

# Análise de Desempenho do Algoritmo LMS na Identificação de Canais WSS-US: Transitório e Regime Estacionário

Juraci F. Galdino e Ernesto L. Pinto

**Resumo**—Este trabalho desenvolve uma análise do erro médio quadrático (EMQ) produzido pelo algoritmo *Least-Mean-Square* (LMS) na estimação de canais seletivos em frequência e variantes no tempo, utilizando-se a modelagem de canais WSS-US (*wide-sense stationary - uncorrelated scattering*). Considerando-se vários casos particulares de modelos de grande interesse no contexto de comunicações móveis obtém-se expressões analíticas simples para a variação do EMQ ao longo do tempo. Estas expressões analíticas são validadas através de comparação com estimativas empíricas de EMQ obtidas por simulação, considerando-se diversas configurações de parâmetros do sistema de transmissão e dos modelos de canal.

**Palavras-Chave**— Filtragem adaptativa, Comunicações móveis, LMS, receptores adaptativos, estimação de canal.

**Abstract**— An analysis of the mean square error (MSE) produced by the *Least-Mean-Square* (LMS) algorithm in the estimation of time-varying and frequency-selective fading channels is addressed in this work, on the basis of the WSS-US (*wide-sense stationary - uncorrelated scattering*) channel modeling. Analytical expressions of the MSE as a function of time are obtained for some specific WSS-US models of great interest in the context of mobile communications. Several numeric results are presented of comparison between analytical curves of MSE x time and their counterparts obtained by simulation, under different conditions of transmission system and channel model parameters. These results attest the effectiveness of the analysis here presented.

**Keywords**— Adaptive filtering, Mobile communications, LMS, adaptive receivers, channel estimation.

## I. INTRODUÇÃO

O algoritmo *Least-Mean-Square* (LMS) é reconhecidamente uma importante ferramenta no desenvolvimento de receptores adaptativos para sistemas de comunicações sobre canais seletivos em frequência e variantes no tempo, devido ao seu potencial para proporcionar um bom compromisso entre desempenho e complexidade computacional.

Este fato é particularmente verdadeiro no caso do desenvolvimento de receptores com critério de decisão de máxima verossimilhança de seqüências de símbolos, empregando o princípio do processamento por percurso sobrevivente (*Maximum-Likelihood Sequence Estimation using Per-Survivor Processing* MLSE/PSP) [1]. Neste caso, o receptor emprega um conjunto de filtros adaptativos para a realização simultânea de estimativas do canal associadas a diferentes seqüências de símbolos. A escolha adequada do algoritmo

de filtragem adaptativa e o ajuste de seus parâmetros são de crucial importância para o desempenho deste tipo de receptor e o fator complexidade tem um peso muito grande, por se tratar do uso simultâneo de vários estimadores.

Neste contexto, a investigação do emprego de um algoritmo do tipo LMS é de grande interesse, pelo seu baixo impacto sobre a complexidade do receptor. Por outro lado, em se tratando de canais variantes no tempo, ferramentas analíticas que permitam a escolha criteriosa do passo do algoritmo LMS sob diferentes condições de transmissão são de grande interesse para a otimização do receptor, além de poder servir de base para o desenvolvimento de variantes do algoritmo LMS mais especificamente talhadas para esta aplicação.

A investigação analítica do desempenho do algoritmo LMS é uma questão relevante que tem sido objeto de importantes trabalhos ao longo dos últimos anos [2, 3, 4, 5, 6]. No caso da aplicação deste algoritmo à estimação de canal, e mais especificamente em receptores MLSE/PSP, os autores produziram algumas contribuições anteriores [7, 8] em que se considerou modelos de canal do tipo *Wide Sense Stationary Channels-Uncorrelated Scattering* (WSS-US), tendo como foco principal a análise do erro médio quadrático (EMQ) em regime permanente.

No presente trabalho são apresentados novos resultados de análise de desempenho da estimação de canal empregando o algoritmo LMS. A maior inovação deste trabalho consiste em focar a variação do EMQ com o tempo, contemplando tanto o comportamento transitório quanto o valor residual do EMQ após a convergência do algoritmo. Novamente são abordados diversos modelos WSS-US de interesse no contexto de comunicações móveis, para os quais se obtém expressões analíticas relativamente simples do EMQ como função do tempo. Apresenta-se também um conjunto expressivo de resultados de simulação para validação destas expressões analíticas, considerando-se diferentes valores dos parâmetros do sistema de transmissão e dos modelos de canal.

