

Análise de Desempenho de Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes Provenientes de Tesselações $\{p, q\}$ em Espaços Bidimensionais com Curvatura Constante

Rodrigo G. Cavalcante e Reginaldo Palazzo Jr.

Resumo—Neste trabalho analisamos o desempenho de constelações de sinais geometricamente uniformes provenientes de tesselações $\{p, q\}$ em espaços bidimensionais com curvatura seccional constante, K . Verificamos que as constelações de sinais em espaços com $K < 0$ apresentam os melhores desempenhos em termos da probabilidade de erro quando comparadas com as constelações de sinais em espaços com $K \geq 0$. Além disso, definimos uma medida de energia normalizada de uma tesselação, que auxiliará na análise de desempenho das constelações de sinais nos diferentes espaços com curvatura seccional constante.

Palavras-Chave—Constelação de Sinais, Reticulados, Espaços de Curvatura Seccional Constante, Densidade de Empacotamento, Probabilidade de Erro Média.

Abstract—In this paper we realize the performance analysis of geometrically uniform signal constellations generated by tessellations $\{p, q\}$ in bi-dimensional spaces with constant sectional curvature, K . It is shown that signal constellations in spaces with $K < 0$ have better performance than the ones with $K \geq 0$. Furthermore, we define a measure related to the normalized average energy of a lattice which has been relevant to the purpose of the performance analysis of signal constellations in spaces with K constant.

Keywords—Signal constellations, lattices, spaces with constant sectional curvature, packing density, symbol error probability.

I. INTRODUÇÃO

Neste trabalho concentramos nossos esforços na análise de desempenho de constelações de sinais em espaços com curvatura constante. Uma das principais motivações é o fato da curvatura seccional de um espaço poder ser usado como parâmetro na análise de desempenho de constelações de sinais. Este fato pode ser constatado nas referências [1] e [2], para o caso particular de constelações de sinais em espaços hiperbólicos, e nas referências [9], [10] e [11] para o caso das constelações de sinais em variedades riemannianas, com ênfase especial nas superfícies mínimas, e nos espaços com curvatura seccional constante.

Nos trabalhos mencionados anteriormente, podemos verificar que a curvatura é um parâmetro relevante na análise de desempenho, pois foi possível construir constelações de sinais em espaços de curvatura constante negativa com menor probabilidade de erro quando comparadas com constelações de

sinais similares em espaços euclidianos (curvatura seccional nula). Portanto, surge a necessidade de propor, no contexto de teoria de comunicações, a construção e a análise de desempenho de novas constelações de sinais para o correspondente sistema de comunicações. Para tanto, neste trabalho utilizaremos a teoria dos reticulados, alguns conceitos de geometria riemanniana e de processos estocásticos para auxiliar na construção e análise dessas constelações de sinais.

O interesse pela teoria dos reticulados, no contexto de sistemas de comunicações digitais, foi estimulado pela sua conexão com a teoria dos números e os códigos corretores de erros. Neste caso, devemos ressaltar que a teoria dos reticulados demonstrou ser uma ferramenta de grande importância para o problema de empacotamento de esferas, auxiliando na construção de boas constelações de sinais ou códigos ótimos dentro do contexto dos trabalhos de Nyquist e Shannon. Para os leitores que desejam uma abordagem completa sobre a teoria dos reticulados e do problema de empacotamento de esferas no espaço euclidiano n -dimensional recomendamos a referência [5].

O objetivo deste trabalho é analisar o desempenho de constelações de sinais derivadas de tesselações $\{p, q\}$ em espaços com curvatura constante. Esses espaços são os mais simples de serem estudados e têm a importante propriedade de possuírem um número suficientemente grande de isometrias locais. Isto significa que é sempre possível “deslocar” isometricamente dois triângulos pequenos colocados em posições diferentes e verificar que podem ser sobrepostos.

Devido ao grande número de simetrias existente nos espaços de curvatura constante é sempre possível construir um recobrimento (ladrilhamento ou tesselação) dos mesmos. Tal recobrimento induz, de maneira natural, constelações de sinais geometricamente uniformes, [6], formadas pelos baricentros das regiões fundamentais (região de Voronoi). À região fundamental está associado o correspondente grupo de simetrias. Portanto, nesses espaços é sempre possível construir constelações de sinais com espectro de distância independente do sinal considerado e regiões de decisão congruentes, isto é, constelações geometricamente uniformes.

