

Um Refinamento de Códigos Convolucionais Puncionados

Bartolomeu F. Uchôa-Filho, Richard Demo Souza, Cecilio Pimentel, Andrei P. Legg, Marcel Jar

Resumo—Uma nova classe de códigos convolucionais puncionados (CCPs) é apresentada. Nesta classe, um CCP é obtido a partir do puncionamento de um código convolucional (o código “mãe”) periodicamente variante no tempo de taxa 1/2, sendo que, dentro de um período, fases diferentes podem ter tamanhos de memória distintos. A nova classe compreende todos os CCPs de taxa maior do que 1/2 já publicados, e contém novos CCPs que podem oferecer uma melhor solução de compromisso entre complexidade de decodificação e desempenho.

Palavras-Chave—Códigos convolucionais puncionados, códigos variantes no tempo, complexidade de decodificação, espectro de distâncias.

Abstract—A new class of punctured convolutional codes (PCCs) is presented. In this class, a PCC is obtained by puncturing a rate 1/2 periodically time-varying convolutional code (the “mother” code), where different phases within a period may have different memory sizes. The new class encompasses all previous PCCs of rate greater than 1/2 and contains new PCCs offering a flexible choice of trade-off between decoding complexity and performance.

Keywords—Punctured convolutional codes, time-varying codes, decoding complexity, distance spectrum.

I. INTRODUÇÃO

UM código convolucional pode ser representado por uma treliça semi-infinita que consiste, após um breve transiente, em cópias concatenadas de uma estrutura básica chamada *módulo*. McEliece e Lin [1] estabeleceram que o esforço computacional requerido pelo algoritmo de Viterbi para decodificar um bit é proporcional ao número de símbolos codificados (no módulo) por bit de informação. Chamaremos essa medida de *complexidade de treliça*, ou CT simplesmente. Um código convolucional de taxa $R = k/n$ e de comprimento de restrição ν pode ser representado por um módulo, que chamaremos de módulo convencional, cuja CT cresce exponencialmente com $k + \nu$. Os códigos convolucionais puncionados (CCPs) formam uma classe especial de códigos convolucionais em que a decodificação de máxima verossimilhança, através do algoritmo de Viterbi, pode ser realizada com uma treliça de baixa complexidade [2], cuja taxa exponencial de crescimento da CT é de apenas ν . Daí o interesse em CCPs, sobretudo nos de altas taxas. Alguns dos melhores CCPs foram tabulados em

[11]. Neste artigo uma nova classe de CCPs, que compreende todos os CCPs de taxa maior do que 1/2 já publicados, é apresentada. Nesta classe, um CCP é obtido a partir do puncionamento de um código convolucional (o código “mãe”) periodicamente variante no tempo de taxa 1/2, sendo que, dentro de um período, fases diferentes podem ter tamanhos de memória distintos. Tal característica possibilita novos CCPs nesta nova classe que podem oferecer uma solução de compromisso mais refinada entre complexidade de decodificação e desempenho. A complexidade de decodificação será expressa pela CT. Já o desempenho pode ser avaliado a partir do espectro de distâncias, visto que para um código convolucional de taxa $R = k/n$ a probabilidade de um evento de erro, para o canal Gaussiano, com modulação BPSK, decisão suave e alta relação sinal-ruído, é limitada superiormente por [14]:

$$P_E \leq \sum_{d \geq d_{free}} N_d Q \left(\sqrt{2Rd \frac{E_b}{N_0}} \right),$$

onde N_d é o número de seqüências codificadas de peso de Hamming d , E_b é a energia do sinal recebido por bit de informação, N_0 é a densidade espectral de potência unilateral do ruído, e $Q(\cdot)$ é a função definida como $Q(s) = \int_s^\infty e^{-t^2/2} dt / \sqrt{2\pi}$. Portanto, o melhor espectro ($N_{d_{free}}, N_{d_{free}+1}, \dots$) é aquele que apresentar o maior valor possível de d_{free} e, dentre os espectros com o mesmo d_{free} , o melhor é aquele com os menores valores de N_d . Em outras palavras, o melhor espectro para uma dada d_{free} é o primeiro na ordem lexicográfica. Tabelas serão apresentadas contendo novos códigos com uma gama variada de CTs e de espectros de distâncias, preenchendo assim lacunas deixadas nas tabelas de CCPs encontradas na literatura.