O artigo está organizado em 5 seções. A Seção II delinea o problema de interesse e a modelagem empregada, além de rerepresentar um resultado analítico prévio utilizado como ponto de partida do presente trabalho. Na seção III apresenta-se os principais passos da análise de desempenho e as expressões de EMQ obtidas para os diferentes modelos de canal considerados. Na Seção IV são apresentados diversos resultados de comparação entre estimativas de EMQ obtidas por simulação e as suas contrapartidas analíticas produzidas a partir da análise aqui apresentada. Por fim, na Seção V são

sintetizadas as principais conclusões deste artigo e levantadas algumas propostas para a sua continuação.

## II. COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

A notação adotada neste trabalho é introduzida a seguir. Letras minúsculas em negrito representam vetores<sup>1</sup>. Os símbolos  $(\cdot)^*$  e  $(\cdot)'$  denotam respectivamente as operações Hermitiana e transposto do contido entre parênteses, e  $E[\cdot]$  indica o operador média probabilística.

O modelo simplificado do sistema em tempo discreto empregado para identificar os coeficientes da resposta ao impulso (RI) do canal de comunicação é ilustrado na Figura 1. A observação ruidosa no tempo  $n$  é<sup>2</sup>

$$d(n) = \mathbf{w}^*(n)\mathbf{s}(n) + v(n), \quad (1)$$

em que  $v(n)$  representa o ruído de observação, com variância  $\sigma_v^2$  e média nula,  $\mathbf{w}(n)$  é o vetor formado pelos pesos ou coeficientes da RI do canal, sendo dado por

$$\mathbf{w}(n) = (w_0(n), w_1(n), \dots, w_{L-1}(n))', \quad (2)$$

com  $L - 1$  denotando a memória do canal; e  $\mathbf{s}(n)$  é o vetor de entrada, dado por

$$\mathbf{s}(n) = (s(n), s(n-1), \dots, s(n-L+1))' \quad (3)$$

com  $s(m)$  representando o símbolo transmitido no  $m$ -ésimo intervalo de sinalização.

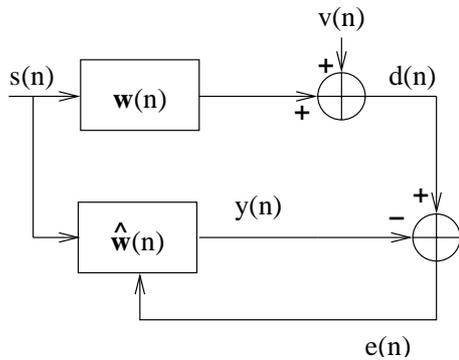


Fig. 1. Diagrama de blocos simplificado do sistema em tempo discreto empregado para identificar os coeficientes da RI do canal.

A estimativa de  $\mathbf{w}(\cdot)$  obtida pelo algoritmo LMS com passo de adaptação  $\mu$  no  $(n + 1)$ -ésimo intervalo de sinalização,  $\hat{\mathbf{w}}(n + 1, \mu)$ , é expressa por

$$\hat{\mathbf{w}}(n + 1, \mu) = \hat{\mathbf{w}}(n, \mu) + \mu \mathbf{s}(n) e^*(n, \mu), \quad (4)$$

na qual  $e(n, \mu)$  representa o erro de estimação dado por

$$e(n, \mu) = d(n) - y(n, \mu), \quad (5)$$

sendo

$$y(n, \mu) = \hat{\mathbf{w}}^*(n, \mu) \mathbf{s}(n). \quad (6)$$

<sup>1</sup>Os vetores são dispostos em coluna.

<sup>2</sup>Comete-se aqui um ligeiro abuso de notação, a bem da simplicidade. Na realidade  $n$  é adimensional e expressa um particular intervalo de símbolo. O tempo decorrido do início da transmissão até este intervalo de símbolo é  $nT$  segundos, sendo  $T$  a duração do símbolo.