As tesselações $\{p, q\}$ são caracterizadas por polígonos regulares de p lados, sendo que cada vértice é recoberto por q desses polígonos. Como exemplo, considere o reticulado $\{6, 3\}$ que recobre o plano euclidiano por hexágonos cujos vértices são recobertos por três hexágonos, veja Figura 1. Para

Departamento de Telemática, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Unicamp, Brasil, E-mails: rgc@dt.fee.unicamp.br, palazzo@dt.fee.unicamp.br. Este trabalho foi financiado pela FAPESP, CNPQ e CAPES.

uma abordagem complementar sobre as tesselações $\{p, q\}$ em espaços com curvatura constante, referimos o leitor para [7] e [9].

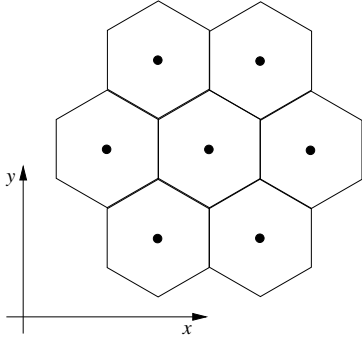


Fig. 1. Recobrimento de \mathbb{R}^2 pela tesselação $\{6, 3\}$.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, apresentamos uma breve revisão dos principais conceitos sobre reticulados, empacotamento de esferas e geometria riemanniana necessários aos propósitos deste trabalho. Na Seção 3, exibimos os fundamentos para a realização da análise de desempenho de constelações de sinais provenientes de tesselações $\{p, q\}$. Para isso, iremos introduzir o conceito de energia média normalizada da constelação bem como mostramos que o desempenho do sistema de comunicações utilizando constelações de sinais em espaços com curvatura negativa é melhor do que o desempenho apresentado por esta mesma constelação de sinais no plano euclidiano. Finalmente, na Seção 4, as conclusões são apresentadas.

II. TESSELAÇÕES EM ESPAÇOS COM CURVATURA CONSTANTE

Nesta seção iremos considerar a construção de reticulados em espaços com curvatura seccional, K , constante, a saber: a esfera unitária \mathbb{S}^2 , com $K > 0$; o plano euclidiano \mathbb{R}^2 , com $K = 0$; e o plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , com $K < 0$.

É importante mencionar que os espaços \mathbb{S}^2 e \mathbb{H}^2 possuem uma estrutura geométrica diferente da euclidiana. Isto significa, por exemplo, que a menor distância entre quaisquer dois pontos é obtida pelo comprimento de uma curva denominada *geodésica*. Esse e outros conceitos sobre os espaços com curvatura constante são apresentados em [3], [4] e [12].

Devido às características geométricas das constelações de sinais provenientes das tesselações $\{p, q\}$ aqui tratados, iremos fazer uso do sistema de coordenadas polares geodésicas (ρ, θ) , para facilitar tanto o entendimento como o desenvolvimento algébrico das expressões que caracterizam o reticulado.

Nos espaços com K constante, os coeficientes $g_{11}(\rho, \theta)$, $g_{12}(\rho, \theta) = g_{21}(\rho, \theta)$ e $g_{22}(\rho, \theta)$ da métrica Riemanniana, $d = \det(G)$, onde G é uma matriz 2×2 , deve satisfazer as seguintes condições: $g_{11}(\rho, \theta) = 1$, $g_{12}(\rho, \theta) = g_{21}(\rho, \theta) = 0$, $\lim_{\rho \rightarrow 0} g_{22}(\rho, \theta) = 0$ e $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{g_{22}(\rho, \theta)}}{\partial \rho} = 1$. No sistema de coordenadas polares (ρ, θ) , $g_{22}(\rho, \theta)$ é solução da seguinte equação

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \sqrt{g_{22}} + K \sqrt{g_{22}} = 0.$$

Para K constante, as soluções são dadas por

$$g_{22} = \begin{cases} \rho^2, & \text{if } K = 0, \\ \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K}\rho), & \text{if } K > 0, \\ -\frac{1}{K} \sinh^2(\sqrt{-K}\rho), & \text{if } K < 0. \end{cases}$$

Dessa forma, a distância geodésica entre quaisquer dois pontos $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ é dada por

$$d_{\mathbb{R}} = |z_1 - z_2|, \quad (1)$$

onde $||$ denota módulo de um número complexo e $z_i = r_i e^{j\theta_i}$, $i = 1, 2$.

Na esfera unitária \mathbb{S}^2 , a distância geodésica entre quaisquer dois pontos $z_1, z_2 \in \mathbb{S}^2$ é dada por

$$d_{\mathbb{S}} = \frac{2\pi l}{\sqrt{K}} \pm \frac{1}{j\sqrt{K}} \ln \frac{|1 + z_1 \bar{z}_2| + j|z_1 - z_2|}{|1 + z_1 \bar{z}_2| - j|z_1 - z_2|}, \quad (2)$$

onde l é número de vezes que a geodésica passa pelo ponto z_1 ou pelo seu antípoda, até chegar ao ponto z_2 , $z_i = r_i e^{j\theta_i}$ e $r_i = -j(e^{j\rho_i \sqrt{K}} - 1)/(e^{j\rho_i \sqrt{K}} + 1)$, $i = 1, 2$.