II. MÓDULOS DE TRELIÇA E SUAS COMPLEXIDADES DE TRELIÇA

A maneira mais direta de se representar um código convolucional é através do seu *módulo convencional*, que chamaremos abreviadamente por M_{conv} . Seja \mathcal{C} um código convolucional sobre GF(2), com comprimento de bloco n , k bits de informação, memória total ν (onde ν é o menor inteiro tal que \mathcal{C} possa ser obtido por um codificador que requer apenas ν unidades de atraso) e distância livre d_f . \mathcal{C} é então dito ser um código convolucional (n, k, ν, d_f) . Quando desnecessários para a discussão, alguns desses quatro parâmetros poderão ser descartados. O módulo convencional para \mathcal{C} consiste em 2^ν estados iniciais e 2^ν estados finais. Cada estado inicial é conectado por 2^k ramos direcionados aos estados finais, e cada ramo é rotulado com n bits codificados. O módulo M_{conv} para

Bartolomeu F. Uchôa-Filho, Richard Demo Souza e Andrei P. Legg, Grupo de Pesquisa em Comunicações - GPqCom, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 88040-900, E-mails: {uchoa,richard}@eel.ufsc.br, trih@bol.com.br. Cecilio Pimentel e Marcel Jar, Grupo de Pesquisa em Comunicações - CODEC, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, C.P. 7800 - Recife - PE, 50711-970, E-mails: cecilio@ufpe.br, marceljar@yahoo.com.br. Este trabalho foi em parte financiado pelo CNPq, através dos processos: 302402/2002-0 e 302568/2002-6.

IV. CÓDIGOS CONVOLUCIONAIS PUNCIONADOS REFINADOS

A seguir, uma forma mais geral de um CCP — o CCP refinado (CCPR) — será descrita. Casos particulares serão oportunamente apresentados. Considere um CCPVT de período $P = lk$ e de taxa $k'/n' = 1/2$, onde l é um inteiro positivo. Para se conseguir a taxa desejada, igual a $k/n > 1/2$, devemos ter exatamente $l(2k - n)$ fases puncionadas em um bit e $l(n - k)$ fases não puncionadas. Sejam $I_P \subset \mathcal{Z}_P \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2, \dots, P - 1\}$ e $I_N = \mathcal{Z}_P \setminus I_P$ os conjuntos de índices das fases puncionadas e não puncionadas, respectivamente, onde $|I_P| = l(2k - n)$ e $|I_N| = l(n - k)$. No módulo para esse CCP, na fase puncionada p , $p \in I_P$, existem 2^{ν_p+1} símbolos, e na fase não puncionada p , $p \in I_N$, existem 2^{ν_p+2} símbolos. Portanto, a CT do módulo M_{CCPR} , o módulo para o CCPR de taxa k/n obtido a partir do puncionamento de um CCPVT de período $P = lk$ e de taxa $k'/n' = 1/2$, segundo o procedimento acima, é dada por:

$$CT(M_{CCPR}) = \frac{1}{lk} \left[\sum_{p \in I_P} 2^{\nu_p+1} + \sum_{p \in I_N} 2^{\nu_p+2} \right] \quad (4)$$

símbolos por bit. Considere um CCP convencional de taxa k/n com comprimento de memória ν cujo módulo, M_{CCP} , tem CT dada em (2). Obviamente o módulo M_{CCPR} será menos complexo do que M_{CCP} se $\nu_p < \nu$ para pelo menos uma fase $p \in \mathcal{Z}_P$, enquanto as outras fases têm comprimento de memória igual a ν .

Exemplo 1: Considere um CCPR com os seguintes parâmetros: $R = 2/3$, $P = 4$, $l = 2$, $\nu_0 = \nu_2 = \nu_3 = 3$, $\nu_1 = 2$, e sub-matrizes geradoras: fase 0: $G_0^0 = [11]$, $G_1^0 = [00]$, $G_2^0 = [01]$, $G_3^0 = [11]$; fase 1: $G_0^1 = [1X]$, $G_1^1 = [1X]$, $G_2^1 = [1X]$; fase 2: $G_0^2 = [11]$, $G_1^2 = [01]$, $G_2^2 = [11]$, $G_3^2 = [11]$; fase 3: $G_0^3 = [1X]$, $G_1^3 = [1X]$, $G_2^3 = [0X]$, $G_3^3 = [1X]$. O módulo M_{CCPR} para esse código pode ser visto na Figura 2.

