Obtenção de Modos Complexos Através da Propagação de Feixes em Distância Imaginária

José P. da Silva e H. E. Hernández-Figueroa

Resumo — **Neste trabalho, o método dos elementos finitos em conjunto com o método da propagação de feixes (BPM), é aplicado para obtenção de modos complexos através da distância imaginária. Estes modos surgem, quando os meios apresentam perdas (ε complexo), ou em meios sem perdas, que se caracterizam por possibilitar a propagação de modos de fuga. Para esta situação o BPM é modificado com o propósito de compensar a atenuação do campo ao longo da direção de propagação.**

Palavras-chaves — **Elementos finitos, método da propagação de feixe (BPM), modos complexos e distância imaginária.**

I. INTRODUÇÃO

Durante as últimas décadas, um considerável esforço tem sido empenhado para simular de maneira eficiente e precisa a propagação de ondas eletromagnéticas ao longo de guias de onda ópticos. Uma das técnicas mais usadas é o método da propagação de feixes (BPM-*Beam Propagation Method*). Entre os métodos numéricos usados para analisar a seção transversal de guias de onda discretizados, ele é um dos mais estáveis e apresenta uma performance superior quando usado em conjunto com método dos elementos finitos (FE-BPM). Recentemente, alguns trabalhos publicados na literatura, [1]-[2], exploraram a propagação de feixes ópticos através da distância imaginária usando formulações baseadas no método dos elementos para meios isotrópicos. Neste trabalho a formulação vetorial apresentada por *Da Silva at al* [3], baseada no método dos elementos finitos em conjunto com métodos da propagação de feixes (BPM), é aplicada para obtenção de modos complexos através da distância imaginária. Neste caso, faz-se necessário uma modificação no Método BPM [3], tal que a atenuação, ao longo da direção de propagação, seja compensada. Os modos complexos surgem quando os meios apresentam perdas (ε complexo), ou em meios sem perdas, quando considera-se um perfil de índice refração como o mostrado da Fig. 1 [4]. Este Perfil caracteriza-se por apresentar uma depressão entre a camada de GaAs (região de guiamento) e o substrato, a qual é característica para estes tipos de guias e provoca a presença de modos guiados com autovalores complexos, chamados de modos de fuga.

patroc@ceset.unicamp.br, Tels. +55-19-34047166, Fax. +55-19-34047292. Centro Superior de Ensino Tecnológico, Divisão de Telecomunicações, UNICAMP. Rua. P. Marmo, 1888, CEP: 13484-370, Jar. Nova Itália, Limeira–SP. hugo@dmo.fee.unicamp.br, Tel +55-19-34047139, Dep. de Microondas e Ópica –Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação -UNICAMP, Campinas – SP.

II. FORMULAÇÃO

Partindo das equações de Maxwell, a equação de duplo rotacional de Helmholtz para o campo magnético é obtida,

$$\nabla \times \left(\overline{\overline{k}} \nabla \times \vec{H}\right) - k_0^2 \vec{H} = 0 \tag{1}$$

onde $\overline{\overline{k}} = 1/\overline{\overline{\varepsilon}}$, sendo $\overline{\overline{\varepsilon}}$ o tensor permissividade relativa. Em adição, k_0 é o número de onda no espaço livre e ∇ é definido como,

$$\nabla = \hat{u}_x \alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{u}_y \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{u}_z \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_T + \hat{u}_z \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{2}$$

onde, α_x, α_y, e α_z, são parâmetros da PML. Considerando que as ondas sejam assumidas para se propagarem na direção z, o parâmetro α_z é sempre igual à unidade, Os demais parâmetros da PML podem ser determinados de tal forma que a impedância de onda possa ser contínua através das interfaces formada entre o domínio computacional interno e a PML, isso permite o casamento perfeito da onda sobre suas interfaces, permitindo a redução do domínio computacional sem causar reflexões. De acordo com [3] os parâmetros da PML são especificados pelo parâmetro S dado por, $S = 1 - j(3c/2\omega_0 nd)(\rho/d)^2 \ln(1/R)$ onde ω_0 é a freqüência angular, d é a espessura da PML, n é o índice de refração do meio adjacente, ρ é distância da região com PML's a interface interna do domínio computacional e R é coeficiente de reflexão. A seguir, a variação rápida do campo magnético é removida escrevendo, $\vec{H}(x,y,z) = \vec{h}(x,y,z) e^{-jk_0\beta_z z}$, onde β_z é a constante de propagação de referência e $\vec{h}(x,y,z) = \vec{h}_T(x,y,z) + \vec{h}_z(x,y,z)$ é porção de variação lenta do campo magnético. Onde, $\vec{h}_T = h_x \hat{u}_x + h_y \hat{u}_y$ e $\vec{h}_z = h_z \hat{u}_z$ representam a componente de campo magnético transversal (lento) e a componente axial, respectivamente. Em adição, usando a condição de divergente do campo, $\nabla \cdot \vec{H} = 0$, o qual, permite escrever, $h_z = (\nabla_T \cdot h_T + \partial h_z / \partial z)/\gamma$, onde, $\gamma = jk_0 \beta_z$, depois de algumas manipulações algébricas, o campo axial em (1) pode ser efetivamente eliminado, obtendo-se a equação onda vetorial em termos da componente transversa (lenta) do campo magnético , dada por:

$$\overline{\overline{k}}_a \frac{\partial^2 \vec{h}_T}{\partial z^2} - 2\gamma \overline{\overline{k}}_a \frac{\partial \vec{h}_T}{\partial z} - \overline{\overline{k}}_b \nabla_T \left(\nabla_T \cdot \vec{h}_T\right) - \nabla_T \times k_{zz} \nabla_T \times \vec{h}_T + \left(\overline{\overline{k}}_c + \gamma^2 \overline{\overline{k}}_a\right) \vec{h}_T = 0 \tag{3}$$

Os tensores transversais em (3) são definidos [3]. A seguir, aplicando o método dos elementos finitos para variação transversal de (3), o domínio da seção transversal Ω é dividido em *Nel* triângulos, produzindo *Np* nós desconhecidos. Introduzindo um arranjo de funções de base (polinomiais lagrangianas de primeira ou segunda ordem), $\{\psi_j\}$, j= 1,..., *Np*; $\vec{h}_T(x,y,z)$ Essa expansão, a qual define o já conhecido processo de discretização *FE*, leva a um problema matricial do tipo,

$$[M]\frac{\partial^2\{\vec{h}_T\}}{\partial z^2} - 2\gamma[M]\frac{\partial\{\vec{h}_T\}}{\partial z} + ([K]+\gamma^2[M])\{\vec{h}_T\} = \{0\} \tag{4}$$

onde $\{\vec{h}_T\}$ representa um vetor coluna contendo valores desconhecidos de h_{xj} e h_{yj}, $\{0\}$ é um vetor coluna nulo, e $[M]$ e $[K]$ são matrizes globais definidas em [3].

Seguindo [5], a aproximação de Padé (1,1), pode ser facilmente aplicada em (4), obtendo-se uma equação matricial, dada por:

$$[\widetilde{M}]\frac{d\{\vec{h}_t\}}{dz} + [K]\{\vec{h}_t\} = \{0\} \tag{5}$$

com, $[\widetilde{M}] = [M] - (1/4\gamma^2)([K]+\gamma^2[M])$. Finalmente, aplicando o esquema de avanço de diferenças finitas (θ) em (5) pode-se escrever:

$$([\widetilde{M}] + \theta\Delta z[K])\{\vec{h}_T\}(z+\Delta z) = ([\widetilde{M}] - (1-\theta)\Delta z[K])\{\vec{h}_T\}(z) \tag{6}$$

onde, Δz é o tamanho do passo de propagação e θ é introduzido para o controle de estabilidade do método. A faixa de estabilidade para o algoritmo de propagação corresponde a $0.5 \le \theta \le 1$. Para $\theta = 0.5$ tem-se o algoritmo de Crank-Nicholson.

Para adaptar a formulação descrita acima, ao esquema de propagação através da distância imaginária, assumimos que existem *m* modos no guia de onda. Desta forma, podemos considerar que o índice de refração efetivo do *k*-ésimo autovalor é $n_{ef,k}$, que o campo correspondente é $\{f_k\}$ e que a equação para o autovalor pode ser escrita da seguinte forma [2]:

$$[K]\{f_k\} = k_0^2 n_{ef,k}^2 [M(z)]\{f_k\} \tag{7}$$

Após vários passos de propagação, de (6) tira-se que a distribuição de campo do *k*-ésimo autovalor pode ser obtida por [6]:

$$\{f_k\}_{i+1} = \frac{[\widetilde{M}(z)] + \theta\Delta z k_0^2(n_{ef,k}^2 - n_0^2)}{[\widetilde{M}(z) - (1-\theta)\Delta z k_0^2(n_{ef,k}^2 - n_0^2)]}\{f_k\}_i \tag{8}$$

Quando *m* autovalores, incluindo os modos de radiação, existem em um guia de onda, o campo $\{\vec{h}_T\}_i$, para o i-ésimo passo de propagação, pode ser expresso por:

$$\{\vec{h}_T\}_i = \sum_{k=1}^{m} A_{k,i}\{f_i\} \tag{9}$$

onde $A_{k,i}$ representa a amplitude complexa do *k*-ésimo autovalor para o i-ésimo passo de propagação.