Finalmente, a distância geodésica entre quaisquer dois pontos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ é dada por

$$d_{\mathbb{H}} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \ln \frac{|1 - z_1 \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}, \quad (3)$$

onde $z_i = r_i e^{j\theta_i}$ e $r_i = (e^{\rho_i \sqrt{-K}} - 1)/(e^{\rho_i \sqrt{-K}} + 1)$, $i = 1, 2$.

Através do Teorema de Gauss-Bonnet, [3], e de [9], podemos verificar que as tesselações $\{p, q\}$ em \mathbb{S}^2 , \mathbb{R}^2 e \mathbb{H}^2 satisfazem as seguintes equações

$$\begin{cases} (p-2)(q-2) < 4, & \text{se } K > 0, \\ (p-2)(q-2) = 4, & \text{se } K = 0, \\ (p-2)(q-2) > 4, & \text{se } K < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Como exemplo, considere a tesselação $\{3, 4\}$ na esfera unitária \mathbb{S}^2 com curvatura $K = 1$. Podemos visualizar a tesselação $\{3, 4\}$ na esfera unitária e notar que os sinais são os vértices de um cubo e as regiões fundamentais são as faces de um octaedro, veja Figura 2. Note que toda tesselação $\{p, q\}$ tem uma tesselação dual $\{q, p\}$. Logo os vértices da tesselação $\{p, q\}$ constituem os baricentros da tesselação dual $\{q, p\}$ e vice-versa.

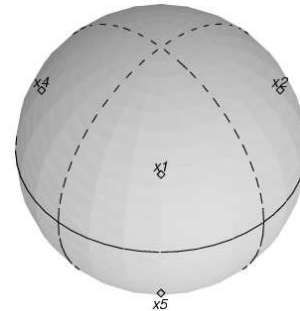


Fig. 2. Visualização da tesselação $\{3, 4\}$ na esfera unitária.

A correspondente tesselação $\{3, 4\}$ em coordenadas polares geodésicas é como mostrada na Figura 3. Note que devemos tesselar a superfície esférica por triângulos regulares (regiões de Voronoi) cujos vértices possuem quatro vizinhos. Note também que os lados dos triângulos são formados pelas geodésicas nesta superfície, e por esse motivo a região de Voronoi do sinal é também conhecida como *triângulo geodésico*.

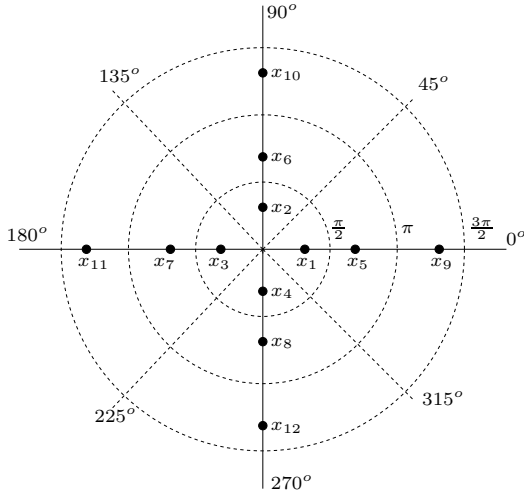


Fig. 3. Tesselação $\{3, 4\}$ em \mathbb{S}^2 com coordenadas polares geodésicas e com $K = 1$.

Dessa forma, através da equação (4) podemos encontrar todas as tesselações em \mathbb{S}^2 e verificar que as mesmas são formadas pelos sólidos Platônicos em \mathbb{R}^3 , veja Tabela I.

$\{p, q\}$	Número de Regiões	Poliedro
$\{3, 3\}$	4	tetraedro
$\{3, 4\}$	8	octaedro
$\{3, 5\}$	20	icosaedro
$\{4, 3\}$	6	cubo
$\{5, 3\}$	12	dodecaedro

TABELA I

RECOBRIMENTOS DA ESFERA POR POLÍGONOS REGULARES.

Neste ponto convém introduzir alguns parâmetros relevantes na construção e análise das tesselações $\{p, q\}$ em espaços com curvatura constante. Para tanto, considere uma região fundamental representada por um polígono regular de p lados como mostrado na Figura 4. Nesta situação, os ângulos α e β devem valer $2\pi/p$ e π/q , respectivamente, enquanto que os raios externo (ρ_l) e interno (ρ_p) deverão ser obtidos através das equações (1), (2) e (3) e dos correspondentes valores de α e β . A determinação dos valores de ρ_l e ρ_p implica na utilização dos mesmos no cálculo da densidade de empacotamento, da energia média, da probabilidade de erro, etc.

