linha tracejada cinza) simulação ref. [9]; (Linha contínua cinza) modelo ref. [9]; (Linha traço-ponto preta) nossa simulação; (Linha contínua preta) modelo proposto. (b) Curvas de EQM. (Linha irregular cinza) simulação ref. [9]; (Linha irregular preta) nossa simulação; (Linha contínua branca) modelo proposto.



(a)



(b)

Fig. 3. Exemplo 1. (a) Evolução dos pesos $E[w_0(n)] - E[w_3(n)]$. (Linha traço-ponto cinza) simulação para $0,1\mu_{max}$; (Linha contínua preta) modelo proposto para $0,1\mu_{max}$; (Linha tracejada preta) simulação para $0,5\mu_{max}$; (Linha contínua cinza) modelo proposto para $0,5\mu_{max}$. (b) Curvas de EQM. (Linha irregular cinza) simulação para $0,1\mu_{max}$; (Linha contínua preta) modelo proposto para $0,1\mu_{max}$; (Linha irregular preta) simulação para $0,5\mu_{max}$; (Linha contínua cinza) modelo proposto para $0,5\mu_{max}$.

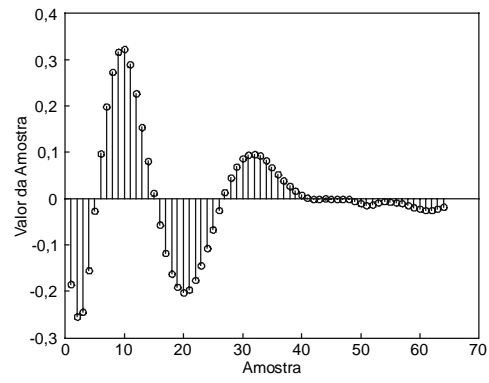
Exemplo 2: Para este caso, a planta utilizada é a mostrada na Figura 4(a). O sinal de entrada é correlacionado com dispersão dos autovalores igual a 931; $N = 64$ e $M = 64$. A matriz de transformação é a DCT e $\mu_{max} = 0,00504$. As Figuras 4(b) e 4(c) mostram os resultados de simulação MC e os obtidos do modelo proposto para passos de adaptação $0,1\mu_{max}$ e $0,5\mu_{max}$. Novamente, constata-se uma concordância muito boa entre as simulações e as respectivas previsões obtidas pelo modelo proposto.

Pode ser observado da Tabela 1 (obtida através dos Exemplos 1 e 2) que os valores de desajustes preditos por (25) e os obtidos experimentalmente, para diferentes valores de μ , são bastante satisfatórios.

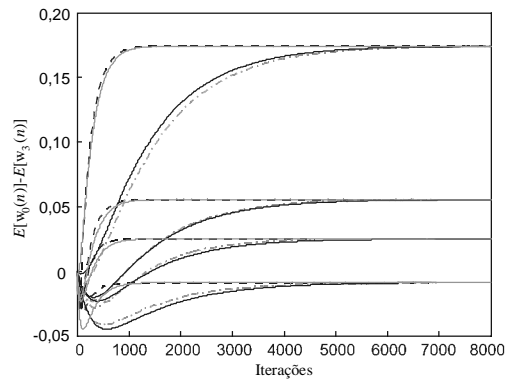
Após exaustivas sessões de simulação, observamos que o modelo proposto apresenta resultados satisfatórios para diferentes matrizes de transformação, ordens do filtro adaptativo e diferentes comprimentos de janela de observação M .

TABELA 1
VALORES DE DESAJUSTE CONSIDERANDO OS EXEMPLOS

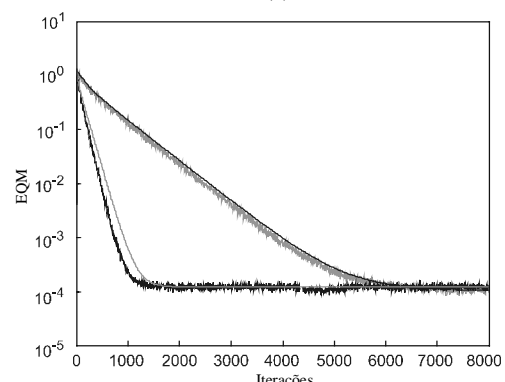
	Desajuste			
	Teórico		Experimental	
	$0,1\mu_{max}$	$0,5\mu_{max}$	$0,1\mu_{max}$	$0,5\mu_{max}$
Exemplo 1	0,03442	0,19962	0,03317	0,19659
Exemplo 2	0,03444	0,19973	0,03477	0,19975



(a)



(b)



(c)

Fig. 4. Exemplo 2. (a) Coeficientes da planta. (b) Evolução dos pesos $E[w_0(n)] - E[w_3(n)]$. (Linha traço-ponto cinza) simulação para $0,1\mu_{max}$; (Linha contínua preta) modelo proposto para $0,1\mu_{max}$; (Linha tracejada preta) simulação para $0,5\mu_{max}$; (Linha contínua cinza) modelo proposto para $0,5\mu_{max}$. (c) Curvas de EQM. (Linha irregular cinza) simulação para $0,1\mu_{max}$; (Linha contínua preta) modelo proposto para $0,1\mu_{max}$; (Linha irregular preta) simulação para $0,5\mu_{max}$; (Linha contínua cinza) modelo proposto para $0,5\mu_{max}$.