Por outro lado, se $\nu_p > \nu$ para pelo menos uma fase então existirá mais espaço para se encontrar códigos com melhor espectro de distâncias.

V. O CÁLCULO DO ESPECTRO DE DISTÂNCIA

Todo CCPVT pode ser equivalentemente descrito como um código invariante no tempo [8]. Isso inclui, é claro, a classe dos CCPRs (e, conseqüentemente, a classe dos CCPs), pois esses são variantes no tempo. Por exemplo, o CCP associado ao módulo puncionado da Figura 1(b) pode ser equivalentemente representado pela treliça invariante no tempo obtida a partir do módulo M_{conv} da Figura 1(a). O cálculo do espectro de distâncias dos novos códigos apresentados neste artigo foi baseado na treliça invariante no tempo equivalente para estes códigos. Segundo Tang *et al.* [13], o espectro de distâncias de um CCPVT obtido a partir da treliça invariante no tempo é pior, no sentido de que apresenta multiplicidades maiores, do que o espectro obtido a partir da treliça mínima para o mesmo código. Isso segue do fato de que na treliça invariante no tempo os ramos são rotulados com n bits, enquanto na treliça mínima há apenas um bit por ramo. Fato semelhante ocorre com relação ao espectro de distâncias a partir da treliça puncionada.

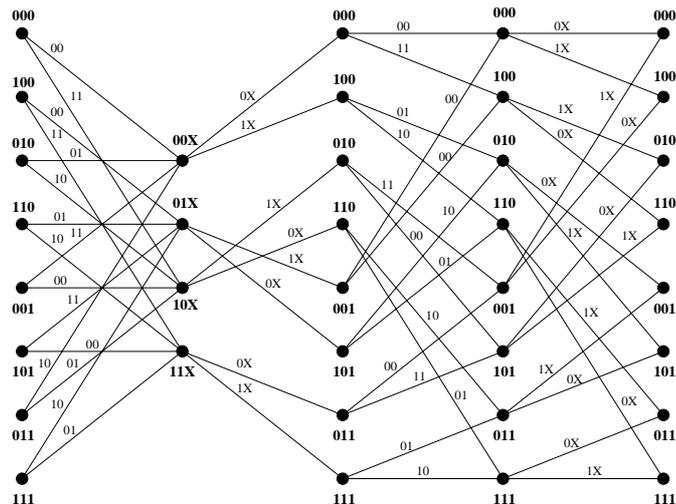


Fig. 2. Módulo M_{CCPR} para o código convolucional puncionado refinado do Exemplo 1.

Sendo assim, alguns CCPRs não puderam ser encontrados e, conseqüentemente, não foram listados nas tabelas da Seção VII. Naquela seção, foram listados apenas os CCPRs cujos espectros, obtidos a partir da treliça invariante no tempo, foram melhores do que os CCPs listados em [11].

VI. A BUSCA COMPUTACIONAL

Uma busca computacional exaustiva para se encontrar novos CCPRs é impraticável. Por exemplo, o número de maneiras pelas quais o CCPVT descrito acima pode ser puncionado para se alcançar taxa k/n é precisamente:

$$\frac{(lk)!}{(l(n-k))! \times (l(2k-n))!}.$$

Apesar disso, uma busca computacional restrita a apenas alguns padrões de puncionamentos pode levar a bons códigos. Restrições adicionais podem ser impostas que limitam ainda mais a busca sem prevenir que bons resultados apareçam. Por exemplo, se o objetivo for encontrar um CCPR com complexidade menor do que a de um CCP com comprimento de memória ν , então podemos adotar as seguintes restrições:

- $G_0^p \neq [0 0]$, onde $0 \leq p < P$, para se obter uma distância livre grande [12];
- $\nu_p \leq \nu$, onde $0 \leq p < P$, para se ter uma $CT(M_{CCPR})$ menor;
- $\nu_p + 1 \geq \nu_{p+1}$, onde $0 \leq p < P - 1$ e $\nu_{P-1} + 1 \geq \nu_0$, para se conseguir o casamento topológico entre uma fase e a seguinte no módulo.