Para o caso particular do plano euclidiano, temos que ρ_l pode assumir qualquer valor positivo. Em outras palavras, podemos construir as tesselações euclidianas $\{4, 4\}$, $\{3, 6\}$ e $\{6, 3\}$ para qualquer valor positivo de ρ_l , uma vez que a propriedade de similaridade (homotetia) é válida.

Contudo, quando da construção de tesselações em \mathbb{S}^2 e \mathbb{H}^2 verificamos que para valores fixados de p, q e K , existe apenas um único valor de ρ_l , isto por que em \mathbb{S}^2 e \mathbb{H}^2 a medida de

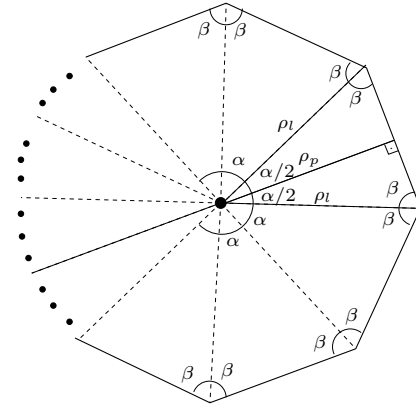


Fig. 4. Região fundamental de uma tesselação $\{p, q\}$.

distância está associada a ângulos (transformação conforme). Portanto, em \mathbb{S}^2 , ρ_l é dado por

$$\rho_l = \frac{1}{j\sqrt{K}} \ln \frac{1 + jr_l}{1 - jr_l}, \quad (5)$$

onde

$$r_l = \sqrt{\frac{\cos^2(\alpha/2) - \sin(\beta) \sin(\alpha + \beta)}{\sin^2(\beta) - \cos^2(\alpha/2)}}.$$

No plano hiperbólico, o valor de ρ_l é dado por

$$\rho_l = \frac{1}{\sqrt{-K}} \ln \frac{1 + r_l}{1 - r_l}, \quad (6)$$

onde

$$r_l = \sqrt{\frac{\sin^2(\alpha/2) + \cos(\beta) \cos(\alpha + \beta)}{\cos^2(\beta) - \sin^2(\alpha/2)}}.$$

O valor do raio interno (ou de empacotamento), ρ_p , pode ser facilmente obtido utilizando a regra do seno em \mathbb{S}^2 , \mathbb{R}^2 e \mathbb{H}^2 , conduzindo a

$$\rho_p = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \arcsin(\sin(\rho_l \sqrt{K}) \sin(\beta)), & \text{se } K > 0, \\ \rho_l \sin(\beta), & \text{se } K = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{arcsinh}(\sinh(\rho_l \sqrt{-K}) \sin(\beta)), & \text{se } K < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Uma outra medida importante, para o desenvolvimento deste trabalho, é a área de um disco de raio ρ , denotado por $A_d(\rho)$, em \mathbb{S}^2 , \mathbb{R}^2 e \mathbb{H}^2 . Através do Teorema de Gauss-Bonnet concluímos que

$$A_d(\rho) = \begin{cases} \frac{4\pi}{K} \sin^2\left(\frac{\rho\sqrt{K}}{2}\right), & \text{se } K > 0, \\ \pi\rho^2, & \text{se } K = 0, \\ -\frac{4\pi}{K} \sinh^2\left(\frac{\rho\sqrt{-K}}{2}\right), & \text{se } K < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Como mostrado em [9], a área, A_l , da região fundamental de uma tesselação $\{p, q\}$ em um espaço com K constante, é dada por

$$A_l = \begin{cases} \pi \frac{4-(p-2)(q-2)}{qK}, & \text{se } K \neq 0, \\ p\rho_p^2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), & \text{se } K = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Conhecendo os valores dos raios ρ_l e ρ_p e das áreas A_d e A_l podemos definir Δ , a densidade de empacotamento da tesselação, e Θ , a densidade de empacotamento da tesselação dual (com superposição de esferas), veja [5], como sendo

$$\Delta = \frac{A_d(\rho_p)}{A_l} \quad \text{e} \quad \Theta = \frac{A_d(\rho_l)}{A_l}. \quad (10)$$

Os valores das densidades Δ e Θ das tesselações $\{p, q\}$ são mostradas nas Tabelas II e III. Note que o valor da densidade de uma tesselação no plano hiperbólico, por exemplo, não depende da curvatura valer -1 ou -10 e que a tesselação mais densa é a $\{\infty, 3\}$.