Além da variância do erro supracitado, os algoritmos de filtragem costumam ser avaliados pelo Erro Médio Quadrático (EMQ) tomado entre  $\mathbf{w}(n)$  e  $\hat{\mathbf{w}}(n, \mu)$  [9, 10]. Essa medida estatística, cuja notação aqui adotada é  $D(n, \mu)$ , pode ser escrita como

$$D(n, \mu) = E[\boldsymbol{\epsilon}^*(n, \mu)\boldsymbol{\epsilon}(n, \mu)], \quad (7)$$

sendo

$$\boldsymbol{\epsilon}(n, \mu) = \mathbf{w}(n) - \hat{\mathbf{w}}(n, \mu) \quad (8)$$

o vetor erro, formado pelas diferenças entre as estimativas obtidas pelo algoritmo LMS e os parâmetros a serem estimados.

Considerando-se que a variação no tempo dos coeficientes da RI do canal é modelada por processos conjuntamente estacionários em sentido amplo; que o ruído é modelado por um processo estacionário em sentido amplo de média nula e densidade espectral de potência constante dentro da faixa espectral de interesse; que esse sinal ruidoso é estatisticamente independente de  $\{s(\cdot)\}$  e de  $\{\mathbf{w}(\cdot)\}$ ; que os símbolos  $\{s(\cdot)\}$  são igualmente prováveis, estatisticamente independentes, com variância  $\sigma_s^2$  e  $E[s(n)^k s^*(n)^l] = 0$  para quaisquer inteiros  $k$  e  $l$  com  $k + l$  ímpar<sup>3</sup>, e que  $\{\hat{\mathbf{w}}(\cdot)\}$  é um processo estocástico estatisticamente independente de  $\{s(\cdot)\}$ , mostrou-se em [7] que  $D(n, \mu)$  é dado por<sup>4</sup>

$$D(n + 1, \mu) = (1 - 2\mu\sigma_s^2 + \mu^2 L\sigma_s^4)D(n, \mu) + \mu^2\sigma_v^2\sigma_s^2 L + 2\mu\sigma_s^2\sigma_w^2 \sum_{l=0}^{\infty} (1 - \mu\sigma_s^2)^l [R(l) - R(l + 1)], \quad (9)$$

sendo  $\sigma_w^2$  o ganho de potência do canal (para canal normalizado  $\sigma_w^2 = 1$ ) e  $R(\tau)$  a função de correlação dos coeficientes da RI do canal. Cabe mencionar que o último termo do lado direito da Equação 9 é uma aproximação. O índice superior do somatório deste termo é  $n$  e não  $\infty$ , conforme apresentado na referida equação e na referência [7]. Essa aproximação simplifica a análise de transitório e, como será mostrado adiante, produz resultados bastante satisfatórios.

O objetivo do trabalho acima mencionado foi analisar o desempenho o LMS na identificação de canais WSS-US sob a condição de regime estacionário. Essa análise matemática contemplou a obtenção de passo ótimo, no sentido de reduzir o EMQ em regime estacionário, para alguns modelos de processo comumente empregados para descrever o comportamento estatístico da resposta ao impulso de canais de comunicação, tais como os processos de Jakes [11], autoregressivos e passeio aleatório [9]. Em [8], os autores voltaram a trabalhar novamente no tema de análise de desempenho do EMQ na condição de regime estacionário. Em particular, neste último trabalho, eles realizaram uma comparação de desempenho da análise matemática apresentada em [7] com o desempenho previsto por procedimentos convencionais e por análises mais elaboradas recentemente publicadas em [5] e [6]. Os resultados dessa comparação indicaram a maior precisão da análise apresentada em [7].

<sup>3</sup>As constelações MPSK e MQAM simétricas atendem essa condição.

<sup>4</sup>Cabe mencionar que em [7] considerou-se apenas constelações PSK. No entanto, a análise lá desenvolvida se aplica igualmente a constelações QAM.

O presente trabalho tem novo foco. Diferentemente de trabalhos anteriores dos mesmos autores, tem como principal objetivo a análise de toda a evolução temporal do EMQ produzido pelo algoritmo LMS na estimação de canais, lançando luz sobre o período transitório de variação do EMQ. São contemplados nesta análise diversos processos de interesse no contexto da modelagem de canais variantes no tempo em sistemas de comunicações móveis.

### III. ANÁLISE DO EMQ EM FUNÇÃO DO TEMPO

São adotadas aqui as mesmas suposições feitas nas análises apresentadas em [7] e sumarizadas acima.