A propagação de modos com autovalores complexos, considerando $\Delta z \in \Re$, provocará uma atenuação do modo propagante ao longo da direção de propagação, o que impossibilitaria a obtenção dos modos de fuga. Para resolver este problema, é necessário considerar que $\Delta z \notin \Re$ e, de acordo com análise feita em [6], o passo de propagação pode ser dado por:

$$\Delta z = j\frac{4n_0}{(n_{ef,k}^2 - n_0^2)k_0^2} \tag{10}$$

Desta forma, para um dado número de passos de propagação, *i*, suficientemente grande, $\{\vec{h}_T\}$ converge para o *k*-ésimo autovalor $\{f_k\}$[3]. O índice efetivo deste autovalor, $n_{ef,k}$, é atualizado a cada passo de propagação através da seguinte equação [6]:

$$n_0^2(z) = \mathrm{Re}\left[\frac{\{\vec{h}_T(z)\}_i^{\dagger}[K(z)]_i\{\vec{h}_T(z)\}_i}{k_0^2\{\vec{h}_T(z)\}_i^{\dagger}[M(z)]_i\{\vec{h}_T(z)\}_i}\right] \tag{11}$$

Onde † representa o complexo conjugado e transposto.

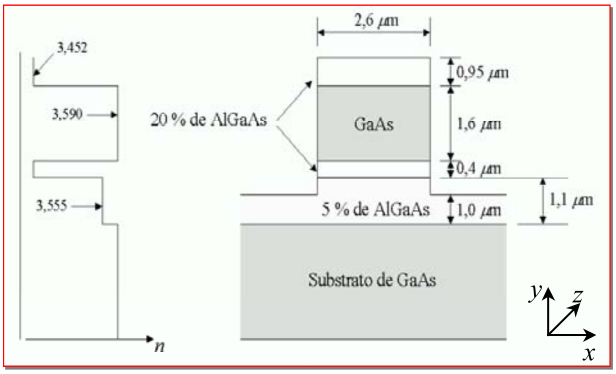

Fig. 1. Perfil de índice de refração e seção transversal de um guia de onda vazante.

III. RESULTADOS

Neste trabalho, consideramos que o índice de refração desejado é desconhecido no início da propagação. Desta forma, para determinar o passo inicial de propagação Δz, o maior índice de refração da região de guiamento foi tomado como aproximação inicial. Após alguns cálculos interativos, usando este Δz, calculamos a diferença entre o passo do índice efetivo atual e o do passo anterior; quando essa diferença ficou da ordem de 10^{-3}, usou-se o $n_{ef,k}$ para o cálculo de Δz.

O valor do índice de refração de referência, n_0, pode ser escolhido de forma arbitrária. Nesta simulação, usou-se o menor valor dos índices de refração presentes na estrutura; com esta escolha, a propagação ocorrerá pra uma distância imaginária positiva [2]. A estrutura analisada é um guia vazante 2D, Fig. 1. Os índices de refração considerados foram 3, 452 para 20% AlGaAs, 3,555 para 5% AlGaAs e

3,590 para o GaAs, operando em um comprimento de onda λ = 1,064 μm, A estrutura está imersa em uma região com índice de refração igual a unidade (ar) rodeada por PMLs com 1 μm de espessura e coeficiente de reflexão da ordem de 10^{-5}. A janela computacional considerada foi de 15 μm (direção x) x 5 μm (direção y), coberta por 8.431 elementos lineares. Para acelerar o processo de convergência substituiu-se, na análise modal [1], o índice de refração do substrato por 5% de AlGaAs. Com isso, o campo propagado foi aquele proveniente da análise modal, propagando-se na estrutura com índices mostrados na Fig. 1. As Fig. 2, Fig 3 e Fig. 4, mostram as distribuições de campo para componente h_y, para os modos H_{11}^y, H_{12}^y e H_{13}^y, respectivamente.