Δ	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=6$	$q=7$	$q=8$	\dots	$q=\infty$
$p=3$	0.8453	0.7340	0.6583	0.6046	0.5649	0.5344	\dots	0.3094
$p=4$	0.8787	0.7854	0.7206	0.6742	0.6397	0.6131	\dots	0.4142
$p=5$	0.8961	0.8120	0.7528	0.7101	0.6781	0.6535	\dots	0.4675
$p=6$	0.9069	0.8284	0.7725	0.7321	0.7017	0.6782	\dots	0.5000
$p=7$	0.9143	0.8396	0.7860	0.7470	0.7177	0.6950	\dots	0.5219
$p=8$	0.9197	0.8478	0.7958	0.7578	0.7293	0.7071	\dots	0.5377
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots
$p=\infty$	0.9549	0.9003	0.8584	0.8270	0.8030	0.7842	\dots	0.6366

TABELA II

 VALORES DA DENSIDADE Δ PARA UMA TESSELAÇÃO $\{p, q\}$.

Θ	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=6$	$q=7$	$q=8$	\dots	$q=\infty$
$p=3$	1.3333	1.6906	2.0535	2.4184	2.7843	3.1508	\dots	∞
$p=4$	1.2679	1.5708	1.8819	2.1962	2.5119	2.8284	\dots	∞
$p=5$	1.2321	1.5055	1.7889	2.0759	2.3648	2.6547	\dots	∞
$p=6$	1.2092	1.4641	1.7300	2.0000	2.2721	2.5452	\dots	∞
$p=7$	1.1933	1.4354	1.6892	1.9475	2.2080	2.4696	\dots	∞
$p=8$	1.1815	1.4142	1.6592	1.9089	2.1609	2.4142	\dots	∞
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots
$p=\infty$	1.1027	1.2733	1.4604	1.6540	1.8508	2.0493	\dots	∞

TABELA III

 VALORES DA DENSIDADE Θ PARA UMA TESSELAÇÃO $\{p, q\}$.

III. ANÁLISE DE DESEMPENHO

Iremos considerar como medida de desempenho, quando da comparação das constelações de sinais, a probabilidade de erro média, P_e . Assumiremos que o ruído no canal de transmissão é gaussiano e que os sinais são equiprováveis. Conseqüentemente, a demodulação será a de máxima verossimilhança, veja [8].

Como mostrado em [9], através do uso de coordenadas polares geodésicas, a função densidade de probabilidade gaussiana em \mathbb{R}^2 , \mathbb{H}^2 e \mathbb{S}^2 é dada por

1) Para $K = 0$, temos

$$p_{\mathbb{R}}(\rho, \theta) = k_1 e^{-k_2 \rho^2},$$

onde $k_1 = k_2/\pi$ e a energia do ruído é dada por $N = 1/k_2$.

2) Para $K < 0$, temos

$$p_{\mathbb{H}}(\rho, \theta) = \frac{k_1}{\sqrt{-K}} e^{-k_2 \rho^2} \sinh(\sqrt{-K} \rho),$$

com

$$k_1 = \frac{\pi^{-3/2} e^{K/4k_2} \sqrt{-Kk_2}}{\operatorname{erf}(\sqrt{-K}/2\sqrt{k_2})},$$

onde $\operatorname{erf}(z)$ denota a função erro, definida para todo $z \in \mathbb{C}$ como

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-w^2} dw.$$

Neste caso, a energia do ruído é dada por

$$N = \frac{2\sqrt{-Kk_2} e^{K/4k_2} + \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-K}/4k_2)(2k_2 - K)}{4k_2^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-K}/4k_2)}.$$

3) Para $K > 0$, temos

$$p_{\mathbb{S}}(\rho, \theta) = \frac{k_1}{\sqrt{K}} e^{-k_2 \rho^2} |\sin(\sqrt{K} \rho)|,$$

com

$$k_1 = \frac{\sqrt{K}}{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} (-1)^i e^{-k_2 \rho^2} \sin(\sqrt{K} \rho) d\rho \right)^{-1}.$$

Assim, para $k_2 \gg K$, temos que k_1 pode ser aproximada por

$$k_1 \approx \frac{i\pi^{-3/2} e^{K/4k_2} \sqrt{Kk_2}}{\operatorname{erf}(i\sqrt{K}/2\sqrt{k_2})}.$$

Conseqüentemente, a energia do ruído é dada por

$$N \approx \frac{2i\sqrt{Kk_2} e^{K/4k_2} + \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(i\sqrt{K}/4k_2)(2k_2 - K)}{4k_2^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(i\sqrt{K}/4k_2)}.$$

Um outro parâmetro bastante importante é a relação sinal-ruído SNR . Contudo, para usarmos esse parâmetro devemos conhecer a energia média da constelação, S , porém uma tesselação vista como uma constelação sinais possui infinitos sinais e, conseqüentemente, possui energia média infinita.