O cálculo do EMQ dado na Equação 9 pode ser reapresentado da seguinte maneira

$$D(n+1, \mu) = A(\mu)D(n, \mu) + B(\mu), \quad (10)$$

sendo

$$A(\mu) = 1 - 2\mu\sigma_s^2 + \mu^2 L\sigma_s^4 \quad (11)$$

e

$$B(\mu) = \mu^2 \sigma_v^2 \sigma_s^2 L + 2\mu\sigma_s^2 \sigma_w^2 \sum_{l=0}^{\infty} (1 - \mu\sigma_s^2)^l [R(l) - R(l+1)]. \quad (12)$$

Utilizando a Equação 10, é fácil provar por indução que o EMQ pode ser dado em função do tempo por uma expressão da forma

$$D(n, \mu) = \left( \sigma_w^2 - \frac{B(\mu)}{1 - A(\mu)} \right) A^{n-1}(\mu) + \frac{B(\mu)}{1 - A(\mu)}, \quad (13)$$

na qual considerou-se  $D(0, \mu) = \sigma_w^2$ .

Cabe observar que o primeiro termo do lado direito da equação apresentada acima representa o transitório da curva de EMQ, pois para garantir a convergência do algoritmo é preciso que  $|A(\mu)| < 1$ . Sob esta condição, o segundo termo do lado direito da referida equação corresponde ao EMQ na condição de regime permanente.

Como pode ser verificado nas Equações 11 e 12, as expressões de  $A(\mu)$  e  $B(\mu)$  dependem de parâmetros típicos de um sistema de comunicações. No entanto, é importante destacar que  $A(\mu)$  independe da função autocorrelação que modela a estatística de evolução temporal dos coeficientes da RI do canal. De fato, esse parâmetro só afeta a expressão de  $B(\mu)$ .

O fato de que  $A(\mu)$  independe do formato da autocorrelação do canal, combinado com o fato de que este parâmetro contém condição suficiente para garantir a convergência do LMS para uma situação de EMQ de regime estacionário, constitui-se num resultado teórico significativo<sup>5</sup>. Uma consequência deste resultado é que numa particular aplicação o fator de passo do algoritmo LMS pode ser ajustado de modo a garantir a sua convergência mesmo sem um conhecimento muito preciso de parâmetros estatísticos de segunda ordem das variações do canal com o tempo. Isto é particularmente interessante no caso dos sistemas de comunicações móveis, onde frequentemente

<sup>5</sup>A demonstração de que a condição  $|A(\mu)| < 1$  é suficiente para garantir a convergência do algoritmo será reconsiderada em trabalho futuro, sem o uso da aproximação contida na equação 9

se utiliza o modelo de canal WSS-US e a modelagem de autocorrelação depende da velocidade da unidade móvel, e do ambiente físico em que estiver localizada.

A seguir são apresentadas expressões de  $B(\mu)$  para alguns modelos de espalhamento Doppler que são frequentemente adotados no âmbito das comunicações móveis. Nominalmente, são considerados o modelo de Jakes [11], o processo passeio aleatório e a classe de processos autoregressivos (AR) [9].

Para o modelo passeio aleatório tem-se que

$$R(l) - R(l+1) = \sigma_q^2, \quad (14)$$

sendo  $\sigma_q^2$  a variância associada ao ruído de geração do processo.

Substituindo-se a Equação 14 na Equação 12 e admitindo-se que  $|1 - \mu\sigma_s^2| < 1$  tem-se que

$$B(\mu) = \mu^2 \sigma_v^2 \sigma_s^2 L + 2\sigma_q^2 \sigma_w^2. \quad (15)$$

A função de autocorrelação referente ao modelo de Jakes é expressa por

$$R(l) = J_0(2\pi f_D T l), \quad (16)$$

em que  $J_0(\cdot)$  é a função de Bessel de primeira classe de ordem zero,  $f_D$  é o desvio Doppler máximo ou deslocamento Doppler máximo e  $T$  é o intervalo de símbolo. Considerando um equipamento de recepção se deslocando a uma velocidade  $v$  e que o comprimento de onda da frequência portadora é  $\lambda$ , então  $f_D = v/\lambda$  [11]. Assim sendo

$$B(\mu) = \mu^2 \sigma_v^2 \sigma_s^2 L + 2\mu\sigma_s^2 \sigma_w^2 \sum_{l=0}^{\infty} (1 - \mu\sigma_s^2)^l [J_0(2\pi f_D T l) - J_0(2\pi f_D T (l+1))].$$