V. CONCLUSÕES

Este artigo apresenta uma análise estatística do algoritmo ϵ LMS no domínio transformado (TD- ϵ LMS). O algoritmo TD- ϵ LMS é uma versão melhorada do TD-LMS muito utilizada na prática, para o caso de sinais de entrada pouco persistentes. A análise é independente da ordem do filtro bem como da matriz transformação utilizada. Resultados de simulação confirmam a eficácia das previsões obtidas com o modelo proposto.

REFERÊNCIAS

- [1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 3ed. Englewood Cliffs, NJ. Ed. Prentice-Hall, 1996.
- [2] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive Filters: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, 1998.
- [3] B. Widrow and S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985.
- [4] S. S. Narayan, A. M. Peterson, and M. J. Narasimha, "Transform Domain LMS Algorithm," *IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Proc.*, 31 (3), 1983, pp. 609-615.
- [5] D. F. Marshall, W. K. Jenkins, and J. J. Murphy, "The Use of Orthogonal Transforms for Improving Performance of Adaptive Filters," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. 36, no. 4, Apr. 1989, pp. 474-484.
- [6] J. Lee and C. Un, "Performance of Transform-domain LMS Adaptive Digital Filters," *IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Processing*, vol. 34, Jun. 1986, pp. 499-510.
- [7] S. Hosur and A. H. Tewfik, "Wavelet Transform Domain Adaptive FIR Filtering," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, no. 3, Mar. 1997, pp. 617-630.
- [8] S. J. Chern, J. C. Horn, and K. M. Wong, "The Performance of the Hybrid LMS Adaptive Algorithm," *Elsevier Signal Processing*, 44, 1995, pp. 67-88.
- [9] D. I. Kim and P. De Wilde, "Performance Analysis of the DCT-LMS Adaptive Filtering Algorithm," *Elsevier Signal Processing*, 80, 2000, pp. 1629-1654.
- [10] E. M. Lobato, O. J. Tobias e R. Seara, "Análise Estatística do Algoritmo LMS no Domínio Transformado", *XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, CD-ROM, Rio de Janeiro, 2003.
- [11] C. G. Samson and U. Reddy, "Fixed Point Error Analysis of the Normalized Ladder Algorithm," *IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Processing*, vol. 31, no. 5, Oct. 1983, pp. 1177-1191.
- [12] A. Papoullis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 3ed., McGraw-Hill, 1991.
- [13] A. Feuer and E. Weinstein, "Convergence Analysis of LMS Filters with Uncorrelated Gaussian Data", *IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Processing*, vol. 33, no. 1, Feb. 1985, pp. 222-230.

APÊNDICE

O valor esperado de cada elemento de $\mathbf{D}^{-1}(n)$, após algumas manipulações e considerando $\epsilon^2 \ll 1$, é dado como segue:

$$E \left[\frac{1}{\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x_i^2(n-k) + \epsilon} \right] \approx E \left[\frac{1}{\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x_i^2(n-k)} \right] - \epsilon E \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x_i^2(n-k) \right)^2} \right] \quad (\text{A.1})$$

Assumindo-se que $x_i(n)$ seja uma variável aleatória com distribuição Gaussiana, média nula e variância σ_i^2 , a variável aleatória $z_i = x_i^2(n) + x_i^2(n-1) + \dots + x_i^2(n-M+1)$ terá distribuição de *qui*-quadrado com M graus de liberdade [12]. Os valores esperados dos dois termos do lado esquerdo de (A.1) são determinados da mesma maneira que em [10]. Assim, definindo-se uma nova variável aleatória $y_i = M / z_i$, resulta em

$$E[y_i] = \frac{M}{(M-2)\sigma_i^2}, \quad (\text{A.2})$$

similarmente,

$$E[y_i^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (M/z_i)^2 f_{z_i}(z_i) dz_i, \quad (\text{A.3})$$

onde $f_{z_i}(z_i)$ é a mesma função definida em [10]. Assim,

$$E[y_i^2] = \frac{M^2}{2^{M/2} \sigma_i^M \Gamma(M/2)} \int_0^{\infty} z_i^{(M/2)-3} e^{-z_i/2\sigma_i^2} dz_i. \quad (\text{A.4})$$

Fazendo-se $z_i' = \frac{z_i}{2\sigma_i^2}$, pode-se escrever (A.4) como:

$$E[y_i^2] = \frac{M^2}{4\sigma_i^4 \Gamma(M/2)} \int_0^{\infty} z_i'^{(M/2)-3} e^{-z_i'} dz_i'. \quad (\text{A.5})$$

Como: $\int_0^{\infty} z_i'^{(M/2)-3} e^{-z_i'} dz_i' = \Gamma[(M/2)-2]$, tem-se:

$$E[y_i^2] = \frac{M^2 \Gamma[(M/2)-2]}{4\sigma_i^4 \Gamma(M/2)}. \quad (\text{A.6})$$

Aplicando-se a propriedade $\Gamma(b+1) = b\Gamma(b)$ em (A.6), obtém-se

$$E[y_i^2] = \frac{M^2}{(M-2)(M-4)\sigma_i^4}, \quad (\text{A.7})$$

logo,

$$E[\mathbf{D}^{-1}(n)] = \frac{M}{(M-2)} [\text{diag}(\mathbf{R}_T)]^{-1} - \epsilon \frac{M^2}{(M-2)(M-4)} [\text{diag}(\mathbf{R}_T)]^{-2}. \quad (\text{A.8})$$