Neste caso, poderíamos tentar analisar o desempenho das constelações de sinais através da determinação das probabilidades de erros condicionais associadas às correspondentes regiões fundamentais de cada tesselação considerando um mesmo valor de ρ_l (metade da distância mínima da constelação de sinais) e uma mesma energia do ruído N .

Assim, a Figura 5 exibe a probabilidade de erro média das regiões fundamentais das tesselações euclidianas $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ e $\{6, 3\}$ em função da distância mínima ($d_{min} = 2\rho_l$) das constelações, para $N = 1$.

Note na Figura 5 que a região fundamental da tesselação $\{3, 6\}$ apresenta o menor valor da probabilidade de erro. Este fato pode ser melhor entendido ao analisar a Figura 6, pois verificamos que a região fundamental da tesselação $\{3, 6\}$ é a “maior” e, por esse motivo, a probabilidade de acerto é

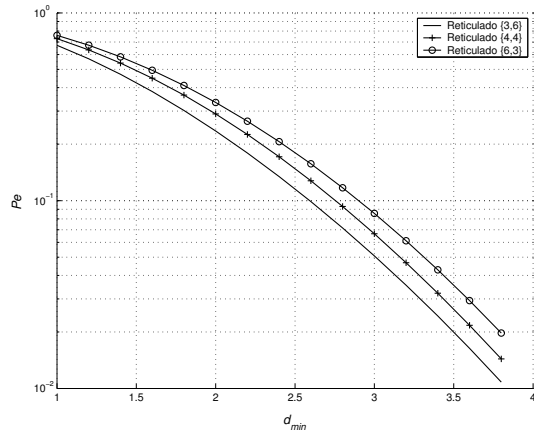


Fig. 5. Probabilidade de erro versus distância mínima das tesselações $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ e $\{6, 3\}$, para $N = 1$.

maior (maior região de integração), uma vez que cada uma dessas regiões está sob uma mesma função densidade de probabilidade.

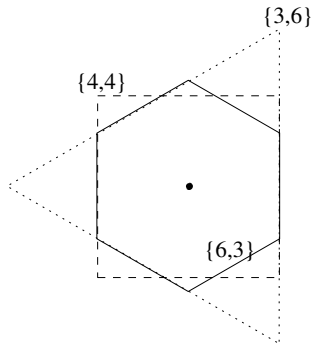


Fig. 6. Regiões fundamentais das tesselações $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ e $\{6, 3\}$, para um mesmo valor de ρ_1 .

Entretanto, o procedimento de análise de desempenho apresentado nas Figuras 5 e 6 não está completo, pois a tesselação $\{3, 6\}$ possui a menor densidade de empacotamento dentre as três tesselações. Isto é, duas constelações de sinais, usando aproximadamente a mesma quantidade de sinais, provenientes das tesselações $\{3, 6\}$ e $\{6, 3\}$ não têm a mesma energia média. Deve estar claro que a constelação proveniente da tesselação $\{6, 3\}$ tem menor energia, pois apresenta a maior densidade de empacotamento Δ . Portanto, para poder comparar os desempenhos das constelações de sinais de maneira mais eficiente iremos calcular as probabilidades de erro das regiões fundamentais das tesselações $\{p, q\}$ considerando que as constelações de sinais tenham aproximadamente a mesma quantidade de sinais e um mesmo valor de N .

Para isso, se faz necessário definir a energia média normalizada de uma constelação de sinais proveniente de uma tesselação $\{p, q\}$.

Inicialmente, considere a densidade de empacotamento Δ de um reticulado no \mathbb{R}^n dada por

$$\Delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \sum_{m \leq r^2} M_m, \quad (11)$$

onde $\rho = \rho_l$ é o raio de empacotamento e M_m é o número de sinais com energia igual a m , veja [5].

Agora, se considerarmos constelações de sinais com cardinalidades altas, podemos aproximar (11) por

$$\Delta \simeq \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \sum_{m \leq r^2} M_m \Rightarrow r^2 = \frac{\rho^2}{\Delta} \sum_{m \leq r^2} M_m. \quad (12)$$

Note que para uma esfera de raio r , $\sum_{m \leq r^2} M_m$ denota o número total de sinais. Conseqüentemente, a energia total é dada por $\sum_{m \leq r^2} m M_m$. Portanto, a energia média é dada por

$$E = \frac{\sum_{m \leq r^2} m M_m}{\sum_{m \leq r^2} M_m} \leq r^2 \frac{\sum_{m \leq r^2} M_m}{\sum_{m \leq r^2} M_m} = r^2, \quad (13)$$

onde utilizamos r^2 como o limitante máximo para cada m .