Para um processo AR de ordem M assintoticamente estacionário em sentido amplo, aqui denotado por AR(M), após o transiente, tem-se

$$\sum_{k=0}^M a_k^* R(l-k) = 0 \quad l > 0 \quad (17)$$

e

$$R(m) = \sum_{k=1}^M c_k p_k^m, \quad (18)$$

em que  $\{a_k, k = 1, 2, \dots, M\}$  são conhecidos como parâmetros do processo AR,  $\{c_k, k = 1, 2, \dots, M\}$  são constantes e  $\{p_k, k = 1, 2, \dots, M\}$  são raízes da equação [9]<sup>6</sup>

$$1 + a_1^* z^{-1} + \dots + a_M^* z^{-M} = 0. \quad (19)$$

Substituindo a Equação 18 na Equação 12 e admitindo que

$$|(1 - \mu\sigma_s^2)p_k| < 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, M, \quad (20)$$

obtem-se

$$B(\mu) = \mu^2 \sigma_v^2 \sigma_s^2 L + 2\mu\sigma_s^2 \sigma_w^2 \sum_{k=1}^M \frac{1 - p_k}{1 - (1 - \mu\sigma_s^2)p_k}. \quad (21)$$

<sup>6</sup>Um processo AR(M) pode ser gerado aplicando ruído branco na entrada de um filtro digital cuja função de transferência possui apenas polos dados pelas raízes  $\{p_k\}$ . Por esta razão, essas raízes são geralmente denominadas de polos.

É importante lembrar que, para um processo AR assintoticamente estacionário,  $|p_k| < 1$  para todo  $k$  [9, pp. 97]. Além disso, em aplicações de comunicações móveis o passo do LMS geralmente assume valores pequenos. Portanto, a suposição expressa na Inequação 20 é bastante razoável, sendo geralmente atendida na prática.

#### IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção é apresentado e discutido um conjunto de resultados numéricos visando a validação da análise de desempenho do LMS apresentada na seção precedente. Esse conjunto de resultados contempla os três modelos de espalhamento Doppler considerados e diferentes combinações de seus parâmetros.

Em cada caso considerado, são apresentados resultados de curvas de EMQ oriundas da análise matemática que são confrontadas com estimativas dessas curvas. Essas estimativas foram obtidas por simulação de Monte Carlo através de uma média empírica de erros quadráticos levantados em 500 realizações independentes de todo o processo de transmissão, geração e estimação da RI do canal.

No que diz respeito ao sistema de comunicações, simulou-se a transmissão de símbolos QAM-64, independentes e identicamente distribuídos, através de um canal WSS-US com  $L$  raios de mesma variância (perfil de intensidade de múltiplos percursos plano). A relação sinal-ruído na entrada do receptor é medida em termos da razão entre a energia por símbolo ( $E_s$ ) e a densidade espectral de ruído AWGN na entrada do receptor ( $N_0$ ),  $E_s/N_0$ . Quanto ao fator de passo do algoritmo LMS, nos diferentes casos considerados foram utilizados valores ótimos, no sentido de minimização do EMQ em regime permanente, os quais foram calculados de acordo com os resultados analíticos apresentados em [8] e [7].

Na Fig. 2 são apresentados resultados obtidos considerando o espectro de Jakes (com  $f_D T = 0,001$ ) na modelagem da evolução temporal dos coeficientes da RI do canal, que neste caso é composta de três raios ( $L = 3$ ), e variando-se a RSR na entrada do receptor. Observa-se nesta figura como a redução da razão sinal ruído degrada o desempenho de EMQ do estimador de canal, produzindo aumento no tempo de convergência e no EMQ residual. Nota-se também um ajuste muito bom entre os resultados analíticos e de simulação, tanto na fase de transiente quanto nos valores estacionários do EMQ.

Os resultados apresentados na Fig. 3 foram obtidos considerando as mesmas condições de execução daqueles apresentados na figura anterior, exceto que neste caso fixou-se a RSR em 30 dB e variou-se o valor de  $f_D T$ . Esta figura mostra novamente que os resultados obtidos por análise e simulação são bastante próximos. No que diz respeito ao aumento do desvio Doppler máximo, observa-se o efeito esperado de aumento do EMQ, tanto no transitório quanto em regime estacionário.