VII. RESULTADOS

Nesta seção são apresentados alguns CCPRs com complexidades diversas. Alguns CCPs apresentados em [11] são também listados, para fins de comparação. Os resultados são apresentados nas Tabelas I-IV. Apenas o caso de $l = 1$ foi considerado. Tabelas adicionais, contemplando outras taxas, estão sendo elaboradas. Os comprimentos de memória em cada fase, $(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{P-1})$, a distância livre, d_f , a CT do módulo, as

TABELA I
CCPRS PARA TAXA $R = 3/4$.

Memórias	d_f	CT	Sub-Matrizes Geradoras	Espectro
(3,3,3)	4	21,3	15,17,(17,15) ^a	29 0 532
(4,3,3)	4	32,0	(25,36),17,17 ^b	10 42 194
(4,4,4)	4	42,7	31,31,(35,23) ^a	5 42 134
(4,4,4)	4	42,7	(27,32),37,27 ^b	5 39 151
(4,4,5)	4	53,3	(35,26),25,61 ^b	5 36 152
(5,4,4)	4	64,0	(65,46),27,37 ^b	2 22 96
(5,5,5)	5	85,3	65,65,(47,61) ^a	13 71 326

^aCódigo listado em [11].

^bCCPR obtido neste artigo.

TABELA II
CCPRS PARA TAXA $R = 3/5$.

Memórias	d_f	CT	Sub-Matrizes Geradoras	Espectro
(3,3,3)	4	26,7	15,(15,13),(15,11) ^a	1 5 14
(4,3,3)	4	32,0	23,(15,13),(11,16) ^b	1 5 13
(3,4,3)	5	37,3	11,(37,22),(13,15) ^b	4 13 34
(3,4,4)	5	48,0	15,(37,24),(23,35) ^b	4 11 29
(4,4,4)	6	53,3	25,(35,21),(37,27) ^a	18 0 139

^aCódigo listado em [11].

^bCCPR obtido neste artigo.

sub-matrizes geradoras do código na forma octal e o espectro de distâncias (três primeiras linhas espectrais) são mostrados nas tabelas. Na coluna das sub-matrizes geradoras, os números octais entre parênteses representam as fases não puncionadas. Para o espectro de distâncias $N_{d_f}, N_{d_f+1}, N_{d_f+2}$, o termo N_{d_f+i} representa o número total de seqüências codificadas com peso de Hamming igual a $d_f + i$, para $i = 0, 1, 2$. Pode-se perceber a partir das tabelas que é possível se conseguir espectros melhores com pequenos incrementos de complexidade. Esses resultados expandem consideravelmente a classe dos CCPs e oferecem uma seleção mais refinada de relações complexidade \times desempenho. Por fim, um resultado incidental. Na Tabela I, nota-se que um CCP de taxa 3/4 e memórias (4,4,4) com espectro melhor do que aquele listado em [11] foi encontrado com a busca realizada neste artigo.

VIII. CONCLUSÃO

Neste artigo um refinamento de códigos convolucionais puncionados, que oferece uma maior flexibilidade na escolha da relação complexidade \times desempenho, foi proposto. Os novos códigos são obtidos a partir do puncionamento de um código

TABELA III
CCPRS PARA TAXA $R = 4/7$.

Memórias	d_f	CT	Sub-Matrizes Geradoras	Espectro
(3,3,3,3)	5	28,0	13,(17,11),(17,13),(17,11) ^a	5 14 36
(3,4,3,3)	5	36,0	13,(32,25),(17,13),(17,11) ^b	4 12 29
(3,4,4,3)	5	44,0	13,(32,25),(37,26),(17,11) ^b	2 10 36
(4,4,4,3)	6	48,0	33,(32,25),(36,27),(15,16) ^b	28 0 163
(3,4,4,4)	6	52,0	11,(32,27),(34,27),(33,27) ^b	22 0 148
(4,4,4,4)	6	56,0	31,(31,25),(35,25),(37,35) ^a	8 30 52

^aCódigo listado em [11].

^bCCPR obtido neste artigo.

TABELA IV
CCPRS PARA TAXA $R = 5/7$.