Portanto, se considerarmos duas constelações de sinais provenientes de tesselações com densidades Δ_1 e Δ_2 , raios de empacotamentos ρ_1 e ρ_2 e números de sinais aproximadamente iguais

$$\sum_{m \leq r_1^2} M_m^1 \simeq \sum_{m \leq r_2^2} M_m^2, \quad (14)$$

podemos usar (12), (13) e (14) para determinar a seguinte relação

$$\frac{E_1}{E_2} \leq \frac{\Delta_2 \rho_1^2}{\Delta_1 \rho_2^2}. \quad (15)$$

A inequação (15) indica o máximo ganho de energia que uma constelação de sinais pode alcançar usando uma tesselação com densidade Δ_1 ao invés da tesselação com densidade Δ_2 . Esta inequação também é importante no sentido de que podemos definir uma energia média normalizada de uma tesselação em relação a uma outra, um conceito que se mostrou muito útil neste trabalho.

A Figura 7 apresenta um exemplo da aplicação da inequação (15) para as tesselações euclidianas com energia normalizada em relação à tesselação $\{4, 4\}$ com $\rho_1 = \rho_2 = d_{min}/2$, $\Delta_1 = 0.7854$ e $N_1 = 1$. Neste caso, consideramos $N_2 = \Delta_1 N_1 / \Delta_2$.

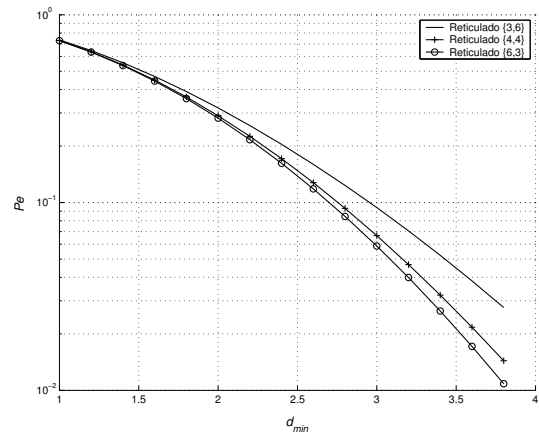


Fig. 7. Probabilidade de erro versus distância mínima das tesselações $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ e $\{6, 3\}$, para uma energia normalizada em relação à tesselação $\{4, 4\}$.

Analisando a Figura 7 podemos constatar que a tesselação mais densa atingiu o melhor desempenho em termos da probabilidade de erro. Este resultado é consistente e motiva a aplicação da inequação (15) na análise de desempenho a ser realizada a seguir.

$10^2 \times Pe$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$	$q = 6$	$q = 7$	$q = 8$	$q = 9$
$p = 3$	0.7318	1.0872	1.5170	1.9618	2.3947	2.8036	3.1841
$p = 4$	0.6909	0.9334	1.2193	1.5066	1.7791	2.0312	2.2617
$p = 5$	0.6764	0.8738	1.1047	1.3342	1.5497	1.7474	1.9269
$p = 6$	0.6702	0.8442	1.0468	1.2469	1.4340	1.6048	1.7594
$p = 7$	0.6673	0.8275	1.0131	1.1958	1.3660	1.5210	1.6610
$p = 8$	0.6661	0.8174	0.9918	1.1630	1.3222	1.4670	1.5974
$p = 9$	0.6657	0.8109	0.9776	1.1408	1.2923	1.4299	1.5538

TABELA IV

VALORES DA PROBABILIDADE DE ERRO MÉDIA, Pe , PARA UMA TESSELAÇÃO $\{p, q\}$ COM ENERGIA NORMALIZADA EM RELAÇÃO À TESSELAÇÃO $\{4, 4\}$, $\rho_1 = 2$ E $N_1 = 1$.

Analisando a Tabela IV e a Figura 8 podemos constatar que as tesselações mais densas e pertencente aos espaços de curvatura negativa apresentam o melhor desempenho em termos da probabilidade de erro. Este resultado reproduz os casos conhecidos em \mathbb{R}^2 e vai além no sentido de confirmar que a curvatura do espaço desempenha um papel importante no projeto e na análise de desempenho das constelações de sinais e, conseqüentemente, dos sistemas de comunicações digitais.