Na Fig.4 são mostrados resultados obtidos considerando como modelo estatístico dos coeficientes do canal um processo AR(2) com parâmetros  $a_1 = -1,9999$  e  $a_2 = 0,99999$ , considerando-se RSR de 10, 20 e 30 dB. Observa-se também nesta figura que os resultados analíticos e de simulação são bastante próximos para este modelo de evolução do canal com

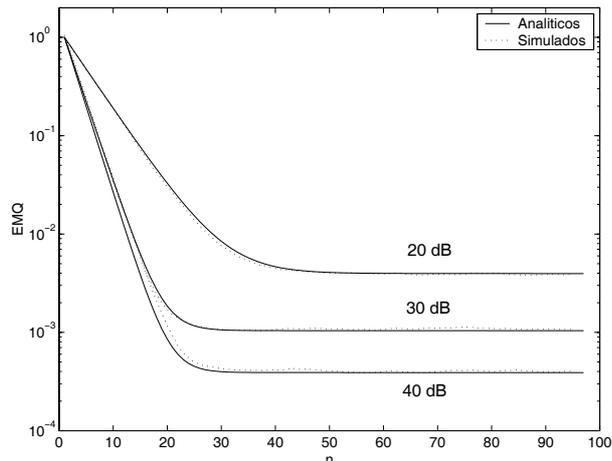


Fig. 2. Curvas de Erro Médio Quadrático para um processo de Jakes com  $f_D T = 0,001$  para RSR igual a 20, 30 e 40 dB.

o tempo, tanto para a fase transitória quanto para o EMQ de regime permanente. No que diz respeito à redução da RSR, observa-se um efeito menor sobre o tempo de convergência do que aquele verificado quando do emprego do modelo de Jakes, que é mostrado na Figura 2.

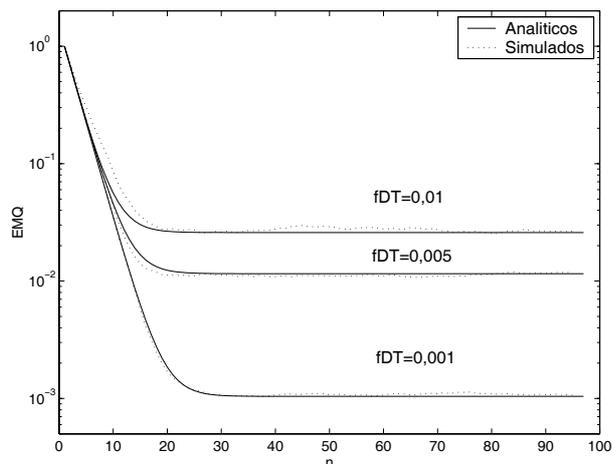


Fig. 3. Curvas de Erro Médio Quadrático para um processo de Jakes com RSR de 30 dB e  $f_D T = 0,001, 0,005$  e  $0,01$ .

Os resultados apresentados na Fig.5 foram obtidos variando-se a RSR na entrada do receptor e considerando um modelo da RI do canal com 3 coeficientes ( $L = 3$ ) cujas variações com o tempo são modeladas por processos AR(1) com parâmetro  $a_1 = -0,999$ . Também com este modelo de evolução do canal verifica-se uma proximidade muito grande entre os resultados de EMQ obtidos por análise e simulação, tanto na fase transitória quanto após a convergência. Quanto ao efeito de redução da EMQ observa-se a degradação esperada.

A Fig.6 foi obtida em condições similares às da Fig.5, exceto pelo fato de se ter fixado a RSR em 30 dB e se ter considerado diferentes valores da quantidade de raios  $L$ . Mais uma vez pode ser observada uma concordância muito boa entre os resultados de simulação e de análise. Com relação

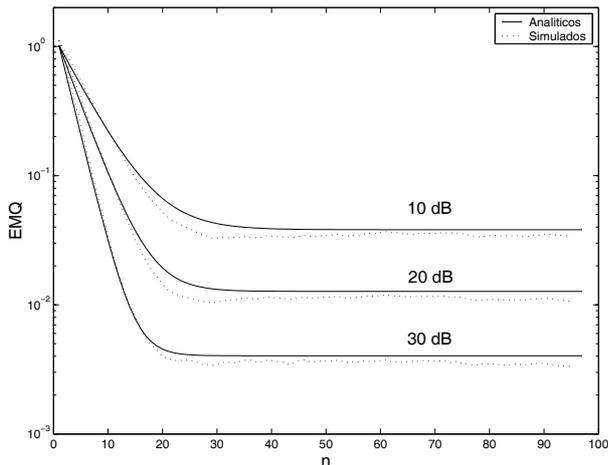


Fig. 4. Curvas de Erro Médio Quadrático para um processo de AR(2) e RSR igual a 20, 30 e 40 dB.