Memórias	d_f	CT	Sub-Matrizes Geradoras	Espectro
(3,3,3,3,3)	4	22,4	15,(15,11),13,17,(17,11) ^a	17 49 205
(3,3,3,4,4)	4	32,0	15,(15,11),13,37,(33,35) ^b	11 56 166
(4,4,3,4,4)	4	41,6	25,(35,23),13,17,(33,35) ^b	6 40 148
(4,4,4,4,4)	4	44,8	33,(33,21),31,23,(33,35) ^a	2 27 109
(4,4,4,5,5)	4	64,8	33,(33,23),31,47,(75,46) ^b	1 21 83
(5,5,4,5,5)	5	83,2	75,(57,76),27,51,(67,51) ^b	16 67 275
(5,5,5,5,5)	5	89,6	75,(57,75),57,55,(67,51) ^a	10 45 202

^aCódigo listado em [11].

^bCCPR obtido neste artigo.

convolucional “mãe” periodicamente variante no tempo de taxa 1/2, sendo que, em cada período, fases diferentes podem ter tamanhos de memória diferentes. Logo, essa classe inclui todos os códigos convolucionais puncionados já publicados como casos particulares. Na nova classe, a complexidade da treliça pode ser gradualmente incrementada, obtendo-se um melhor espectro a cada novo incremento de complexidade.

REFERÊNCIAS

- [1] R. J. McEliece and W. Lin, “The trellis complexity of convolutional codes,” *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 42, no. 6, pp. 1855-1864, Nov. 1996.
- [2] J. B. Cain, G. C. Clark, Jr., and J. M. Geist, “Punctured convolutional codes of rate $(n-1)/n$ and simplified maximum likelihood decoding,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-25, pp. 97-100, Jan. 1979.
- [3] Y. Yasuda, K. Kashiki, and Y. Hirata, “High-rate punctured convolutional codes for soft-decision Viterbi algorithm,” *IEEE Trans. on Comm.*, vol.COM-32, No. 3, pp. 315-319, March 1984.
- [4] K. J. Hole, “New short-constraint length rate $(n-1)/n$ punctured convolutional codes for soft-decision Viterbi decoding,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-34, pp. 1079-1081, Sept. 1988.
- [5] P. J. Lee, “There are many good periodically time-varying convolutional codes,” *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 35, no. 2, pp. 460-463, Mar. 1989.
- [6] R. Palazzo Jr., “A time-varying convolutional encoder better than the best time-invariant encoder,” *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 39, no. 3, pp. 1109 - 1110, May 1993.
- [7] L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, “Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate,” *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. IT-20, pp. 284-287, Mar. 1974.
- [8] B. F. Uchôa-Filho, R. Palazzo, Jr., A. Said, and C. de Almeida, “New unit-memory codes obtained by puncturing periodically time-varying convolutional codes”, in *SBT/IEEE International Telecommunications Symposium*, pp. 534-538, São Paulo, SP, Brazil, Aug. 1998.
- [9] B. F. Uchôa-Filho and R. Palazzo, Jr., “Unit-memory codes with simplified maximum likelihood decoding”, in *ISITA'2000 International Symposium on Information Theory and its Applications*, pp. 13-16, Honolulu, HI, U.S.A., Nov. 2000.
- [10] R. D. Souza and B. F. Uchôa-Filho, “On trellis modules for convolutional codes,” in *2002 IEEE International Symposium on Information Theory*, pp. 417, Lausanne, Switzerland, July, 2002.
- [11] I. E. Bocharova and B. D. Kudryashov, “Rational rate punctured convolutional codes for soft-decision Viterbi decoding,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 43, no. 4, pp. 1305-1313, July 1997.
- [12] R. Johannesson and K. S. Zigangirov, *Fundamentals of Convolutional Coding*, IEEE Press, New York, NY, 1999.
- [13] H.-H. Tang, M.-C. Lin, and B. F. Uchôa-Filho, “Equivalent convolutional codes with distinct memory sizes of encoders,” submetido para possível publicação no ISITA'04, Parma, Itália, Oct. 2004.
- [14] A. J. Viterbi, “Convolutional codes and their performance in communication systems,” *IEEE Trans. Commun. Technol.*, vol. COM-19, pp. 751-772, Oct. 1971.