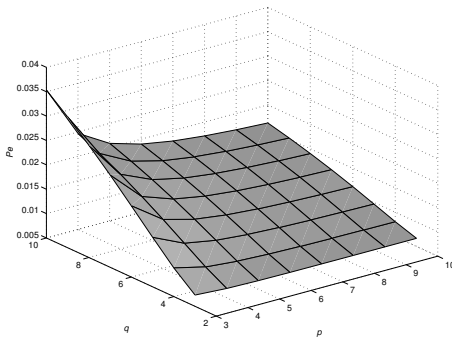


Fig. 8. Probabilidade de erro média, Pe , para uma tesselação $\{p, q\}$, veja Tabela IV.

Na Figura 9 calculamos a variação da probabilidade de erro média, em função de d_{min} , das constelações de sinais provenientes das tesselações $\{5, 3\}$, $\{4, 4\}$ e $\{9, 3\}$ com energia média normalizada pela tesselação $\{4, 4\}$, $N_1 = 1$ e $\rho_1 = 1$. Como era de se esperar, a tesselação $\{9, 3\}$ apresenta a menor probabilidade de erro.

Segundo [10], quanto menor a curvatura seccional do espaço menor também é a probabilidade de erro de uma constelação M-PSK. Contudo, neste trabalho podemos verificar que a probabilidade de erro não depende, por exemplo, da curvatura valer $K = -1$ ou $K = -10$, mas sim do fato da curvatura ser negativa. Isto se deve ao fato de que se aumentarmos a distância por uma constante c , a curvatura será multiplicada por $1/c$.

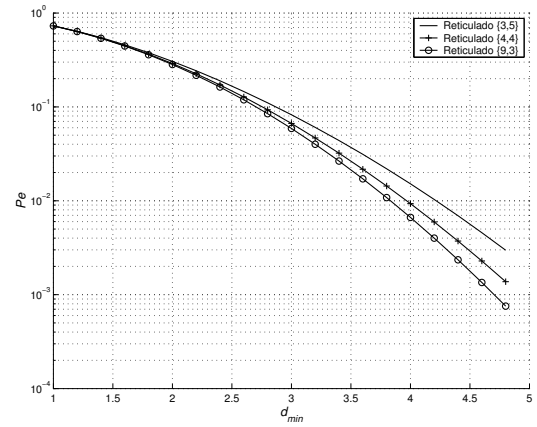


Fig. 9. Probabilidade de erro versus distância mínima das tesselações $\{5, 3\}$, $\{4, 4\}$ e $\{9, 3\}$, para uma energia normalizada em relação à tesselação $\{4, 4\}$ e $\rho_1 = d_{min}/2$.

IV. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos a análise de desempenho de sistemas de comunicações utilizando constelações de sinais provenientes de tesselações $\{p, q\}$, cujos sinais estão contidos em espaços com curvatura seccional constante. Este estudo teve como motivação o fato da curvatura seccional ser um parâmetro importante na análise de desempenho de sistemas de comunicações. Como conseqüência, mostramos que o desempenho das constelações de sinais derivadas de tesselações em espaços com curvatura negativa é melhor do que aquelas tradicionalmente utilizadas em espaços com curvatura nula. Além disso, introduzimos o conceito de energia média normalizada de uma constelação de sinais em relação a uma outra, conceito este que se mostrou bastante efetivo na análise de desempenho.

REFERÊNCIAS

- [1] E. Agustini, *Constelações de Sinais em Espaços Hiperbólicos*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas, Brasil, 2002.
- [2] E.B. da Silva, *Constelação de Sinais e Análise de Desempenho no Plano Hiperbólico*, Tese de Doutorado, FECC-UNICAMP, Campinas, Brasil, 2000.
- [3] M.P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1976.
- [4] M.P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Impa-Projeto Euclides, 1979.
- [5] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, 2nd edition, Springer-Verlag, 1998.
- [6] G.D. Forney, Jr., *Geometrically Uniform Codes*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-37, pp. 1241-1260, Sept. 1991.
- [7] M.B. Faria, *Empacotamento de Esferas em Espaços Hiperbólicos*, Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, Campinas, Brasil, 2001.
- [8] J.G. Proakis, *Digital Communications*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1989.
- [9] R.G. Cavalcante, *Análise de Desempenho de Constelações de Sinais em Variedades Riemannianas*, Dissertação de Mestrado, FECC-UNICAMP, Campinas, Brasil, 2002.
- [10] R.G. Cavalcante, e R. Palazzo Jr., *Performance analysis of M-PSK signal constellations in Riemannian varieties*, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 2003.
- [11] R.G. Cavalcante, e R. Palazzo Jr., *Construção e Análise de Desempenho de Constelações de Sinais M-PSK em Superfícies Mínimas*, XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações-SBT'03, Rio de Janeiro, 2003.
- [12] W. Klingenberg, *A Course in Differential Geometry*, Springer, New York, 1978.