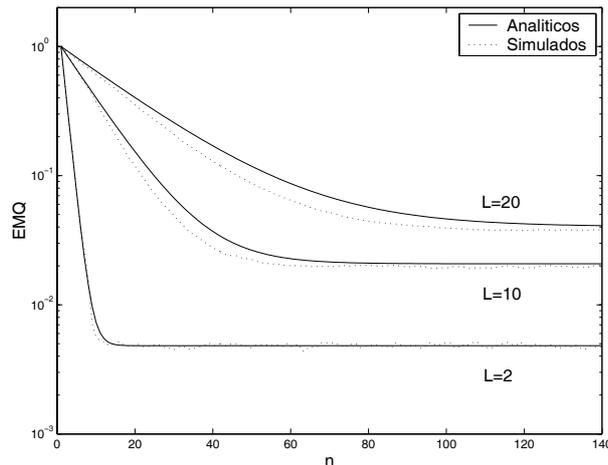


Fig. 6. Erro Médio Quadrático para um modelo de canal com processo AR(1) variando-se o valor de  $L$  com RSR de 30 dB.

ao aumento de  $L$  verifica-se uma degradação significativa de desempenho que se manifesta tanto pela menor velocidade de convergência quanto pelo aumento do EMQ residual (EMQ na condição de regime permanente). Nota-se que estes efeitos são particularmente acentuados com  $L = 20$

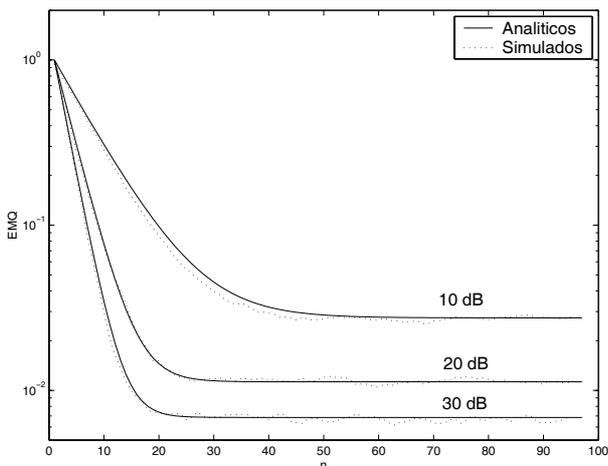


Fig. 5. Erro Médio Quadrático para um modelo de canal com  $L = 3$  e processo AR(1), variando-se a RSR.

Por fim, os resultados apresentados na Fig.7 foram obtidos nas mesmas condições de execução daqueles apresentados na Fig.2, a não ser pelo fato de considerar na modelagem estatística do canal um processo do tipo passeio aleatório com  $\sigma_q^2 = 1,6714 \times 10^{-6}$ . Para ter uma idéia do significado físico deste parâmetro, seu valor advém de

$$\sigma_q^2 = 1 - J_0(2\pi f_D T), \quad (22)$$

com  $f_D T = 10^{-4}$ .

A Fig.7 mostra mais uma vez a acentuada proximidade entre os resultados de análise e simulação. Nota-se nesta figura a degradação significativa de desempenho do estimador de canal quando a RSR é reduzida de 40 para 20 dB, que produz um aumento muito grande no EMQ residual e uma significativa

redução na velocidade de convergência. Comparando-se os resultados obtidos com RSR de 20 dB nas Figuras 2 e 7 nota-se neste último caso um aumento muito grande no tempo de convergência, bem como um aumento significativo no EMQ residual. Isto certamente ocorre pela maior dificuldade em se estimar o modelo passeio aleatório, que de fato não é estacionário.

Analisados em seu conjunto, os resultados aqui apresentados mostram a validade da análise de EMQ desenvolvida neste trabalho, tanto na fase transiente quanto após a convergência. Outras simulações computacionais foram realizadas alterando-se o número de símbolos da constelação QAM, utilizando-se constelações PSK e modificando-se o perfil de espalhamento de retardo. Também foram realizados diversos testes com escolhas arbitrárias do fator de passo do algoritmo LMS. Em todos os casos verificou-se mais uma vez perfeito ajuste entre os resultados analíticos e simulados. Trata-se portanto de uma abordagem analítica valiosa, a qual será explorada no futuro para o desenvolvimento de novas estratégias de emprego do algoritmo LMS em receptores adaptativos para canais seletivos em frequência e variantes no tempo.