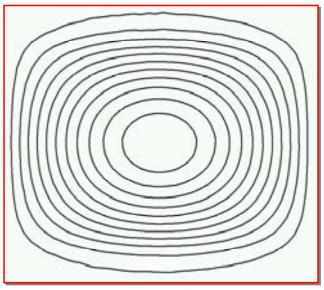

Fig. 2. Distribuição de campo magnético, componente y, para o modo H_{11}^y.

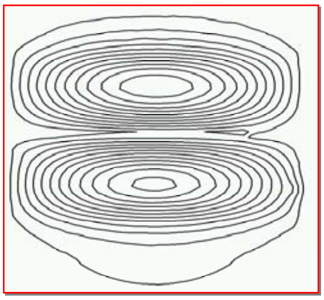

Fig. 3. Distribuição de campo magnético, componente y, para o modo H_{12}^y

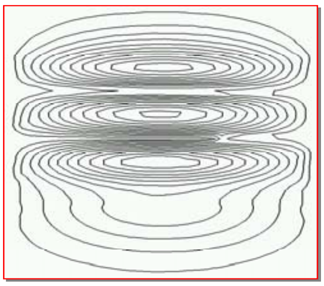

Fig. 4. Distribuição de campo magnético, componente y, para o modo H_{13}^y

A tabela I apresenta uma comparação entre os resultados obtidos neste trabalho e os resultados apresentados nas referências [2] e [3]. Observa-se que os valores da parte imaginária, obtidos neste trabalho, diferenciam de aproximadamente 5 % com relação aos valores da literatura [3]. Isso ocorre devido à parte imaginária do modo complexo ser muito sensível, principalmente ao ajuste dada malha.

TABELA I
COMPARAÇÃO DE RESULTADOS ENTRE, ESTE TRABALHO (FE-DI-VBPM) E RESULTADOS MOSTRADOS NAS REF. [1] E [2].

Modo	FE-DI-VBPM	Ref. [1]	Ref. [2]
H_{11}^y	$(3{,}574312 - j1{,}593 \times 10^{-7})$	$(3{,}573733 - j1{,}692 \times 10^{-7})$	$(3{,}573795 - j1{,}712 \times 10^{-7})$
H_{12}^y	$(3{,}543312 - j5{,}393 \times 10^{-5})$	$(3{,}54067 - j5{,}739 \times 10^{-5})$	$(3{,}543225 - j5{,}569 \times 10^{-5})$
H_{13}^y	$(3{,}500212 - j9{,}301 \times 10^{-4})$	$(3{,}493831 - j9{,}179 \times 10^{-4})$	$(3{,}494256 - j8{,}831 \times 10^{-4})$

IV. CONCLUSÕES

Neste trabalho, o método dos elementos finitos em conjunto com o método da propagação de feixe (BPM), foi aplicado na obtenção de modos complexos através da distância imaginária. O guia de onda utilizado foi do tipo vazante 2D, na qual o perfil de índice de refração do guia favorece o surgimento de modos de fuga. Os resultados obtidos foram comparados aos resultados da literatura, apresentando uma boa concordância.

REFERÊNCIAS

[1] S. S. A. Obayya, B. M. A. Rahman, K. T. V. Grattan e H. A. El-Mikati, "Full vectorial finite-element based umaginary distance beam propagation solution of complex modes in optical waveguides", *Journal Lightwave Technology*, Vol. 20, No. 6, pp.1054-1060, Junho 2002.

[2] S. Selleri, L. Vincetti, A. Cicinota e D. M. Zoboli, "Complex FEM modal solver of optical waveguides with PML boundary conditions", *Opt. Quantum Electron*, vol. 33, pp. 339-371, 2001.

[3] J. P. da Silva, H. E. Hernández-Figueroa and A. M. F. Frasson "Improved Vectorial Finite-Element BPM Analysis for Transverse Anisotropic Media", IEEE *Journal Lightwave Technology*, Vol. 21, No. 02, pp. 567-576, February 2003.

[4] H. E. Hernández-Figueroa, F. A. Fernández, Y. Lu e J. B. Davies, "Vectorial finite element modeling of 2D leaky waveguides", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, No. 4, pp.1710-1713, Maio. 1995.

[5] G. R. Hadley, "Wide-angle beam propagation using Padé approximation method", *Optics Letters*, Vol. 17, No. 10, pp. 1426-1428, October 1992.

[6] Y. Tsuji a M. Kosiba., "Guided-mode and Leaky-mode analysis by imaginary distance beam propagation method on finite element scheme", *IEEE Journal of Lightwave Technology*, vol. 18, pp. 618-623, Abril. 2000.