## V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentou-se neste trabalho uma análise de EMQ do algoritmo LMS quando empregado para estimação de canais seletivos em frequência e variantes no tempo que seguem a modelagem estatística WSS-US. De maneira diferente de outros trabalhos anteriores dos autores, que focaram o desempenho na condição de regime permanente, neste artigo se considerou também a evolução inicial do EMQ.

Para vários modelos de canais variantes no tempo de grande interesse em cenários de comunicações, obteve-se expressões analíticas simples para a variação do EMQ ao longo do tempo, cuja validade, sob diversas configurações de parâmetros do sistema de comunicações e do modelo de canal empregado, foi atestada em diferentes experimentos de comparação com resultados empíricos obtidos por simulação computacional.

Na continuação deste trabalho os autores pretendem investigar o emprego da análise aqui desenvolvida na concepção de

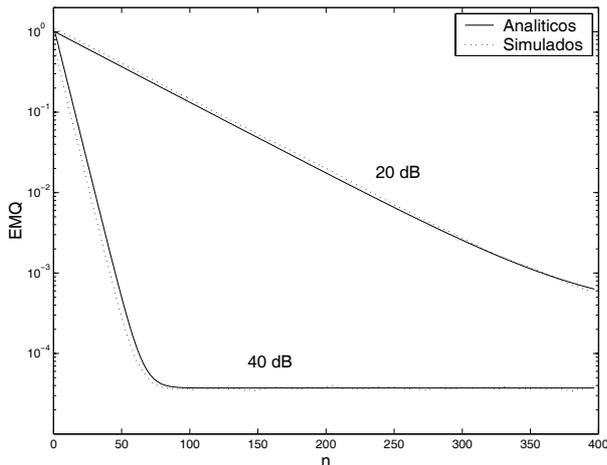


Fig. 7. Erro Médio Quadrático para um processo do tipo passeio aleatório variando-se a RSR.

novos receptores adaptativos baseados no algoritmo LMS. Em particular, pretende-se investir na busca de novos algoritmos LMS de passo adaptativo para emprego em receptores de alto desempenho diante de canais seletivos em frequência e variantes no tempo.

#### REFERÊNCIAS

- [1] R. Raheli, A. Polydoros and C. Tzou. "Per-Survivor Processing: A General Approach MLSE in Uncertain Environments". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 43, no. 2/3/4, pp. 354–364, February/March/April 1995.
- [2] E. Eweda. "Comparison of RLS, LMS and Sign Algorithms for Tracking Randomly Time-Varying Channels". *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 11, pp. 2937–2944, November 1994.
- [3] E. Eweda. "Convergence Analysis of Adaptive Filtering Algorithms with Singular Data Covariance Matrix". *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 2, pp. 334–343, February 2001.
- [4] N. R. Yousef and A. H. Sayed. "A Unified Approach to the Steady-State and Tracking Analyses of Adaptive Filters". *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 2, pp. 314–324, February 2001.
- [5] L. Lindbom, A. Ahlén, M. Sternad and M. Falkenstrom. "Tracking of Time-Varying Mobile Radio Channels - Part II: A Case Study". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, no. 1, pp. 156–167, January 2002.
- [6] L. Lindbom, M. Sternad and A. Ahlén. "Tracking of Time-Varying Mobile Radio Channels - Part I: The Wiener LMS Algorithm". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, no. 12, pp. 2207–2217, December 2001.
- [7] J. L. Galdino, E. L. Pinto and M. S. Alencar. "Desempenho do Algoritmo LMS na Identificação de Canais Variantes no Tempo e Seu Emprego em Esquemas de Recepção MLSE-PSP". *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*, vol. 18, no. 3, pp. 273–284, December 2003.
- [8] J. L. Galdino, E. L. Pinto and M. S. Alencar. "Analytical Performance of the LMS Algorithm on the Estimation of Wide Sense Stationary Channels". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 52, no. 6, pp. 982–993, Jun 2004.
- [9] S. Haykin. *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, 1991.
- [10] P. S. R. Diniz. *Adaptive Filtering Algorithms and Practical Implementation*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [11] J. D. Parsons. *The Mobile Radio Propagation Channel*. John Wiley, 1992.